https://doi.org/10.26160/2474-5901-2022-33-22-27

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПОСТРОЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕЛИНЕЙНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ

Алымбаев А.Т., Солтонкулова Ж.М., Мурзаев Т.
Кыргызский государственный университет имени Ишеналы Арабаева, Бишкек, Кыргызстан

Ключевая слова: краевая задача, метод интегро-дифференциальных уравнений, задача Коши, оценка остаточного члена, малый параметр.
Аннотация. Методы малого параметра, представляет собой одно из наиболее эффективных методов изучение, задачи Коши и краевых задач дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Эти методы позволяют получить приближенные асимптотические представления решений линейных и нелинейных краевых задач, как для обыкновенных дифференциальных, так и интегро-дифференциальных уравнений. Введением неизвестного параметра, краевая задача сведена к задаче Коши для интегро-дифференциального уравнения типа Фредгольма. Асимптотическое разложение решения задачи Коши ищется в виде степенного ряда по степеням малого параметра. Оценка погрешность остаточного члена разности между точным и приближенными решениями.

IMPLEMENTATION OF THE METHOD OF INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR CONSTRUCTING AN ASYMPTOTIC SOLUTION TO A BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH A NONLINEAR BOUNDARY CONDITION, A SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION, WITH A SMALL PARAMETER

Alymbaev A.T., Soltonkulova Zh.M., Murzaev T.
Kyrgyz State University named after Ishenaly Arabaev, Bishkek, Kyrgyzstan

Keyword: boundary value problem, method of integro-differential equations, Cauchy problem, residual term estimate, small parameter.
Abstract. Methods of a small parameter, is one of the most effective methods for studying the Cauchy problem and boundary value problems of differential and integro-differential equations. These methods make it possible to obtain approximate asymptotic representations of solutions to linear and nonlinear boundary value problems, both for ordinary differential and integro-differential equations. By introducing an unknown parameter, the boundary value problem is reduced to the Cauchy problem for an integro-differential equation of the Fredholm type. The asymptotic expansion of the solution of the Cauchy problem is sought in the form of a power series in powers of a small parameter. Estimation of the error of the residual term of the difference between the exact and approximate solutions.

Исследованием двухточечных краевых задач для дифференциальных уравнений посвящено множество работ. Разработаны качественные, аналитические, асимптотические методы. Для периодических краевых задач разработана специальная теория, называемая «теория периодических решений». Из асимптотических методов исследования краевых задач отметим метод малого параметра А. Пуанкаре [2], метод усреднения [4], метод мажоранта А.М. Ляпунова [9] и другие [3, 7, 8]. Методу интегро-дифференциальных уравнений посвящены работы [1, 5, 6].

Рассмотрим краевую задачу, с нелинейным краевым условием

$$\frac{d^2x(t,\varepsilon)}{dt^2}=g(t)+\varepsilon f(t,x(t,\varepsilon)), \tag{1}$$

$$aF(x(0,\varepsilon))+bx(T,\varepsilon)=d, \tag{2}$$

где a, b, d – вещественные числа, ε – малый параметр.

Предположим, что функции $F(x), f(t,x)$ достаточно гладкие бесконечные функции относительно переменной x.

Прибавим в левую часть (1) параметр α и уравнение записываем в виде

$$\frac{d^2x(t,\varepsilon)}{dt^2}=l(t)+\varepsilon f(t,x(t,\varepsilon))+\alpha. \tag{3}$$

Теорема 1. Если $b\neq 0$, то краевую задачу (1), (2) можно свести к интегральному уравнению вида

$$\begin{aligned} x(t,\varepsilon)=c_0(\varepsilon)+c_1(\varepsilon)t+\int_0^t\int_0^s\{g(\tau)+\varepsilon f(\tau,x(\tau,\varepsilon))\,d\tau ds-\\ -\frac{2}{T^2}\int_0^T\int_0^s[g(\tau)+\varepsilon\, f(\tau,x(\tau,\varepsilon))]d\tau ds\}\,d\tau ds+\\ +\frac{t^2}{T^2}[b^{-1}d-b^{-1}aF(c_0(\varepsilon))-c_0(\varepsilon)-c_1(\varepsilon)T]. \end{aligned} \tag{4}$$

Теорему можно доказать аналогично утверждению, приведенному в работе [5].

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\begin{aligned} x(t,\varepsilon)=a_0+a_1\varepsilon+a_2\varepsilon^2+...+(b_0+b_1\varepsilon+b_2\varepsilon^2+...)t+\\ +\int_0^t\int_0^s[g(\tau)+\varepsilon f(\tau,x(\tau,\varepsilon))]d\tau ds-\frac{t^2}{T^2}\int_0^T\int_0^s[g(\tau)+\varepsilon f(\tau,x(\tau,\varepsilon))]d\tau ds+\\ +\frac{t^2}{T^2}[b^{-1}d-b^{-1}aF(a_0+a_1\varepsilon+...)-a_0-a_1\varepsilon-...-(b_0+b_1\varepsilon+...)T]. \end{aligned} \tag{5}$$

Асимптотическое разложение решения интегрального уравнения ищем в виде

$$x(t,\varepsilon)=x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\varepsilon^2x_2(t)+\dots\,. \tag{6}$$

Приставим $f(t,x(t,\varepsilon))$ и $F(x(0,\varepsilon))$ в виде ряда по степеням малого параметра

$$\begin{aligned} f(t,x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\varepsilon^2x_2(t)+...)=f(t,x_0(t))+f'_x(t,x_0(t))x_1(t)\varepsilon+\\ +(f'_x(t,x_0(t))x_2(t)+g_1(t,x_0(t),x_1(t)))\varepsilon^2+..., \end{aligned} \tag{7}$$

$$F(a_0+a_1\varepsilon+a_2\varepsilon^2+...)=F(a_0)+F'(a_0)a_1\varepsilon+(F'(a_0)a_2+F''(a_0)a_1)\varepsilon^2+\dots \tag{8}$$

С учётом разложений (7), (8) из (5) имеем

$$x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\varepsilon^2 x_2(t)+\ldots=$$

$$=\int_0^t\int_0^s[g(\tau)+f(\tau,x_0(\tau))\varepsilon+f'_x(\tau,x_0(\tau))x_1(\tau)\varepsilon^2+\ldots]dsd\tau-$$

$$-\frac{t^2}{T^2}\int_0^T\int_0^s[g(\tau)+f(\tau,x_0(\tau))\varepsilon+f'_x(\tau,x_0(\tau))x_1(\tau)\varepsilon^2+\ldots]d\tau ds+$$

$$+\frac{t^2}{T^2}\{b^{-1}d-b^{-1}aF(a_0)-b^{-1}aF'(a_0)a_1\varepsilon-\ldots-$$

$$-a_0-a_1\varepsilon-a_2\varepsilon^2-\ldots-b_0T+b_1T\varepsilon+b_2T\varepsilon^2+\ldots\}.$$

Отсюда относительно коэффициента $x_0(t)$ разложение (6) получим в виде соотношения

$$x_0(t)=\int_0^t\int_0^s g(\tau)d\tau ds-\frac{t^2}{T^2}\int_0^T\int_0^s g(\tau)d\tau ds-\frac{t^2}{T^2}[b^{-1}d-b^{-1}aF(a_0)-a_0-b_0T]. \quad (9)$$

Положим

$$b^{-1}d-b^{-1}aF(a_0)-a_0-b_0T-\int_0^T\int_0^s g(\tau)d\tau ds=0$$

или

$$\bar{b}_0=\frac{1}{T}\left[b^{-1}d-b^{-1}aF(\bar{a}_0)-\bar{a}_0-\int_0^T\int_0^s g(\tau)d\tau ds\right]. \quad (10)$$

a_0 – произвольная постоянная.

Тогда из (9) получим

$$x_0(t)=\bar{a}_0+\bar{b}_0T+\int_0^t\int_0^s g(\tau)d\tau ds. \quad (11)$$

Из (10), (11) следует, что $x_0(t)$ является решением задачи Коши

$$x''_0(t)=g(t), \quad (12)$$

$$\begin{cases} x_0(0)=a_0, \\ x'_0(0)=b_0=\dfrac{1}{T}\left[b^{-1}d-b^{-1}aF(a_0)-a_0-\displaystyle\int_0^T\int_0^s g(\tau)d\tau ds\right]. \end{cases} \quad (13)$$

Далее для коэффициента $x_1(t)$ имеем

$$x_1(t)=\bar{a}_1+\bar{b}_1t+\int_0^t\int_0^s f(\tau,x_0(\tau))d\tau ds, \quad (14)$$

где $\bar{b}_1=-\dfrac{1}{T}\left[b^{-1}aF(a_0)\bar{a}_1+\bar{a}_1+\displaystyle\int_0^T\int_0^s f(\tau,x_0(\tau))d\tau ds\right].$

a_1 – произвольная постоянная.

Заметим, что $x_1(t)$ является решением задачи Коши вида

$$x_1''(t) = f(t, x_0(t)), \tag{15}$$

$$\begin{cases} x_1(0) = a_1, \\ x_1'(0) = b_1 = -\dfrac{1}{T}\left[b^{-1} a F(a_0) a_1 + a_1 + \int\limits_0^T \int\limits_0^s f(\tau, x_0(\tau)) d\tau ds \right]. \end{cases} \tag{16}$$

Таким образом, можем найти последовательно коэффициенты $\{x_k(t)\}$ $(k = 0, 1, 2, ...)$ разложения (6).

В качестве примера рассмотрим краевую задачу

$$x''(t, \varepsilon) = 3t + \varepsilon x(t, \varepsilon), \tag{17}$$

$$3e^{x(0,\varepsilon)} + 5x(1, \varepsilon) = 2. \tag{18}$$

В данном случае $T = 1,\ a = 3,\ b = 5,\ d = 2,$ а также $F(x(0, \varepsilon)) = e^{x(0,\varepsilon)}$, $g(t) = 3t,\ \ f(t, x) = x(t, \varepsilon).$

Положим $a_0 = 0,5$, тогда

$$b_0 = \frac{2}{5} - \frac{3}{5} e^{0,5} - 0,5 - 3\int\limits_0^1 \int\limits_0^s \tau d\tau ds = 0,4 - 0,6 \cdot 1,648 - 0,5 - 0,5 = -1,588.$$

С учётом этих вычислений из (11) получим

$$x_0(t) = 0,5 - 1,588t + \int\limits_0^t \int\limits_0^s 3\tau d\tau ds = 0,5 + 1,588t + 0,5t^3.$$

$$x_0(\mathrm{t}) = 0,5 + 1,588t + 0,5t^3. \tag{19}$$

Далее, положим $\overline{a}_1 = 0,7,$ тогда

$$b_1 = -\left(\frac{5}{3} \cdot e^{0,5} + 1 \right) \cdot 0,7 - \int\limits_0^1 \int\limits_0^s (0,5 + 1,588\tau + 0,5\tau^3) d\tau ds =$$

$$= -0,6 \cdot 1,648 \cdot 0,7 - 0,7 - 1 - 0,264 - 0,025 = -2,681.$$

Следовательно, из (9) получим

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 0,7 - 2,681t + \int\limits_0^t \int\limits_0^s (0,5 + 1,588\tau + 0,5\tau^3) d\tau ds = \\ &= 0,7 - 2,681t + 0,25t^2 + 0,264t^3 + 0,025t^5. \end{aligned} \tag{20}$$

С учётом выражений (19), (20) с точностью порядка $\mathrm{O}(\varepsilon^2)$ асимптотическое представление краевой задачи (17), (18) имеет вид

$$\begin{gathered} x(t, \varepsilon) = 0,5 - 1,588t + 0,5t^3 + \\ + \varepsilon(0,7 - 2,681t + 0,25t^2 + 0,264t^3 + 0,025t^5) + \mathrm{O}(\varepsilon^2). \end{gathered} \tag{21}$$

Вычислим значение выражения

$$3e^{x(0,\varepsilon)} + 5x(1, \varepsilon).$$

Из (20) при $t = 0$, получим

$$x(0, \varepsilon) = 0,5 + 0,7\varepsilon,$$

$$x(1,\varepsilon)=0,5-1,588+0,5+\varepsilon(0,7-2,681+0,25+0,264+0,025)=$$
$$=-0,588-1,442\varepsilon.$$
$$3e^{x(0,\varepsilon)}=3e^{0,5+0,7\varepsilon}=3e^{0,5}e^{0,7\varepsilon}=3\cdot 1,648(1+0,7\varepsilon+0,245\varepsilon^2)=$$
$$=4,944+3,4608\varepsilon+0,1213\varepsilon^2.$$

На основании этих вычислений имеем
$$3e^{x(0,\varepsilon)}+5x(1,\varepsilon)=4,944+3,4608\varepsilon+\mathrm{O}(\varepsilon^2)-2,94-7,21\varepsilon+\mathrm{O}(\varepsilon^2)=$$
$$=2,004-3,75\varepsilon+\mathrm{O}(\varepsilon^2).$$

Отсюда следует, что асимптотическое представление (21) удовлетворяет краевому условию с точностью порядка $\mathrm{O}(\varepsilon)=3,75\varepsilon$, т.е.
$$2,004-3,75\varepsilon\approx 2,000,\ \text{при } \varepsilon\to 0.$$

Предположим, что найдены первые n – члены ряда (6) $\{x_k(t)\},\ k=0,1,2,...,n.$ Оценим разность $|x(t,\varepsilon)-X_n(t,\varepsilon)|$ при $t\in[0,T]$ и $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$, где
$$X_n(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{n}x_k(t)\varepsilon^k.$$

Образуя функцию:
$$u(t,\varepsilon)=x^0(t,\varepsilon)-X_n(t,\varepsilon).$$

Доказано утверждение.

Теорема 2. Если в области $G=\{t,x:\ 0\le t\le T,\ x\in D\subset R\},$ при $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ (ε_0 - достаточно малое число) выполняются условия
$$K_1=\max_{t,x}\left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right|,\ K_2=\max_{x}\left|\frac{\partial F(x)}{\partial x}\right|,$$
то для разности $|x(t,\varepsilon)-X_n(t,\varepsilon)|$ справедлива оценка
$$|x(t,\varepsilon)-X_n(t,\varepsilon)|_0\le\frac{4(3+2T+b^{-1}aK_2)}{4-\varepsilon T^2K_1}\mathrm{O}(\varepsilon^{n+1}).$$

Список литературы

1. Алымбаев А.Т. Численные, численно-аналитические методы исследования краевых задач. – Бишкек: Изд-во КНУ, 2015. – 175 с.
2. Пуанкаре А. Избранные труды. В 2т. – М.: Наука, 1971, 1972. – 771 с. – 801 с.
3. Проскуряков А.П. Метод Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1977. – 256 с.
4. Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейных механике. – Киев.: Наука Думка, 1971. – 440 с.
5. Алымбаев А.Т., Сагынбай кызы Н. Численная реализация метода интегро-дифференциальных уравнений построения решения краевой задачи системы дифференциальных уравнений с малым параметром // Вестник Иссык-Кульского университета. – 2017. – №44. – С. 20-23.

6. Алымбаев А.Т. Об одном суммарно-разностном методе построения асимптотического решения краевой задачи нелинейного разностного уравнения с малым параметром // Alatoo Academics Studies. – 2019. – №4. – С. 17-21.
7. Найфе А. Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 455 с.
8. Коул Д.Ж. Методы возмущений в прикладной механике. – М.: Мир, 1972. – 274 с.
9. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М.: Гостехиздат., 1950. – 472с.

References

1. Alymbaev A.T. Numerical, numerical-analytical and asymptotic methods for studying boundary value problems. – Bishkek: Publishing house KNU, 2015. – 175 p.
2. Poincare A. Selected works. In 2 vol. – M.: Science, 1971, 1972. – 771 p. - 801 p.
3. Proskuryakov A.P. Poincare method in the theory of nonlinear oscillations. – M.: Science, 1977. – 256 p.
4. Mitropolsky Yu.A. Averaging method in nonlinear mechanics. – Kyiv: Nauka Dumka, 1971. – 440 p.
5. Alymbaev A.T., Sagynbay kyzy N. Numerical implementation of the method of integro-differential equations for constructing a solution to the boundary value problem of a system of differential equations with a small parameter // Bulletin of the Issyk-Kul University. 2017, no. 44, pp. 20-23.
6. Alymbaev A.T. On one sum-difference method for constructing an asymptotic solution to the boundary value problem of a nonlinear difference equation with a small parameter // Alatoo Academics Studies. 2019, no. 4, pp. 17-21.
7. Naife A. Perturbation methods. – M.: World, 1976. – 455 p.
8. Cole D.Zh. Perturbation methods in applied mechanics. – M.: World, 1972. – 274 p.
9. Lyapunov A.M. The general problem of motion stability. – M.: Gostekhizdat., 1950. – 472 p.

Алымбаев Асангул Темиркулович – доктор физико-математических наук, исполняющий обязанности профессора	**Alymbaev Asangul Temirkulovich** – doctor of physical and mathematical sciences, acting professor
Солтонкулова Жамила Мурзабековна – кандидат физико-математических наук, исполняющий обязанности доцента	**Soltonkulova Zhamila Murzabekovna** – candidate of physical and mathematical sciences, acting assistant professor
Мурзаев Тагайбек – исполняющий обязанности доцента	**Murzaev Tagaybek** – acting assistant professor
soltonkulova77@mail.ru	

Received 05.12.2022