https://doi.org/10.26160/2474-5901-2022-32-62-69

ОЦЕНКА СОВОКУПНОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЕЙ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ КАРТЫ ДИНАМИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТОВ

Елисеев А.В., Миронов А.С.
Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск, Россия

Ключевые слова: структурные методы математического моделирования, механические колебательные системы, режимы динамического гашения колебаний, передаточные функции, динамическая податливость, динамические инварианты, связность внешних силовых возмущений, колебание твердого тела, карта динамических инвариантов.
Аннотация. Развивается концепция динамических инвариантов в оценке состояний и форм взаимодействий элементов механических колебательных систем, образованных твердыми телами, совершающими малые колебания относительно положения статического равновесия в условиях связных возмущений силовой природы. Для решения задач оценки, контроля и формирования динамических состояний используются методы структурного математического моделирования, в рамках которых механическим колебательным системам, используемым в качестве расчетных схем технических объектов, сопоставляются структурные схемы эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления. Для оценки динамических состояний механической колебательной системы используются передаточные функции, в физической интерпретации представляющие собой податливость, зависящую от частоты внешнего возмущения. Совокупность динамических состояний объектов определяется на основе двумерной карты динамических инвариантов податливостей, размерностями которой служат коэффициент связности внешних возмущений и координата объекта, динамическое состояние которого оценивается. С помощью карты динамических инвариантов показано, что многообразие динамических состояний механических колебательных систем обладает структурой, определяемой совокупностью граничных и узловых точек.

EVALUATION OF THE SET OF DYNAMIC FEATURES OF MECHANICAL OSCILLATORY SYSTEMS BASED ON THE MAP OF DYNAMIC INVARIANTS

Eliseev A.V., Mironov A.S.
Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia

Keywords: structural methods of mathematical modeling, mechanical oscillatory systems, modes of dynamic vibration damping, transfer functions, dynamic compliance, dynamic invariants, connectivity of external force disturbances, solid body oscillation, map of dynamic invariants.
Abstract. The concept of dynamic invariants in the evaluation of dynamic states and forms of interactions of elements of mechanical oscillatory systems is being developed. Systems formed by solids and performing small oscillations relative to the position of static equilibrium under conditions of coherent disturbances of a forceful nature are considered. Methods of structural mathematical modeling are used to solve problems of assessment, control and formation of dynamic states. Within the framework of such methods, structural schemes of dynamically equivalent automatic control systems are compared to mechanical oscillatory systems used as design schemes of technical objects under conditions of vibrational loading of a force nature. A transfer function is used to evaluate the dynamic states of a mechanical oscillatory system. The transfer functions under consideration in the physical interpretation represent dynamic compliance, depending on the frequency of the external

disturbance. The set of dynamic states of objects is determined on the basis of a two-dimensional map of dynamic invariants of their compliance, the dimensions of which are the coefficient of connectivity of external disturbances and the coordinate of the object whose dynamic state is estimated. Using the map of dynamic invariants, it is shown that the variety of dynamic states of mechanical oscillatory systems has a structure determined by a set of boundary and nodal points.

Введение. В настоящее время большое внимание уделяется проблемам безопасности технических объектов, находящихся в условиях вибрационного нагружения силовой природы [1, 2]. Необходимость решения задач обеспечения безопасности технических объектов обращает внимание на вопросы управления динамическим качеством взаимодействия элементов механических колебательных систем; существенное значение приобретают задачи оценки, контроля и формирования динамических состояний технических объектов. Внимание к оценке состояний и форм взаимодействий элементов колебательных систем предопределяет необходимость развития научно-методологического базиса решения широкого круга модельных задач динамики. В качестве методологической основы решения широкого круга задач динамики технических объектов, расчетными схемами которых являются механические колебательные системы, могут рассматриваться методы структурного математического моделирования, в рамках которых механическим колебательным системам, находящимся в условиях вибрационного нагружения силовой природы, сопоставляются схемы эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления [3].

Методы структурного математического моделирования нашли своё применение в задачах вибрационной защиты и вибрационной изоляции технических объектов. Методы, позволяющие определять режимы динамического гашения колебаний, находят своё применение в задачах оценки, контроля и формирования вибрационных полей рабочих органов вибрационных технологических машин, когда целью управления является обеспечения равномерности и однородности вибрационного поля.

Для оценки динамического состояния объектов используются передаточные функции, представляющие собой отношения амплитуд колебаний входного и выходного сигналов на различных частотах. В зависимости от постановки задач входными и выходными сигналами могут служить возмущения силовой природы и колебания координат объекта, с физической точки интерпретируемые как динамические податливости или рычажные отношения. Амплитудно-частотные характеристики передаточных функций могут быть представлены с обобщенной точки зрения существенными особенностями в виде количества нулей, разрывов второго рода и знакоопределенных форм. С обобщенной точки зрения многообразие амплитудно-частотных характеристик может быть разбито на конечное число классов, обладающих одинаковыми особенностями, которые могут быть представлены с использованием так называемых динамических инвариантов. Разнообразие динамических состояний системы определяется параметрами или координатами объекта, динамическое состояние которого оценивается, параметрами системы и характером внешних силовых возмущений [4].

Для фиксированного коэффициента связности внешних возмущений силовой природы показано, что совокупность динамических состояний зависит от координат объекта и обладает определенной структурой в виде совокупности множеств, представляющих собою разбиение множества координат объекта на интервалы и критические точки, в которых существенные особенности движения механической колебательной системы, выражаемые в количестве режимов обнуления координат колебаний, резонансов и форм динамических взаимодействий, остаются неизменными.

Вместе с тем, ещё не получили своё развитие вопросы, связанные с детализацией представлений о распределении динамических состояний по точкам твердого тела при условии непрерывного изменения коэффициента связности.

Статья посвящена вопросам оценки совокупности динамических инвариантов в зависимости от коэффициента связности и координаты объекта, динамического состояние которого оценивается.

I. Основные положения. Постановка задачи. Рассматривается механическая колебательная система, образованная твердым телом с массой M и моментом инерции J, установленном на упругие опоры с жесткостями k_1, k_2 (рис. 1).

Предполагается, что система совершает малые установившиеся колебания под воздействием приложенных к т.A и т.B связных гармонических синфазных возмущений Q_1, Q_2;

$$Q_2=\gamma Q_1, \quad (1)$$

где γ – коэффициент связности. Крепления упругих элементов реализуются в тт. A и B отстоящих на расстояниях l_1 и l_2 от центра тяжести т.O твердого тела. На линии AB твердого тела может быть выбрана произвольная точка т.H с координатой h (рис.1). Для фиксированного коэффициента связности γ динамическое состояние твердого тела определяется частотой ω внешних возмущений.

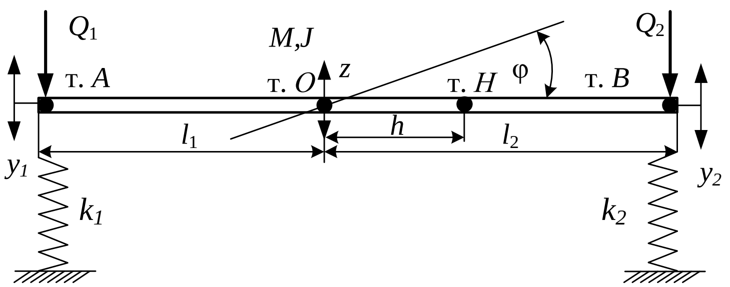

Рис. 1. Механическая колебательная система

Предполагается, что для фиксированного коэффициента связности γ на частоте ω твердое тело совершает малые вынужденные установившиеся колебания, динамические особенности которых в общем случае проявляются в возможности реализации критических режимов колебаний и знакопоопределенных форм динамических взаимодействий элементов системы. Под воздействием связных возмущений т.H совершает колебания с некоторой амплитудой. Для оценки динамических состояний может быть использовано отношение амплитуд колебаний т.H к амплитудам колебаний внешних силовых возмущений, интерпретируемое как динамическая податливость, зависящая от частоты внешнего силового возмущения. Совокупность значений динамической податливости, определяемой частотой внешнего возмущения, зависит от координат т.H и от коэффициента связности γ внешних силовых возмущений.

Задача заключается в разработке подхода к оценке разнообразия динамических состояний, оцениваемых на основе динамической податливости в зависимости от коэффициента связности внешних силовых возмущений и в зависимости от координат объекта, динамического состояние которого оценивается.

II. Математическая модель. Система дифференциальных уравнений движения твердого тела может быть построена в рамках формализма уравнений Лагранжа 2-ого рода. В качестве обобщённых координат y_1, y_2 рассматриваются смещения тт. A и B относительно положения статического равновесия (рис. 1). Наравне с системой координат y_1, y_2 рассматривается система обобщенных координат φ, z, где φ – угол поворота твердого тела относительно центра тяжести, а z – величина вертикального смещения центра тяжести относительно положения статического равновесия. Потенциальная и кинетическая энергии колебательной системы могут быть выражены в координатах y_1, y_2, φ, z:

$$\Pi = \frac{1}{2}k_1 y_1^{\,2} + \frac{1}{2}k_2 y_2^{\,2}, \tag{1}$$

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}M\dot{z}^2 + \frac{1}{2}J\varphi^2. \tag{2}$$

Используемые системы координат $\{y_1, y_2\}$ и $\{\varphi, z\}$ связаны соотношениями

$$\begin{cases} y = ay_1 + by_2 \\ \varphi = c(y_2 - y_1) \end{cases} \text{и} \begin{cases} y_1 = y - l_1\varphi \\ y_2 = y + l_2\varphi \end{cases}, \tag{3}$$

где $a = \dfrac{l_2}{l_1 + l_2}; b = \dfrac{l_1}{l_1 + l_2}; c = \dfrac{1}{l_1 + l_2}$.

Приведенная к координатам $\{y_1, y_2\}$ на основе известных методов [3] механическая колебательная система (рис. 1) может быть представлена в виде структурной схемы (рис. 2).

Динамические особенности движения твердого тела под действием внешних возмущений могут быть выражены с помощью передаточных отношений системы и межпарциальных связей.

III. Оценка динамических состояний на основе карты динамических инвариантов. На основе структурной схемы (рис. 2) с учетом коэффициента связности γ может быть рассмотрено бесконечное семейство передаточных функции системы вида:

$$W_{11}(p,\gamma)=\left.\frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1}\right|_{\bar{Q}_1\neq 0}=\frac{((Mb^2+Jc^2)p^2+k_2)-\gamma(Mab-Jc^2)p^2}{A(p)}, \quad (4)$$

$$W_{21}(p,\gamma)=\left.\frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_1}\right|_{\bar{Q}_1\neq 0}=\frac{((Ma^2+Jc^2)p^2+k_1)\gamma-(Mab-Jc^2)p^2}{A(p)}, \quad (5)$$

где $A(p)=((Ma^2+Jc^2)p^2+k_1)((Mb^2+Jc^2)p^2+k_2)-((Mab-Jc^2)p^2)^2$ (6)
является характеристическим многочленом с корнями σ_1^2, σ_2^2.

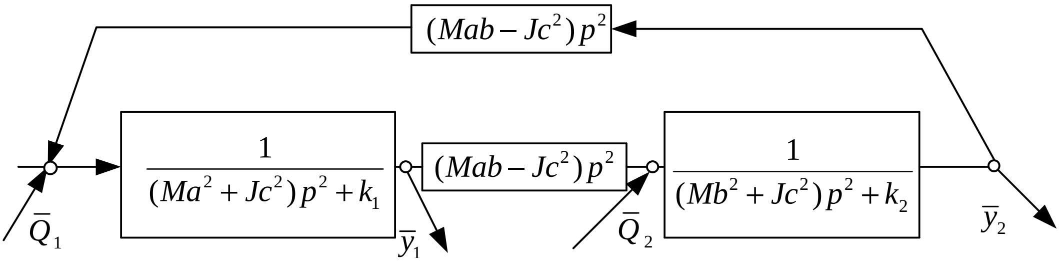

Рис. 2. Структурная схема механической колебательной системы (рис. 1),
$p=j\omega$ – комплексная переменная, $j=\sqrt{-1}$, ω – частота внешнего возмущения,
символ «-» над переменной обозначает изображение Лапласа [5]

С использованием передаточных функций W_{11} и W_{21} для оценки динамических состояний произвольной т.H твердого тела, расположенной на расстоянии h от центра тяжести т.O, может быть построена передаточная функция:

$$W_h(p)=\left.\frac{\bar{y}_h}{\bar{Q}_1}\right|_{\bar{Q}_1\neq 0}, \quad (7)$$

где координата y_h определена с помощью выражения:

$$y_h=(a-hc)y_1+(b+ch)y_2 \quad (8)$$

С учетом смещения y_h передаточная функция (7) принимает вид:

$$W_h(p)\Big|_{\bar{Q}_1=0}=\frac{\bar{y}_h}{\bar{Q}_1}=(a-ch)\frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1}+(b+ch)\frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_1}. \quad (9)$$

Многообразие динамических состояний точек твердого тела для фиксированного коэффициента связности γ может быть оценено на основе, рассматриваемого в зависящего от координаты h, семейства амплитудно-частотных характеристик передаточных функций (9):

$$A_h(\omega,\gamma,h)=\left.\frac{\bar{y}_h}{\bar{Q}_1}(p,\gamma,h)\right|_{p=j\omega}. \quad (10)$$

Зависящее от координаты h бесконечное семейство амплитудно-частотных характеристик может быть разбито на конечную совокупность классов, элементы которых обладают фиксированным числом частот резонанса, режимов обнуления амплитуд колебания, знакоопределенных форм динамического взаимодействия, с помощью частотной функции обнуления, рассматриваемой как функции h:

$$\omega^2(\gamma,h)=\frac{c(k_1\gamma-k_2)h+(bk_1\gamma+ak_2)}{(Mac\gamma-Mbc)h+Jc^2(\gamma+1)}. \qquad (11)$$

Аналитические особенности частотной функции обнуления, рассматриваемой как функции параметра h, определяются в зависимости от значений выражений $c(k_1\gamma\text{-}k_2)$, $(bk_1\gamma+ak_2)$, $Mc(a\gamma+b)$, $Jc^2(\gamma+1)$. Для фиксированного коэффициента связности может быть построено распределение динамических инвариантов по поверхности твердого тела. Характер распределения динамических инвариантов по поверхности твердого тела определяется граничными значениями $h_0(\gamma)$, $h_{кр}(\gamma)$, $h_1(\gamma)$, $h_2(\gamma)$ координаты h, в которых частотная функция соответственно обнуляется, терпит разрыв второго рода и совпадает со значениями собственных частот σ_1^2, σ_2^2:

$$h_0(\gamma)=-\frac{bk_1\gamma+ak_2}{c(k_1\gamma-k_2)}, \qquad (12)$$

$$h_{kp}(\gamma)=-\frac{Jc^2(\gamma+1)}{Mc(a\gamma-b)}, \qquad (13)$$

$$h_1(\gamma)=-\frac{Jc^2(\gamma+1)\sigma_1^2-(bk_1\gamma+ak_2)}{(Mac\gamma-Mbc)\sigma_1^2-c(k_1\gamma-k_2)}, \qquad (14)$$

$$h_2(\gamma)=-\frac{Jc^2(\gamma+1)\sigma_2^2-(bk_1\gamma+ak_2)}{(Mac\gamma-Mbc)\sigma_2^2-c(k_1\gamma-k_2)}. \qquad (15)$$

Взаимное расположение граничных точек $h_0(\gamma)$, $h_{кр}(\gamma)$, $h_1(\gamma)$, $h_2(\gamma)$ на поверхности твердого тела определяет распределение областей, обладающих одинаковыми обобщенными динамическими особенностями. Необходимо отметить, что функции $h_1(\gamma)$, $h_2(\gamma)$, рассматриваемые как функции независимого переменного γ, представляют собой константы.

В свою очередь, формы графиков частотных функций, как функций переменной координаты объекта, динамическое состояние которого оценивается, может изменяться только для значений коэффициента связности γ, в которых обнуляется величина определителя и миноры матрицы, составленной из коэффициентов частотной функции:

$$\begin{vmatrix} c(k_1\gamma-k_2) & bk_1\gamma+ak_2 \\ Mac\gamma-Mbc & Jc^2(\gamma+1)\end{vmatrix}=0, \qquad (16)$$

$$k_1\gamma-k_2=0, \qquad (17)$$

$$bk_1\gamma+ak_2=0, \qquad (18)$$

$$Mc(a\gamma-b)=0, \qquad (19)$$

$$Jc^2(\gamma+1)=0. \qquad (20).$$

В предположении, что $b/a < k_2/k_1$ может быть построено разбиение плоскости, заданной осями коэффициента связности γ и координаты h, на множества, в виде областей, кривых и узлов, в которых динамические инварианты податливости, отображающие существенные особенности динамических взаимодействий элементов механической колебательной системы, сохраняют свои значения неизменными (рис. 3).

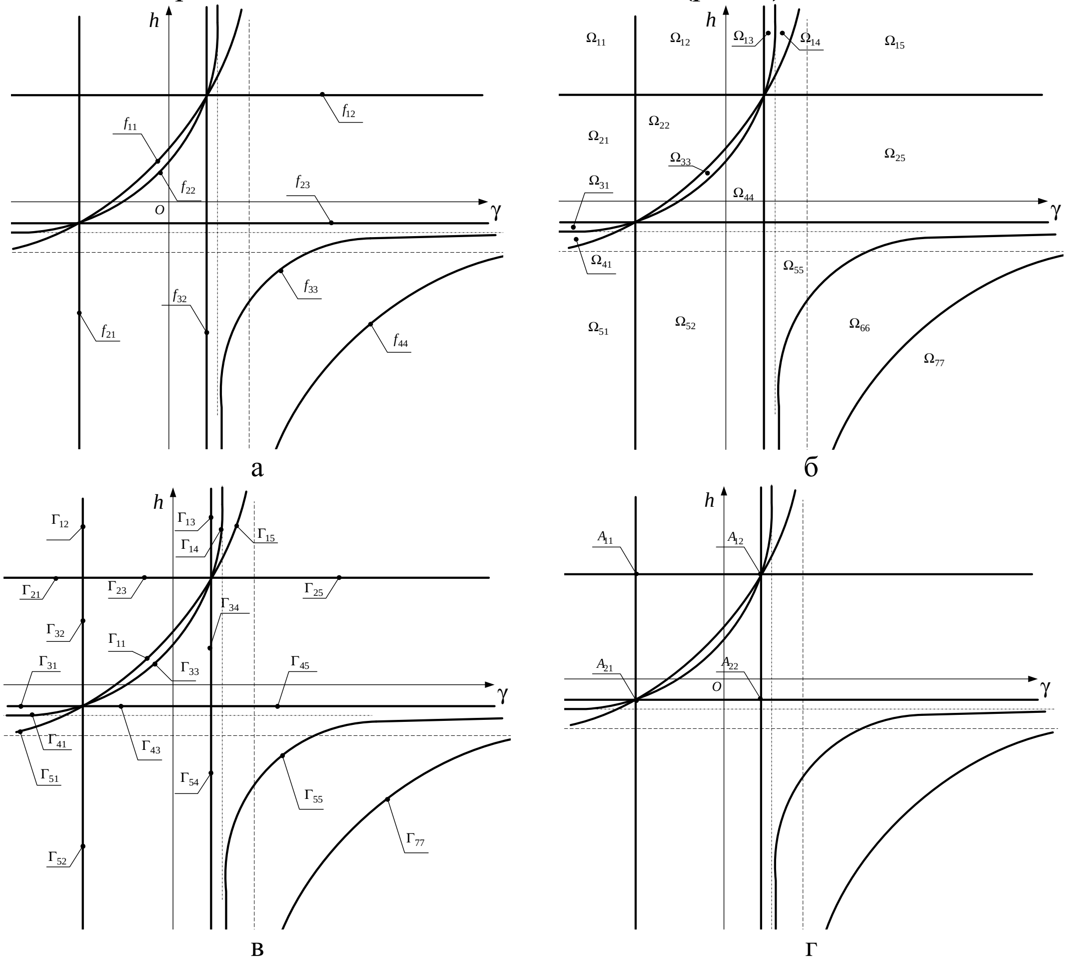

Рис. 3. Карта динамических инвариантов: (а) – графики функций, определяющие разбиение, (б) – области разбиения Ω_{ij}, (*в*) – границы разбиения Γ_{ij}, (*г*) – узловые точки A_{ij}

Карта динамических инвариантов (рис. 3) содержит области $\{\Omega_{ij}\}$, границы $\{\Gamma_{ij}\}$ и узлы $\{A_{ij}\}$, в которых динамические инварианты, отображающие существенные особенности взаимодействия элементов механических колебательных систем, сохраняют свои значения. Можно полагать, что в части элементов разбиения динамические инварианты сохраняют свои значения и скачкообразно изменяются при переходе из одного множества в другое.

Заключение. Для механической колебательной системы, образованной твердым телом, разработан подход для оценки динамических особенностей, выражаемых с помощью количества резонансов, режимов обнуления амплитуд колебания и форм динамических взаимодействий, учитывающий влияние на систему коэффициента связности и координаты точки, динамическое состояние которой оценивается на основе динамической податливости в условиях связных возмущения силовой природы. Для оценки разнообразия динамических состояний, отображаемых с помощью динамических инвариантов, предложено использование так называемой карты динамических инвариантов, представляющей собою разбиение плоскости, образованной осями коэффициента связности и координаты объекта, динамическое состояние которого оценивается, и состоящей из множеств в виде областей, границ и узлов, непересекающихся между собой, на которых динамические инварианты остаются неизменными.

Список литературы

1. Piersol, A. and Paez, T. Harris' Shock and Vibration Handbook. – Mcgraw-Hill, 2009. – 1168 p.
2. Clarence W. de Silva. Vibration. Fundamentals and Practice. – Boca Raton: CRC Press, 2006. – 1064 p.
3. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control. – Springer International Publishing, Cham, 2020. – Vol. 252. – 521 p.
4. Елисеев А.В., Кузнецов Н.К., Николаев А.В. Концепция динамических инвариантов в оценке структурных особенностей механических колебательных систем // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. – 2022. – №15. – С. 18-30.
5. Лурье А.И. Операционное исчисление и применение в технических приложениях. – М.: Наука. 1959. – 368 с.

References

1. Piersol, A. and Paez, T. Harris' Shock and Vibration Handbook. – Mcgraw-Hill, 2009. – 1168 p.
2. Clarence W. de Silva. Vibration. Fundamentals and Practice. – Boca Raton: CRC Press, 2006. – 1064 p.
3. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control. – Springer International Publishing, Cham, 2020. – Vol. 252. – 521 p.
4. Eliseev A.V., Kuznetsov N.K., Nikolaev A.V. The concept of dynamic invariants in the evaluation of structural features of mechanical oscillatory systems // Transport, mining and construction engineering: science and production. 2022, no.15, pp. 18-30.
5. Lurie, A.I. Operational calculus and application in technical applications. – M.: Science, 1959. – 368 p.

Елисеев Андрей Владимирович – кандидат технических наук, доцент кафедры математики	**Eliseev Andrey Vladimirovich** – candidate of technical sciences, associate professor of Department of mathematics
Миронов Артем Сергеевич – соискатель	**Mironov Artem Sergeevich** – applicant
eavsh@ya.ru	

Received 04.11.2022