

## АНАЛИЗ ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СВЕРЛА

*Бохонский А.И., Головин В.И., Рыжков А.И.*

*Севастопольский государственный университет, Севастополь, Россия*

**Ключевые слова:** стержень конечной жесткости, жесткость при изгибе и кручении, жесткость при сдвиге, частоты собственных колебаний, снижения уровня колебаний.

**Аннотация.** Рассмотрены крутильно-поступательные и изгибные колебания сверла без учета и с учетом продольной силы. Показано, что сложный характер пространственных колебаний в общем случае обусловлен наличием в процессе обработки изгибных, крутильных и сдвиговых колебаний сверла, зависящих от краевых условий, а также от возможной остаточной кривизны оси сверла, обусловленной действием продольной силой. Численные примеры приведены для сверла с сосредоточенными параметрами (две степени свободы) и с распределенной массой по длине.

## ANALYSIS OF BENDING-TORSIONAL VIBRATIONS OF A DRILL

*Bokhonsky A.I., Golovin V.I., Ryzhkov A.I.*

*Sevastopol State University, Sevastopol, Russia*

**Keywords:** rod end stiffness, bending and torsional stiffness, shear stiffness, drill natural frequency, vibration reduction.

**Abstract.** The torsional-translational and bending vibrations of the drill are considered without taking into account and taking into account the longitudinal force. It is shown that the complex nature of spatial vibrations in the general case is due to the presence of bending torsional and shear vibrations of the drill during processing, depending on the boundary conditions, as well as the possible residual curvature of the drill axis due to the longitudinal force. Numerical examples are given for a drill with lumped parameters (two degrees of freedom) and with a distributed mass along its length.

### Введение

Теория колебаний линейных и нелинейных систем с конечным и бесконечным числом степеней свободы развита в классических трудах [1-9], в которых обращается внимание на исследование свободных, вынужденных, параметрических и случайных колебаний систем с иллюстрацией методов применения теории колебаний к решению ряда конкретных задач из различных областей техники. В [9] отражены основы теории нелинейных колебаний механических систем, проведен анализ математических моделей нелинейных систем с учетом сосредоточенных и распределенных параметров, физической и геометрической нелинейностей и сложного характера динамического воздействия.

В [1, 3] приведены частные случаи колебаний стержней с распределенной массой по длине: изгибные, крутильные, изгибно-крутильные с учетом продольной силы; однако, для реальных условий динамики стержня (например, сверла) они еще недостаточно исследованы. Например, сверло приближенно сможет представлять собой деформируемый гироскоп,

обеспечение устойчивости которого имеет важное практическое значение. Интересна задача учета сил инерции Кориолиса, особенно при переменной угловой скорости вращения вокруг продольной оси и переменной скорости поперечных сечений при изгибных колебаниях сверла. Не всегда учет краевых условий при сложных пространственных колебаниях стержня приводит к удобным для практики решениям системы дифференциальными уравнениями в частных производных. Роль высших форм колебаний также не нашла должного практического отражения в литературе по теории изгибно-крутильных колебаний стержней.

Для практики при оценке ресурса сверла в условиях знакопеременных динамических воздействий большое значение имеют начальные геоцентрические несовершенства сверла (погрешности изготовления и закрепления), которые обусловлены остаточной кривизной или погрешностями в заземлении конца.

Цель исследований – моделирование динамики сверла как объекта с конечным и бесконечным числом степеней свободы.

### **Крутильно-поступательные колебания сверла (с двумя степенями свободы)**

Дифференциальные уравнения, описывающие колебания сверла, составлены с использованием теоремы о движении центра масс и теоремы об изменении главного момента количества движения (рис. 1 а, б):

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -C_y (y - e\varphi), \quad J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -C_\varphi \varphi - C_y (y - e\varphi)e, \quad (1)$$

где  $m$  – масса сверла;  $J = mr^2 / 2$  – физический момент инерции относительно продольной оси;  $C_\varphi = GJ_p / L$  – обобщенный приведенный коэффициент сдвиговой жесткости сверла;  $G$  – модуль упругости второго рода;  $J_p = \pi d^4 / 32$  – полярный момент инерции поперечного сечения;  $C_y = 3EJ / L$  – обобщенный коэффициент жесткости при изгибе;  $E$  – модуль упругости первого рода (модуль Юнга);  $J = \pi d^4 / 64$  – осевой момент инерции поперечного сечения сверла.

Система уравнений (1) переписывается в виде

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + C_y y - C_y e\varphi = 0, \quad C_\varphi = 3GJ_p / L, \quad J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + (C_\varphi + C_y e^2)\varphi - C_y ye = 0. \quad (2)$$

После подстановки частных решений  $y = A \sin(kt)$ ,  $\varphi = B \sin(kt)$  и известных преобразований, квадраты частот собственных колебаний определены из уравнения

$$k^4 - (C_y (J_p + me^2) + C_\varphi m)k^2 / mJ_p + C_y C_\varphi / mJ_p = 0. \quad (3)$$

Численный пример. **Исходные данные:**  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Па;  $G = 0,4E$ ;

$$d = 0,01 \text{ м}; \quad m = \frac{\pi d^2}{4} L \cdot 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг}; \quad J_p = \frac{\pi d^4}{32}; \quad L = 0,2 \text{ м}; \quad e = 0,001 \text{ м}.$$

Вычисленные величины:  $k_1 = 6,480752849 \text{ с}^{-1}$ ;  $k_2 = 12477,74754 \text{ с}^{-1}$ . Для исключения перехода через резонанс необходимо стремиться, чтобы угловая скорость вращения сверла не совпадала с частотой его поперечных изгибных колебаний.

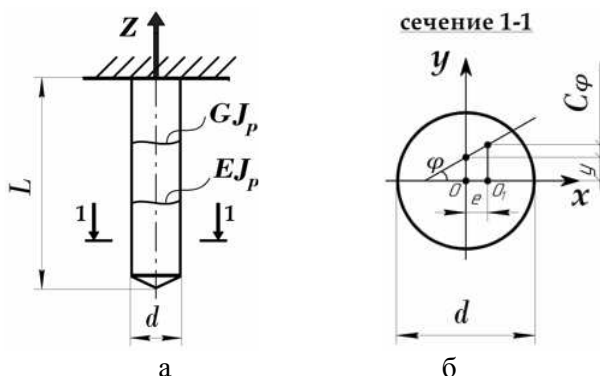


Рис. 1. Схема сверла: а) геометрические и физические параметры сверла; б) схема поперечного сечения сверла, с учетом эксцентриситета центра масс;  $O$  – центр жесткости;  $O_1$  – центр масс

### Крутильно-поступательные колебания сверла конечной жесткости

В достаточно простом случае сверло рассматривается в виде консольного стержня с распределенной массой по длине и некоторым смещениям (в результате деформирования оси) центра масс поперечного сечения относительно центра жесткости. Предполагается, что сверло обладает достаточно большим диаметром, причем жесткость на сдвиг существенно влияет на крутильные колебания сверла. Коэффициент формы круглого поперечного сечения и коэффициент распределения направлений деформирования при кручении близки к единице.

С использованием принципа Даламбера, как условия динамического равновесия поперечного сечения, крутильно-поступательные колебания сверла описываются системой дифференциальных уравнений в частных производных [9]:

$$GF \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - GF e \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (4)$$

$$GJ_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - GF \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + GF e^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0,$$

где  $GF$  – жесткость при сдвиге ( $G$  – модуль упругости второго рода,  $F$  – площадь поперечного сечения сверла  $F = \frac{\pi d^2}{4}$ );  $w$  – горизонтальное перемещение сечения с координатой  $x$ ;  $e$  – смещение центра масс поперечного сечения по отношению к центру жесткости;  $\varphi$  – угол поворота сечения с координатой  $x$ ;  $\theta = \frac{J_p m}{F}$  где  $J_p$  – полярный момент инерции поперечного

сечения относительно центра тяжести ( $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$ );  $m$  – масса единицы длины (кг/м).

Упрощенная схема сверла изображена на рисунке 2.

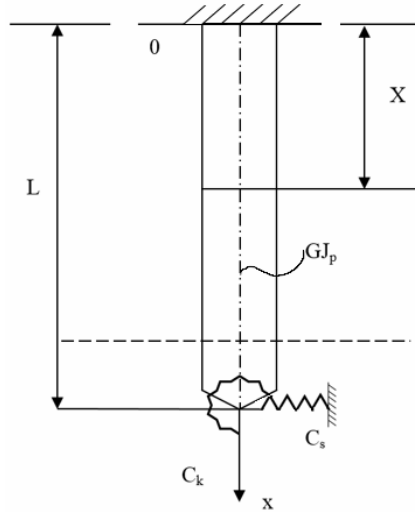


Рис. 2. Схема сверла с жестким и упругим защемлениями концов

При учете только первой моды колебаний решение системы уравнений (4) найдено в виде:

$$w(x, t) = (A + Be) \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \cdot \sin(pt), \quad \varphi(x, t) = B \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \cdot \sin(pt). \quad (5)$$

После подстановки (5) в (4) и преобразований, получена система линейных однородных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (\lambda^2 p_c^2 - p^2)A - p^2 eB &= 0, \\ -p^2 \eta A + (\lambda^2 p_k^2 - p^2)B &= 0, \end{aligned}$$

а частотный определитель которой имеет вид:

$$(\lambda^2 p_c^2 - p^2) - p^2 e = 0, \quad -p^2 \eta + (\lambda^2 p_k^2 - p^2) = 0. \quad (6)$$

Теперь квадраты частот собственных колебаний определяются при помощи пакета Maple по формулам:

$$\begin{aligned} P1 &:= \text{evalf} \left( \text{sqrt} \left( \frac{1}{2 \cdot (1 - ks \cdot e)} \left( (Pk^2 + Pc^2 + \text{sqrt} \left( (Pk^2 - Pc^2)^2 + 4 \cdot Et \cdot e \cdot Pc^2 \cdot Pk^2 \right)) \cdot Ld^2 \right) \right) \right), \quad (7) \\ P2 &:= \text{evalf} \left( \text{sqrt} \left( \frac{1}{2} \left( (Pk^2 + Pc^2 - \text{sqrt} \left( (Pk^2 - Pc^2)^2 + 4 \cdot Et \cdot e \cdot Pc^2 \cdot Pk^2 \right)) \cdot Ld^2 \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Численный пример. **Исходные данные:**  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Па;  $G = 0,4E$ ;  $d = 0,01$  м;  $F = \frac{\pi d^2}{4}$ ;  $m = F \cdot 7,8 \cdot 10^3$  кг/м;  $\theta = \frac{J_p \cdot m}{F}$ ;  $L = 0,2$  м;  $e = 0,001$  м;

$$p_c = \sqrt{G \cdot \frac{F}{m}}; \quad p_k = \sqrt{\frac{GJ_p}{\theta}}; \quad Et = e / \left( e^2 + \frac{\theta}{m} \right); \quad \lambda = \frac{\pi}{2 \cdot L}. \quad \text{Вычисленные частоты:}$$

$$P_1 = 21826 \text{ c}^{-1}; \quad P_2 = 29192 \text{ c}^{-1}.$$

При использовании найденных с учетом условий закрепления сверла параметров А и В графики поперечных  $w(x,t)$  и крутильных  $\varphi(x,t)$  колебаний изображены на рисунке 3 а,б.

$$\text{plot3d}(0.002 \cdot \sin(Ld \cdot x) \cdot \sin(P1 \cdot t), x = 0 \dots L, t = 0 \dots 0.4, \text{axes} = \text{boxed}, \text{style} = \text{patch});$$

$$\text{plot3d}(0.005 \cdot \sin(Ld \cdot x) \cdot \sin(P1 \cdot t), x = 0 \dots L, t = 0 \dots 0.4, \text{axes} = \text{boxed}, \text{style} = \text{patch});$$

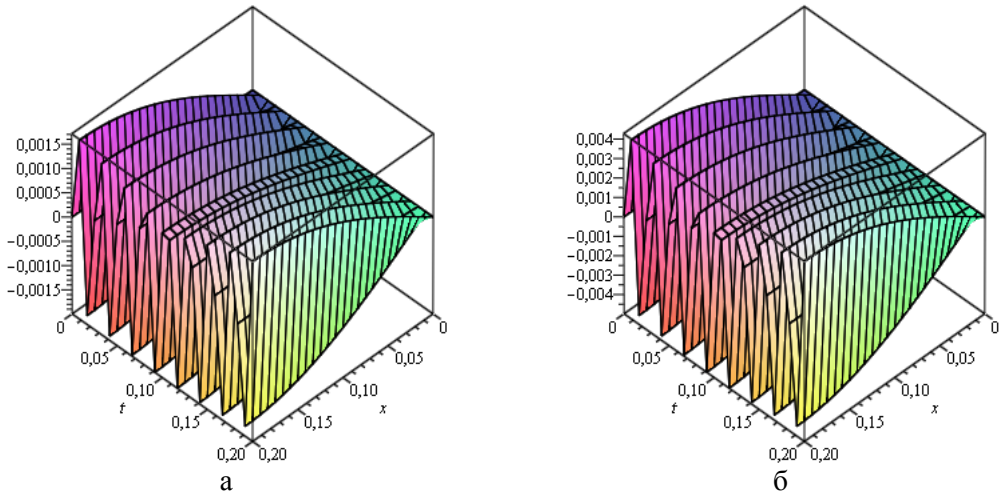


Рис. 3. Графики поперечных  $w(x,t)$  и крутильных  $\varphi(x,t)$  колебаний сверла.

### Поперечные колебания сверла с учетом сжимающей продольной силы

Дифференциальное уравнение изгибных колебаний сжато-изогнутого стержня [1]:

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = q(x,t) \quad (8)$$

Решение уравнения (8) приведено в [1]. Без учета продольной силы частота первого тона изгибных колебаний вычислена по формуле:

$$w_1 = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}. \quad (9)$$

Частота первого тона изгибных колебаний с учетом продольной сжимающей силы вычислена так:

$$w_1 = a \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{1 - \frac{Te^2}{EJ\pi^2}}, \quad (10)$$

где  $a = \sqrt{\frac{EJ}{m}}$ ; характерно, что при стремлении второго слагаемого к единице под радикалом сверло может терять устойчивость и при сложных нагрузках происходит его разрушение. Для прежних сходных данных частота первого тона колебаний без учета продольной силы  $\omega_1 = 3200 \text{ с}^{-1}$ , а с ее учетом  $\omega_1^* = 41355 \text{ с}^{-1}$ , т.е. учет продольной силы приводит (более чем на порядок) к увеличению частоты изгибных колебаний.

### **Заключение**

В общем случае сверло как упругий объект с распределенной массой по длине обладает широким спектром частот собственных колебаний (изгибных, крутильных, сдвиговых).

Для снижения уровня колебаний в процессе эксплуатации необходимо полное практическое устранение возможной остаточной кривизны, возникающей как в процессе изготовления, так и при интенсивной эксплуатации. Сложные периодические динамические нагрузки приводят к накоплению усталостных явлений, которые существенно влияют на долговечность сверла.

До настоящего времени математические модели сложных пространственных колебаний сверла все еще недостаточно исследованы и требуют их уточнения с учетом более строгого влияния погрешностей при учете реальных краевых условий, обусловленных работой сверла.

### **Список литературы**

1. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Наука, 1967. – 444 с.
2. Пономарев С.Д. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 3. – М.: Машиностроение, 1959. – 1118 с.
3. Вибрации в технике. Справочник в 6-ти томах. Т.1. Колебание линейных систем / Под ред. В.В. Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – 352 с.
4. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость колебания упругих систем. – М.: Наука, 1979. – 384 с.
5. Пановко Я.Г. Основы теории колебаний и удара. – Л.: Машиностроение, 1979. – 320 с.
6. Светлицкий В.А., Стаценко И.В. Сборник задач по теории колебаний. – М.: Высшая школа, 1973. – 456 с.
7. Светлицкий В.А. Случайные колебания механических систем. – М.: Высшая школа, 1971. – 320 с.
8. Сейсмостойкое строительство зданий / Под ред. И.Л. Корчинского – М.: Высшая школа, 1971. – 320 с.
9. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти томах. Т. 2. Колебания нелинейных механических систем – М.: Машиностроение, 1979. – 351с.

### **References**

1. Timoshenko S.P. Fluctuations in engineering. – М.: Science, 1967. – 444 p.

2. Ponomarev S.D. and others. Calculations for strength in mechanical engineering, v.3. – M.: Mechanical Engineering, 1959. – 1118 p.
3. Vibrations in technology. Handbook in 6 volumes. T. 1. Oscillation of Linear Systems / Ed. V.V. Bolotina. – M.: Mechanical Engineering, 1978. – 352 p.
4. Panovko Ya.G., Gubanova I.I. Stability of vibrations of elastic systems. – M.: Science, 1979. – 384 p.
5. Panovko Ya.G. Fundamentals of the theory of oscillations and shock. – L.: Mechanical Engineering, 1979. – 320 p.
6. Svetlitsky V.A., Statsenko I.V. Collection of problems on the theory of oscillations. – M.: Higher school, 1973. – 456 p.
7. Svetlitsky V.A. Random oscillations of mechanical systems. – M.: Higher School, 1971. – 320 p.
8. Earthquake-resistant construction of buildings / Ed. I.L. Korchinsky. – M.: Higher School, 1971. – 320 p.
9. Vibrations in technology: Handbook. In 6 volumes. Vol. 2. Oscillations of non-linear mechanical systems. – M.: Mechanical Engineering, 1979. – 351p.

<b>Бохонский Александр Иванович</b> – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Цифровое проектирование»	<b>Bokhonsky Alexander Ivanovich</b> – doctor of technical sciences, professor, professor of the department of digital design
<b>Головин Василий Игоревич</b> – кандидат технических наук, доцент, директор Политехнического института	<b>Golovin Vasily Igorevich</b> – candidate of technical sciences, associate professor, director of the polytechnic Institute
<b>Рыжков Александр Игоревич</b> – кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры «Цифровое проектирование»	<b>Ryzhkov Alexander Igorevich</b> – candidate of technical sciences, senior lecturer at the department of digital design
bohon.alex@mail.ru	

*Received 28.04.2023*