https://doi.org/10.26160/2474-5901-2023-35-46-51

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Алымбаев А.Т., Солтонкулова Ж.М., Мурзаев Т.
Кыргызский государственный университет имени Ишеналы Арабаева, Бишкек, Кыргызстан

Ключевая слова: периодическое решение, малый параметр, числовой пример, дифференциальное уравнение.
Аннотация. Колебательные процессы, которые возникают в разных областях науки и техники, описываются периодическими краевыми задачами. Наиболее простым примером, приводящим к периодическим краевым задачам, является математическая модель колебания маятника, описываемая дифференциальным уравнением второго порядка. В статье рассматриваются вопросы построения асимптотического представления периодического решения краевой задачи в виде функционального ряда по степеням малого параметра методом сведения периодической краевой задачи к интегральному уравнению, содержащему малый параметр.

ASYMPTOTIC EXPANSION OF PERIODIC SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATION WITH SMALL SECOND ORDER PARAMETER

Alymbaev A.T., Soltonkulova Zh.M., Murzaev T.
Kyrgyz State University named after Ishenaly Arabaev, Bishkek, Kyrgyzstan

Keyword: periodic solution, small parameter, numerical example, differential equation.
Abstract. Oscillatory processes that arise in various fields of science and technology are described by periodic boundary value problems. The simplest example leading to periodic boundary value problems is the mathematical model of a pendulum oscillation described by a second-order differential equation. The article deals with the construction of an asymptotic representation of a periodic solution in the form of a functional series in powers of a small parameter, by the method of reducing a periodic boundary value problem to an integral equation containing a small parameter.

Введение. Исследованием периодических краевых задач посвящено множество работ. Разработана специальная теория, называемая «теория периодических решений». Созданы различные виды приближенных методов исследования периодических решений дифференциальных, интегро-дифференциальных уравнений [1-7]. Среди приближенных методов можно выделить методы возмущений, позволяющие асимптотически представить решения уравнений и систем уравнений, содержащих малый параметр, в виде ряда по малому параметру.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x(t,\,\varepsilon)}{dt^2} = g(t) + \varepsilon f(t,\, x(t,\,\varepsilon),\, x'(t,\,\varepsilon)), \tag{1}$$

с краевым условием

$$x(0,\ \varepsilon)=x(T,\ \varepsilon), \tag{2}$$

где $g(t),\ f(t,\ x,\ x')$ – T-периодические функции по переменной $t\in(-\infty,\ \infty)$.

Теорема 1. Если T-периодическая функция $\varphi=\varphi(t,\ \varepsilon)$ с начальным условием $\varphi(0,\ \varepsilon)=x_0(\varepsilon)$ является решением, то она представляет собой решение интегрального уравнения вида

$$x(t,\ \varepsilon)=x_0(\varepsilon)+x_0'(\varepsilon)t+\int_0^t\int_0^t(g(s)+\varepsilon f(s,\ x(s,\ \varepsilon),\ x'(s,\ \varepsilon))ds)dt, \tag{3}$$

и она также является решением уравнения (1).

Теорема 2. Если среднее значение T-периодической функции $\varphi=\varphi(t)$ равняется нулю

$$\overline{\varphi(t)}=\frac{1}{T}\int_0^T\varphi(s)ds=0,$$

то функция

$$z(t)=\int_0^t\int_0^s\varphi(\tau)d\tau ds-\frac{t}{T}\int_0^T\int_0^s\varphi(\tau)d\tau ds \tag{4}$$

также T-периодическая функция.

Доказательство. Вычислим $z(t+T)$:

$$z(t+T)=\int_0^{t+T}\int_0^s\varphi(\tau)d\tau-\frac{t}{T}\int_0^T\int_0^s\varphi(\tau)d\tau-\int_0^T\int_0^s\varphi(\tau)d\tau=$$

$$=\int_0^T\int_0^s\varphi(\tau)d\tau ds+\int_0^{t+T}\int_0^s\varphi(\tau)d\tau ds-\frac{t}{T}\int_0^T\int_0^s\varphi(\tau)d\tau ds-\int_0^T\int_0^s\varphi(\tau)d\tau=$$

$$=\int_0^{t+T}\int_0^s\varphi(\tau)d\tau ds-\frac{t}{T}\int_0^T\int_0^s\varphi(\tau)d\tau ds=\int_0^t\int_0^{s+T}\varphi(\tau)d\tau ds-\frac{t}{T}\int_0^T\int_0^s\varphi(\tau)d\tau=$$

$$=\int_0^t\left(\int_0^s\varphi(\tau)d\tau+\int_0^T\varphi(\tau)d\tau\right)ds-\frac{t}{T}\int_0^t\int_0^s\varphi(\tau)d\tau ds=$$

$$=\int_0^t\int_0^s\varphi(\tau)d\tau ds-\frac{t}{T}\int_0^t\int_0^s\varphi(\tau)d\tau ds=z(t).$$

Теорема 3. Если T-периодическая функция $\varphi=\varphi(t,\ \varepsilon)$ является решением краевой задачи (1), (2) и удовлетворяет условиям

$$\overline{g(t)+\varepsilon f(t,\ \varphi(t,\ \varepsilon),\ \varphi'(t,\ \varepsilon))}=0, \tag{5}$$

$$\varphi'(0,\ \varepsilon)=-\overline{g(t)+f(s,\ \varphi(s,\ \varepsilon),\ \varphi'(s,\ \varepsilon))ds}, \tag{6}$$

тогда функция $\varphi(t,\ \varepsilon)$ является T-периодическим решением интегрального уравнения вида

$$x(t,\,\varepsilon)=x(0,\,\varepsilon)+$$

$$+\int_0^t\left\{\int_0^s(g(\tau)+\varepsilon\, f(\tau,\,x(\tau,\,\varepsilon),\,x'(\tau,\,\varepsilon))-\overline{g(\tau)+\varepsilon f(\tau,\,x(\tau,\,\varepsilon),\,x'(\tau,\,\varepsilon))})d\tau-\right. \quad (7)$$

$$\left.-\overline{\int_0^s(g(\tau)+\varepsilon\, f(\tau,\,x(\tau,\,\varepsilon),\,x'(\tau,\,\varepsilon))-\overline{g(\tau)+\varepsilon f(\tau,\,x(\tau,\,\varepsilon),\,x'(\tau,\,\varepsilon))}d\tau}\right\}ds,$$

где $x(0,\,\varepsilon)=a_0+a_1\varepsilon+a_2\varepsilon^2+\ldots$.

Утверждение теоремы 3 следует непосредственно из утверждений теорем 1 и 2. Предположим, что является аналитической функцией по $x,\,x'$. T-периодическое решение уравнения (7) ищем в виде функционального ряда:

$$x(\tau,\,\varepsilon)-x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\varepsilon^2 x_2(t)+\ldots . \quad (8)$$

Поставляя (8) в (7), с учетом аналогичности функции $f(t,\,x,\,x')$ по x и x' получим

$$x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\varepsilon^2 x_2(t)+\ldots+a_0+a_1\varepsilon+a_2\varepsilon^2+\ldots+$$

$$+\int_0^t\left\{\int_0^t(g(s)+\varepsilon\, f(s,\,x_0(s),\,x_0'(s))-\overline{g(s)+\varepsilon f(s,\,x_0(s),\,x_0'(s))})ds+\ldots\right.$$

$$\left.-\overline{\int_0^t(g(s)+\varepsilon\, f(s,\,x_0(s),\,x_0'(s))+\ldots-\overline{g(s)+\varepsilon f(s,\,x_0(s),\,x_0'(s))})+\ldots\, d\tau}\right\}dt.$$

Отсюда, для коэффициентов разложения получим рекуррентную систему выражений:

$$x_0(t,\,a_0)=a_0+\int_0^t\left\{\int_0^s(g(\tau)-\overline{g(\tau)})ds-\overline{\int_0^s(g(\tau)-\overline{g(\tau)})d\tau}\right\}ds, \quad (9_0)$$

$$x_1(t,\,a_1)=a_1+\int_0^t\left\{\int_0^s(f(\tau,\,x_0(\tau,\,a_0),\,x_0'(\tau,\,a_0))-\overline{f(\tau,\,x_0(\tau,\,a_0),\,x_0'(\tau,\,a_0))})d\tau-\right.$$

$$\left.-\overline{\int_0^s(f(\tau,\,x_0(\tau,\,a_0),\,x_0'(\tau,\,a_0))-\overline{f(\tau,\,x_0(\tau,\,a_0),\,x_0'(\tau,\,a_0))})d\tau}\right\}ds. \quad (9_1)$$

Согласно теореме 2, если

$$\overline{g(t)}=\frac{1}{T}\int_0^T g(t)dt=0,$$

$$b_0=x_0'(0)=-\int_0^t(\overline{g(s)-\overline{g}(s)})ds=-\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^t(g(s)-\overline{g}(s))\,dsdt,$$

$$\overline{f(t,\,x_0(t,\,a_0),\,x_0'(t,\,a_0))}=\frac{1}{T}\int_0^T f(t,\,x_0(t,\,a_0),\,x_0'(t,\,a_0))\,dt=0,$$

$$b_1 = x_1'(0,\, a_0) = -\frac{1}{T}\int\limits_0^T\int\limits_0^t (\,f(s,\, x_0(s,\, a_0),\, x_0'(s,\, a_0)) - \overline{f(s,\, x_0(s,\, a_0),\, x_0'(s,\, a_0))})dsdt,$$

тогда функции $x_0(t),\ x_1(t),\ldots$ являются T-периодическими решениями задачи Коши вида

$$x_0''(t) = g(t),$$

$$x_0(0) = a_0, \quad x_0'(0) = -\frac{1}{T}\int\limits_0^T\int\limits_0^t g(s)\,dsdt, \tag{10_0}$$

$$x_1''(t,\, a_1) = f(t,\, x_0(t,\, a_0),\, x_0'(t,\, a_0)),$$

$$x_1(0,\, a_1) = a_1, \;\; b_1 = x_1'(0,\, a_0) = -\frac{1}{T}\int\limits_0^T\int\limits_0^t f(s,\, x_0(s,\, a_0),\, x_0'(s,\, a_0))\,dsdt.$$

Числовой пример

Рассмотрим задачу

$$\frac{d^2x(t,\, \varepsilon)}{dt^2} = \cos t + \varepsilon(x(t,\, \varepsilon) + 2x'(t,\, \varepsilon)),$$

$$x(0,\, \varepsilon) = x(2\pi,\, \varepsilon), \tag{11}$$

где $T = 2\pi,\ g(t) = \cos t,\ f(t,\, x,\, x') = x(t,\, \varepsilon) + 2x'(t,\, \varepsilon).$

Вычислим $\overline{g(t)},\ \int\limits_0^t (g(s) - \overline{g(s)})ds.$

$$\overline{g}(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos t dt = 0, \quad g(t) - \overline{g(t)} = \cos t,$$

тогда

$$\int\limits_0^t (g(s) - \overline{g(s)})ds = \sin t,$$

$$b_0 = x_0'(0,\, a_0) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sin t dt = 0.$$

С учётом этих вычислений из (9_0) имеем

$$x_0(t,\, a_0) = a_0 + \int\limits_0^t \sin s ds = 1 + a_0 - \cos t. \tag{12}$$

Далее из (9_1) имеем

$$x_1(t,\, a_1) = a_1 + \int\limits_0^t \left\{\int\limits_0^s \left[1 + a_0 - \cos\tau + 2\sin\tau - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(1 + a_0 - \cos\tau + 2\sin\tau)d\tau\right]d\tau - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^s \left[1 + a_0 - \cos\tau + 2\sin\tau - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(1 + a_0 - \cos\tau + 2\sin\tau)d\tau\right]d\tau\right\}ds =$$

$$= 1 + a_1 - 2\sin t + \cos t,$$

$$x_1(t,\ a_1) = 1 + a_1 - 2\sin t + \cos t. \tag{13}$$

Вычислим

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1 + a_0 - \cos s + 2\sin s)ds = 1 + a_0.$$

Положим, $a_0 + 1 = 0,\ a_0 = -1.$ Из (12) с учётом $a_0 = -1$ получим нулевой коэффициент $x_0(t,\ a_0)$ разложения

$$x_0(t,\ a_0) = -\cos t.$$

Далее для коэффициента $x_1(t,\ a_2)$ разложение имеем выражение:

$$x_1(t,\ a_2) = a_2 + \int_0^t \left\{ \int_0^s [1 + a_1 - 4\sin\tau - 3\cos\tau - 1 - a_1]d\tau ds - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^s [1 + a_1 - 4\sin\tau - 3\cos\tau - 1 - a_1]d\tau ds \right\} dt =$$

$$= a_2 + \int_0^t \left\{ \int_0^s \left[(-4\sin\tau - 3\cos\tau)d\tau - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^s (-4\sin\tau - 3\cos\tau)d\tau \right] d\tau \right\} ds.$$

Вычислим:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^s (4\sin\tau + 3\cos\tau)d\tau ds dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(4 - 4\cos s + 3\sin s)ds = 4.$$

С учётом (15) получим

$$x_2(t,\ a_2) = a_2 + \int_0^t (4 - 4\cos s - 3\sin s - 4)ds = a_2 - 4\cos t + 3(1 - \cos t).$$

Далее

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1 + a_1 - 4\sin t - 3\cos t)dt = 1 + a_1.$$

Положим, $a_0 + 1 = 0,\ a_0 = -1.$ Следовательно, для коэффициента $x_1(t),$ получим выражение

$$x_1(t) = -2\sin t + \cos t. \tag{16}$$

С учётом выражений (14), (16), из (18) находим асимптотическое представление 2π-периодического решения краевой задачи (11) с точностью $O(\varepsilon^2)$ в виде

$$x(t,\ \varepsilon) = -\cos t + \varepsilon(\cos t - 2\sin t) + O(\varepsilon^2).$$

Поставляя, функции $x_0(t) = -\cos t,\quad x_1(t) = \cos t - 2\sin t$ в краевые задачи

$$x_0''(t) = \cos t,\quad x_0(0) = x_0(2\pi),$$

$$x_1''(t) = -\cos t + 2\sin t,\quad x_1(0) = x_1(2\pi).$$

Убеждаемся, что они являются решениями этих краевых задач.

Список литературы

1. Алымбаев А.Т. Численные, численно-аналитические и асимптотические методы исследования краевых задач. – Бишкек: Изд-во КНУ, 2015. – 175 с.
2. Проскуряков А.П. Метод Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1977. – 256 с.
3. Рубаник В.П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. – М.: Наука, 1962. – 287 с.
4. Самойленко А.М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
5. Найфе А. Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 455 с.
6. Алымбаев А.Т., Солтонкулова Ж.М., Мурзаев Т.Т. Реализация метода интегро-дифференциальных уравнений построения асимптотического решения краевой задачи дифференциального уравнения второго порядка с нелинейным краевым условием // Journal of Advanced Research in Technical Science. – 2022. – №33. – С. 22-27.
7. Алымбаев А.Т., Солтонкулова Ж.М., Мурзаев Т.Т. Асимптотическое представление решений трёхточечный краевой задачи дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром // Journal of Advanced Research in Technical Science. – 2022. – №33. – С. 16-21.

References

1. Alymbaev A.T. Numerical, numerical-analytical and asymptotic methods for studying boundary value problems. – Bishkek: Publ. house KNU, 2015. – 175 p.
2. Proskuryakov A.P. Poincare method in the theory of nonlinear oscillations. – M.: Science, 1977. – 256 p.
3. Rubanik V.P. Oscillations of quasilinear systems with delay. – M.: Science, 1962. – 287 p.
4. Samoilenko A.M. Elements of the mathematical theory of multifrequency oscillations. – M.: Science, 1987. – 304 p.
5. Naife A. Perturbation methods. – M.: World, 1976. – 455 p.
6. Alymbaev A.T., Soltonkulova Zh.M., Murzaev T.T. Implementation of the method of integro-differential equations for constructing an asymptotic solution to the boundary value problem of a second-order differential equation with a nonlinear boundary condition // Journal of Advanced Research in Technical Science. 2022, iss. 33, pp. 22-27.
7. Alymbaev A.T., Soltonkulova Zh.M., Murzaev T.T. Asymptotic representation of solutions to a three-point boundary value problem for a second-order differential equation with a small parameter // Journal of Advanced Research in Technical Science. 2022, iss. 33, pp. 16-21.

Алымбаев Асангул Темиркулович – доктор физико-математических наук, исполняющий обязанности профессора	**Alymbaev Asangul Temirkulovich –** doctor of physical and mathematical sciences, acting professor
Солтонкулова Жамила Мурзабековна – кандидат физико-математических наук, исполняющий обязанности доцента	**Soltonkulova Zhamila Murzabekovna –** candidate of physical and mathematical sciences, acting assistant professor
Мурзаев Тагайбек – исполняющий обязанности доцента	**Murzaev Tagaybek –** acting assistant professor
asangul1953@gmail.com	

Received 04.05.2023