https://doi.org/10.26160/2474-5901-2022-33-16-21

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ТРЁХТОЧЕЧНЫЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Алымбаев А.Т., Солтонкулова Ж.М., Мурзаев Т.
Кыргызский государственный университет имени Ишеналы Арабаева, Бишкек, Кыргызстан

Ключевая слова: трёхточечная краевая задача, малый параметр, задачи Коши, оценка погрешности.
Аннотация. Математическая формулировка ряда физических задач может быть описана с помощью дифференциальных уравнений или системы дифференциальных уравнений, содержащие малый параметр. Такие задачи в общем случае не может быть решены точно. Однако, если при некотором фиксированном значении малого параметра, краевая задача решается точно или сравнительно легко, то есть смысл найти решение исходной краевой задачи в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра. Разработанные в настоящее время асимптотические методы построены по этому принципу. В данной работе асимптотическое представление краевой задачи находится согласно алгоритму метода интегро-дифференциальных уравнений. Дана оценка точности между точным и приближенным решением.

ASYMPTOTIC REPRESENTATION OF SOLUTIONS TO A THREE-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH A SMALL PARAMETER

Alymbaev A.T., Soltonkulova Zh.M., Murzaev T.
Kyrgyz State University named after Ishenaly Arabaev, Bishkek, Kyrgyzstan

Keyword: two-point boundary value problem, small parameter, Cauchy problems, error estimate.
Abstract. The mathematical formulation of a number of physical problems can be described using differential equations or systems of differential equations containing a small parameter. In the general case, such problems cannot be solved exactly. However, if for some fixed value of a small parameter, the boundary value problem is solved exactly or relatively easily, then it makes sense to find a solution to the original boundary value problem in the form of an asymptotic expansion in powers of a small parameter. The asymptotic methods currently developed are based on this principle. In this paper, the asymptotic representation of the boundary value problem is found according to the algorithm of the method of integro-differential equations. An estimate of the accuracy between the exact and approximate solution is given.

Введение. Теория краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений представляет собой весьма развивающиеся разделы теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Это обусловлено, с одной стороны, важностью практического приложения теории краевых задач при решении разнообразных задач науки и техники, а также решения ряда теоретических вопросов, связанных с обоснованием эффективных методов отыскания решений краевых задач. Метод интегро-дифференциального исследования двухточечных краевых задач разработан в работах [1-5], а его дискретный аналог дан в статье [6]. Целью данной работы является задача асимптотического представления решения трёхточечной краевой задачи дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром.

Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{d^2x(t,\varepsilon)}{dt^2}=g(t)+\varepsilon f(t,x(t)), \tag{1}$$

$$ax(0,\varepsilon)+bx(t_1,\varepsilon)+kx(T,\varepsilon)=d, \tag{2}$$

где a, b, k и d – постоянные, вещественные числа. Прибавляя в правую часть параметр α и интегрируя обе части уравнения (1), получим

$$x(t,\varepsilon)=c_0(\varepsilon)+c_1(\varepsilon)t+\int_0^t\int_0^s[g(\tau)+\varepsilon f(\tau,x(\tau,\varepsilon))]d\tau ds+\alpha\frac{t^2}{2}. \tag{3}$$

Отсюда имеем

$$x(0,\varepsilon)=c_0(\varepsilon),\ \ x(t_1,\varepsilon)=c_0(\varepsilon)+c_1(\varepsilon)t_1+\int_0^{t_1}\int_0^s[g(\tau)+\varepsilon f(\tau,x(\tau,\varepsilon))]d\tau ds+\alpha\frac{t_1^2}{2},$$

$$x(T,\varepsilon)=c_0(\varepsilon)+c_1(\varepsilon)T+\int_0^{T}\int_0^s[g(\tau)+\varepsilon f(\tau,x(\tau,\varepsilon))]d\tau ds+\alpha\frac{T^2}{2}.$$

На основании этих соотношений из краевого условия (2) получим

$$ac_0(\varepsilon)+bc_0(\varepsilon)+bc_1(\varepsilon)t_1+b\int_0^{t_1}\int_0^s[g(\tau)+\varepsilon f(\tau,x(\tau,\varepsilon))]dsd\tau+$$

$$+kc_0(\varepsilon)T+kc_1(\varepsilon)T+k\int_0^{T}\int_0^s[g(\tau)+\varepsilon f(\tau,x(\tau,\varepsilon))]d\tau ds+\frac{1}{2}[bt_1^2+kT^2]\alpha=d.$$

Отсюда получим

$$\frac{2(a+b+k)}{bt_1^2+kT^2}c_0(\varepsilon)+\frac{2(bt_1+kT)}{bt_1^2+kT^2}c_1(\varepsilon)+\frac{2b}{bt_1^2+kT^2}\int_0^{t_1}\int_0^s[g(\tau)+\varepsilon f(\tau,x(\tau,\varepsilon))]d\tau ds+$$

$$+\frac{2k}{bt_1^2+kT^2}\int_0^{T}\int_0^s[g(\tau)+\varepsilon f(\tau,x(\tau,\varepsilon))]d\tau ds+\alpha=\frac{2d}{bt_1^2+kT^2}.$$

Следовательно,

$$\alpha=\frac{2d}{bt_1^2+kT^2}-\frac{2(a+b+k)}{bt_1^2+kT^2}c_0(\varepsilon)-\frac{2(bt_1+kT)}{bt_1^2+kT^2}c_1(\varepsilon)-$$

$$-\frac{2b}{bt_1^2+kT^2}\int_0^{t_1}\int_0^s[g(\tau)+\varepsilon f(\tau,x(\tau,\varepsilon))]d\tau ds-\frac{2k}{bt_1^2+kT^2}\int_0^{T}\int_0^s[g(\tau)+\varepsilon f(\tau,x(\tau,\varepsilon))]d\tau ds.$$

Поставляя значение параметра в (3), получим интегральное уравнение вида

$$x(\tau,\varepsilon)=c_0(\varepsilon)+c_1(\varepsilon)t+\int_0^t\int_0^s[g(\tau)+\varepsilon f(\tau,x(\tau,\varepsilon))]d\tau ds-$$
$$-\frac{kt^2}{bt_1^2+kT^2}\int_0^T\int_0^s[g(\tau)+\varepsilon f(\tau,x(\tau,\varepsilon))]d\tau ds-$$
$$-\frac{bt^2}{bt_1^2+kT^2}\int_0^{t_1}\int_0^s[g(\tau)+\varepsilon f(\tau,x(\tau,\varepsilon))]d\tau ds+ \tag{4}$$
$$+\frac{t^2}{bt_1^2+kT^2}[d-(a+b+k)c_0(\varepsilon)-(bt_1+kT)c_1(\varepsilon)],$$
$$c_0(\varepsilon)=a_0+a_1\varepsilon+a_2\varepsilon^2+\ldots,\;\; c_1(\varepsilon)=b_0+b_1\varepsilon+b_2\varepsilon^2+\ldots .$$

Теорема 1. Для интегрируемой на отрезках $[0,\, t_1]$, $[0,\, T]$ функции $f(t)$ справедливы оценки

$$\left|\int_0^t\int_0^s f(\tau)d\tau ds-\frac{2kt^2}{bt_1^2+kT^2}\int_0^T\int_0^s f(\tau)d\tau ds\right|\le\frac{(bt_1^2+3kT^2)^2}{32k(bt_1^2+kT^2)}\big|f(t)\big|_0,\text{ при } t\in[0,\, T]. \tag{5}$$

$$\left|\int_0^t\int_0^s f(\tau)d\tau ds-\frac{t^2}{t_1^2}\int_0^{t_1}\int_0^s f(\tau)d\tau ds\right|\le\frac{t_1^2}{4}\big|f(t)\big|_0,\text{ при } t\in[0,\, t_1]. \tag{6}$$

где $\big|f(t)\big|_0=\max\limits_t\big|f(t)\big|$.

Теорема 2. Для интегрируемой на отрезке $[0,T]$ функции $f(t)$ справедлива оценка

$$\left|\int_0^t\int_0^s f(\tau)d\tau ds-\frac{kt^2}{bt_1^2+kT^2}\int_0^T\int_0^s f(\tau)d\tau ds-\frac{bt^2}{bt_1^2+kT^2}\int_0^{t_1}\int_0^s f(\tau)d\tau ds\right|\le$$
$$\le\left[\frac{(bt_1^2+3kT^2)^2}{32k(bt_1^2+kT^2)}+\frac{t_1^2}{4}\right]\big|f(t)\big|_0,\;\; t\in[0,T]. \tag{7}$$

Асимптотическое разложение решения интегрального уравнения (4) ищем в виде

$$x(t,\varepsilon)=x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\varepsilon^2x_2(t)+\ldots . \tag{8}$$

Поставляя (8) в (4) и сравнивая коэффициенты обеих частей равенства, получим систему рекуррентных уравнений, в частности для функции $x_0(t)$ получим выражение

$$x_0(t)=a_0+b_0t+\int_0^t\int_0^s g(\tau)d\tau ds-\frac{2kt^2}{bt_1^2+kT^2}\int_0^T\int_0^s g(\tau)d\tau ds-$$
$$-\frac{2bt^2}{bt_1^2+kT^2}\int_0^{t_1}\int_0^s g(\tau)d\tau ds+\frac{2bt^2}{bt_1^2+kT^2}[d-(a+b+k)a_0-(bt_1+kT)b_0].$$

Положим

$$\frac{2}{bt_1^2+kT^2}[d-(a+b+k)a_0-(bt_1+kT)b_0-k\int_0^T\int_0^s g(\tau)d\tau ds-b\int_0^{t_1}\int_0^s g(\tau)d\tau ds]=0.$$

Отсюда находим $\overline{b}_0$

$$\overline{b}_0=\frac{d}{bt_1+kT}-\frac{a+b+k}{bt_1+kT}\overline{a}_0-\frac{k}{bt_1+kT}\int_0^T\int_0^s g(\tau)d\tau ds-\frac{b}{bt_1+kT}\int_0^{t_1}\int_0^s g(\tau)d\tau ds, \quad (9)$$

$\overline{a}_0$ – произвольная постоянная.

Следовательно, нулевое приближение $x_0(t)$ определяется согласно выражению

$$x_0(t)=\overline{a}_0+\overline{b}_0 t+\int_0^t\int_0^s g(\tau)d\tau ds. \quad (10)$$

Для коэффициента $x_1(t)$ разложение получим в виде выражения

$$\begin{gathered} x_1(t)=a_1+b_1 t+\int_0^t\int_0^s f(\tau,\ x_0(\tau))d\tau ds-\frac{2kt^2}{bt_1^2+kT^2}\int_0^T\int_0^s f(\tau,\ x_0(\tau))d\tau ds- \\ -\frac{2bt^2}{bt_1^2+kT^2}\int_0^{t_1}\int_0^s f(\tau,\ x_0(\tau))d\tau ds-\frac{2t^2}{bt_1^2+kT^2}[(a+b+k)a_1+(bt_1+kT)b_1]. \end{gathered} \quad (11)$$

Определяем $\overline{b}_1$ согласно выражению

$$\overline{b}_1=\frac{a+b+k}{bt_1+kT}\overline{a}_1-\frac{k}{bt_1+kT}\int_0^T\int_0^s f(\tau,\ x_0(\tau))d\tau ds-\frac{b}{bt_1+kT}\int_0^{t_1}\int_0^s f(\tau,\ x_0(\tau))d\tau ds, \quad (12)$$

$\overline{a}_1$ – произвольная постоянная.

Образуем функцию

$$u(t,\varepsilon)=x(t,\varepsilon)-X_n(t,\varepsilon), \quad (13)$$

где $X_n(t,\varepsilon)$ – частная сумма ряда (8) и для функции $u(t,\varepsilon)$ построим интегральное уравнение

$$\begin{gathered} u(t,\varepsilon)=u(0,\varepsilon)+u'(0,\varepsilon)t+\frac{1}{2}\left[\varepsilon\int_0^t\int_0^s\frac{\partial f(\tau,X_n(\tau,\varepsilon)+\theta u(\tau,\varepsilon))}{\partial x}u(\tau,\varepsilon)d\tau ds-\right. \\ \left.-\frac{kt^2\varepsilon}{bt_1^2+kT^2}\int_0^T\int_0^s\frac{\partial f(\tau,X_n(\tau,\varepsilon)+\theta u(\tau,\varepsilon))}{\partial x}u(\tau,\varepsilon)d\tau ds\right]+ \\ +\frac{1}{2}\left[\varepsilon\int_0^t\int_0^s\frac{\partial f(\tau,X_n(\tau,\varepsilon)+\theta u(\tau,\varepsilon))}{\partial x}u(\tau,\varepsilon)d\tau ds-\right. \\ \left.-\frac{4\varepsilon t^2}{t_1^2}\int_0^{t_1}\int_0^s\frac{\partial f(\tau,X_n(\tau,\varepsilon)+\theta u(\tau,\varepsilon))}{\partial x}u(\tau,\varepsilon)d\tau ds\right]+ \end{gathered}$$

$$+\frac{t^2}{bt_1^2+kT^2}[-(a+b+k)\mathrm{O}(\varepsilon^{n+1})-(bt_1+kT)\mathrm{O}(\varepsilon^{n+1})].$$

Отсюда на основании неравенств (5), (6) теоремы 1 получим оценку при $t\in[0,\ T]$

$$\left|u(t,\varepsilon)\right|\le \mathrm{O}(\varepsilon^{n+1})+\mathrm{O}(\varepsilon^{n+1})T+\varepsilon K_1\left|u(t,\varepsilon)\right|\frac{(bt_1^2+kT^2)^2}{128k(bt_1^2+kT^2)}+$$

$$+\varepsilon K_1\left|u(t,\varepsilon)\right|\frac{9t_1^2}{64}+\frac{2T^2}{bt_1^2+kT^2}\left|a+b+k+bt_1+kT\right|\mathrm{O}(\varepsilon^{n+1}).$$

Отсюда получим оценку

$$\left|u(t,\varepsilon)\right|\le\left(\left(1-\varepsilon K_1\frac{(bt_1^2+3kT^2)^2}{64k(bt_1^2+kT^2)}+\frac{t_1^2}{8}\right)\right)^{-1}\cdot K_2\mathrm{O}(\varepsilon^{n+1}),$$

или $$\left|x(t,\varepsilon)-X_n(t,\varepsilon)\right|\le K_2K_3\mathrm{O}(\varepsilon^{n+1}),\ \ t\in[0,T]\ \text{ и }\ \varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$$

где

$$K_1=\max_t\left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right|,\ \ K_2=\left|1+T+a+b(1+t_1^2)+K(1+T)\right|,$$

$$K_3=\left(1-\frac{\varepsilon K_1(bt_1^2+5kT^2)^2}{128k(bt_1^2+kT^2)}-\frac{9\varepsilon K_1t_1^2}{64}\right)^{-1}.$$

Таким образом, теорема доказана.

Теорема 3. Если в области $G=\left\{t,\ x:\ \begin{matrix}0\le t\le T\\ x\in D\subset R\end{matrix}\right\}$, при $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ выполняется условия $K_1\ge\left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right|$, то для разности $\left|x(t,\varepsilon)-X_n(t,\varepsilon)\right|_0$ справедлива оценка

$$\left|x(t,\varepsilon)-X_n(t,\varepsilon)\right|\le K_2K_3\mathrm{O}(\varepsilon^{n+1}),\ \ t\in[0,T]\ \text{ и }\ \varepsilon\in[0,\varepsilon_0].$$

Список литературы

1. Алымбаев А.Т. Численные, численно-аналитические и асимптотические методы исследования краевых задач. – Бишкек: Изд-во КНУ, 2015. – 175 с.
2. Алымбаев А.Т., Сагынбай кызы Н. Численная реализация метода интегро-дифференциальных уравнений построения решения краевой задачи системы дифференциальных уравнений с малым параметром // Вестник Иссык-Кульского университета. – 2017. – №44. – С. 20-23.
3. Найфе А. Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 455 с.

References

1. Alymbaev A.T. Numerical, numerical-analytical and asymptotic methods for studying boundary value problems. – Bishkek: Publ. house KNU, 2015. – 175 p.

2. Alymbaev A.T., Sagynbay kyzy N. Numerical implementation of the method of integro-differential equations for constructing a solution to the boundary value problem of a system of differential equations with a small parameter // Bulletin of the Issyk-Kul University. 2017, no. 44, pp. 20-23.
3. Naife A. Perturbation methods. – M.: World, 1976. – 455 p.

Алымбаев Асангул Темиркулович – доктор физико-математических наук, исполняющий обязанности профессора	**Alymbaev Asangul Temirkulovich –** doctor of physical and mathematical sciences, acting professor
Солтонкулова Жамила Мурзабековна – кандидат физико-математических наук, исполняющий обязанности доцента	**Soltonkulova Zhamila Murzabekovna –** candidate of physical and mathematical sciences, acting assistant professor
Мурзаев Тагайбек – исполняющий обязанности доцента	**Murzaev Tagaybek –** acting assistant professor
soltonkulova77@mail.ru	

Received 05.12.2022