https://doi.org/10.26160/2474-5901-2022-32-56-61

ИЗМЕНЕНИЕ ТИПА ЛОКАЛИЗАЦИИ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ ЧИСТОМ СДВИГЕ ПОД ГИДРОСТАТИЧЕСКИМ ДАВЛЕНИЕМ ВСЛЕДСТВИЕ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ

Шарипова Л.Л.
Институт проблем машиноведения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия

Ключевые слова: фазовые переходы, чистый сдвиг под гидростатическим давлением, зоны фазовых переходов.
Аннотация. В данном подходе фазовые границы в упругих телах рассматриваются как поверхности разрыва деформаций. На равновесной границе в дополнение к обычным условиям непрерывности перемещений и напряжений ставится дополнительное термодинамическое условие. Деформации, которые могут сосуществовать на равновесной границе, образуют зону фазовых переходов (ЗФП). Граница зон фазовых переходов играет роль поверхности пластичности в пространстве деформаций. В работе с помощью зон фазовых переходов исследуется изменение типа локализации деформаций при чистом сдвиге под гидростатическим давлением вследствие фазового перехода.

CHANGE OF TYPE OF STRAIN LOCALIZATION OF PURE SHEAR UNDER HYDROSTATIC PRESSURE DUE TO PHASE TRANSITION

Sharipova L.L.
Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Science, Saint-Petersburg, Russia

Keywords: phase transitions, pure shear under hydrostatic pressure, phase transition zones.
Abstract. In present approach phase boundaries in elastic solids are considered as surfaces across which the deformation gradient suffers a jump. On the equilibrium interface a thermodynamic condition has to be put in addition to conventional displacement and traction continuity conditions. The deformations which can coexist on the equilibrium interface form the phase transition zone (PTZ). The PTZ boundary acts as a yield surface in a strain space. In the paper with the help of PTZ we investigate change of strain localization of pure shear under hydrostatic pressure due to phase transition.

Введение

В нашем описании фазовых переходов используется следующие идеи:

– фазовые границы рассматриваются как поверхности разрыва при непрерывном поле перемещений;

– на равновесной фазовой границе в дополнение к условиям непрерывности перемещений и напряжений ставится термодинамическое условие [1-6], которое служит дополнительным ограничением на возможные разрывные решения;

– равновесные фазовые границы могут существовать не в любом материале, что приводит к ограничениям на определяющие соотношения; двухфазные деформации могут существовать только в материалах с невыпуклой энергией деформации [7];

– система равновесных уравнений на фазовой границе может быть удовлетворена не при всех деформациях и не при всех нормалях к фазовой границе, этот факт ведет к концепции зон фазовых переходов [7-10].

Определение. Зона фазовых переходов (ЗФП) – область в пространстве деформаций, деформации из которой могут сосуществовать на равновесной границе фаз.

Важность построения ЗФП состоит в следующем:

– деформации вне ЗФП не могут существовать на равновесной границе ни при каких условиях нагружения. Граница ЗФП определяется исключительно свойствами материала и играет роль фазовой диаграммы или поверхности превращения в пространстве деформаций;

– с одной стороны, различные точки ЗФП связаны с различными деформационными состояниями, с другой стороны, различные точки границы ЗФП соответствуют различной ориентации фазовой границы по отношению к тензору деформаций и различным скачкам деформаций [7-10].

Таким образом, построение ЗФП означает исследование деформационного состояния на тип локализации деформаций вследствие фазовых превращений. В работе с помощью девиаторных сечений зон фазовых переходов исследуется изменение типа локализации деформаций при чистом сдвиге под давлением.

1. Равновесные двухфазные деформации в случае малых деформаций

Учитывая [7, 11, 12] в случае малых деформаций, задача о равновесных двухфазных конфигурациях упругого тела сводится к задаче определения поверхности раздела фаз $\boldsymbol{\Gamma}$ и соответствующего поля перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ достаточно гладкого при $\mathbf{x} \notin \Gamma$, непрерывного на $\boldsymbol{\Gamma}$ и удовлетворяющего граничным условиям и условиям равновесия:

$$\mathbf{x} \notin \Gamma: \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, \ \theta = const , \tag{1}$$

$$\mathbf{x} \in \Gamma: \qquad [\mathbf{u}] = 0, \tag{2}$$

$$[\boldsymbol{\sigma}] \cdot \mathbf{n} = 0, \tag{3}$$

$$[f] - \boldsymbol{\sigma} : [\boldsymbol{\varepsilon}] = 0, \tag{4}$$

где $\mathbf{x}$ – точка тела, объемная плотность свободной энергии f моделируется квадратичными зависимостями [7]:

$$\begin{gathered} f(\boldsymbol{\varepsilon}, \theta) = \min_{-,+}\{ f^-(\boldsymbol{\varepsilon}, \theta), f^+(\boldsymbol{\varepsilon}, \theta)\}, \\ f^\pm(\boldsymbol{\varepsilon}, \theta) = f_0^\pm(\theta) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_\pm^p) : \mathbf{C}_\pm : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_\pm^p). \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор деформаций, $\boldsymbol{\sigma} = \partial f / \partial \boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор напряжений, θ – температура, $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к границе $\boldsymbol{\Gamma}$, «+» и «-» обозначают материал в различных фазовых состояниях, квадратными скобками обозначено изменение величины при переходе от фазы «-» к фазе «+». $\mathbf{C}_\pm$ – тензоры модулей упругости фаз, параметры $f_\pm^0$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_\pm^p$ – плотности свободной энергии и тензор деформаций в ненапряженном состоянии. Если $\boldsymbol{\varepsilon}_{+}^{p}=0$, то $[\boldsymbol{\varepsilon}^{p}]\equiv\boldsymbol{\varepsilon}^{p}$ – тензор деформации при гипотетическом фазовом переходе из одного однородного ненапряженного состояния в другое – «собственная деформация превращения». Массовые силы, термоупругие напряжения и поверхностная энергия не учитываются. Если $\mathbf{C}_{\pm}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_{\pm}^{p}$ не зависят от температуры, то параметр $\gamma(\theta)=[f_0]$ играет роль температуры.

Условия (1)-(3) – это обычные равновесные условия для составного тела. Дополнительное термодинамическое условие равновесия (4) связано с дополнительной степенью свободы, порождаемое неизвестной фазовой границей и следует из условия равновесия фаз нелинейно-упругого тела полученных, например, в [1-6].

Зависимостям (5) соответствуют определяющие соотношения линейной теории упругости неоднородной среды:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\pm}(\boldsymbol{\varepsilon})=\mathbf{C}_{\pm}:(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}_{\pm}^{p}). \tag{6}$$

Используя (2) и (3), можно выразить скачки в деформациях или напряжениях через фазовую границу в виде [7]:

$$\begin{gathered}[\boldsymbol{\varepsilon}]=\mathbf{K}_{\mp}(\mathbf{n}):\mathbf{q}_{\pm},\quad \mathbf{q}_{\pm}=-\mathbf{C}_1:\boldsymbol{\varepsilon}_{\pm}+[\mathbf{C}:\boldsymbol{\varepsilon}^{p}],\\ \mathbf{K}_{\pm}(\mathbf{n})=\{\mathbf{n}\otimes\mathbf{G}_{\pm}\otimes\mathbf{n}\}^{s},\quad \mathbf{G}_{\pm}=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{n})^{-1},\quad \mathbf{C}_1=\mathbf{C}_{+}-\mathbf{C}_{-},\end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered}[\boldsymbol{\sigma}]=\mathbf{S}_{\mp}(\mathbf{n}):\mathbf{m}_{\pm},\quad \mathbf{m}_{\pm}=-\mathbf{B}_1:\boldsymbol{\sigma}_{\pm}+[\boldsymbol{\varepsilon}^{p}],\\ \mathbf{S}_{\pm}(\mathbf{n})=\mathbf{C}_{\pm}:\mathbf{K}_{\pm}:\mathbf{C}_{\pm}-\mathbf{C}_{\pm},\quad \mathbf{B}_1=\mathbf{B}_{+}-\mathbf{B}_{-},\quad \mathbf{B}=\mathbf{C}^{-1}.\end{gathered} \tag{8}$$

Знак s означает симметризацию: $K_{ijkl}=n_{(i}G_{j)(k}n_{l)}$. Заметим, что тензор $\mathbf{q}$ может быть ассоциирован с тензором дислокационных моментов, индуцированных новой фазой [13].

Подставляя (5)-(7) в (4) получаем, что термодинамическое условие приводится к виду

$$2\gamma+[\boldsymbol{\varepsilon}^{p}:\mathbf{C}:\boldsymbol{\varepsilon}^{p}]+\boldsymbol{\varepsilon}_{\pm}:\mathbf{C}_1:\boldsymbol{\varepsilon}_{\pm}-2\boldsymbol{\varepsilon}_{\pm}:[\mathbf{C}:\boldsymbol{\varepsilon}^{p}]\pm\mathbf{q}_{\pm}:\mathbf{K}_{\mp}(\mathbf{n}):\mathbf{q}_{\pm}=0. \tag{9}$$

Таким образом, система уравнений расщепилась. При заданном γ любое из двух уравнений (9) определяет однопараметрическое семейство единичных нормалей зависящих от деформаций по одну из сторон границы («+» или «-»). Деформации на другой стороне границы могут быть посчитаны по формулам (7). Деформации, для которых уравнение (9) может быть разрешено для единичной нормали, образуют *зону фазовых переходов* [7-10].

2. Девиаторные сечения зон фазовых переходов. Влияние гидростатического давления на изменение типа локализации деформаций вследствие фазового перехода

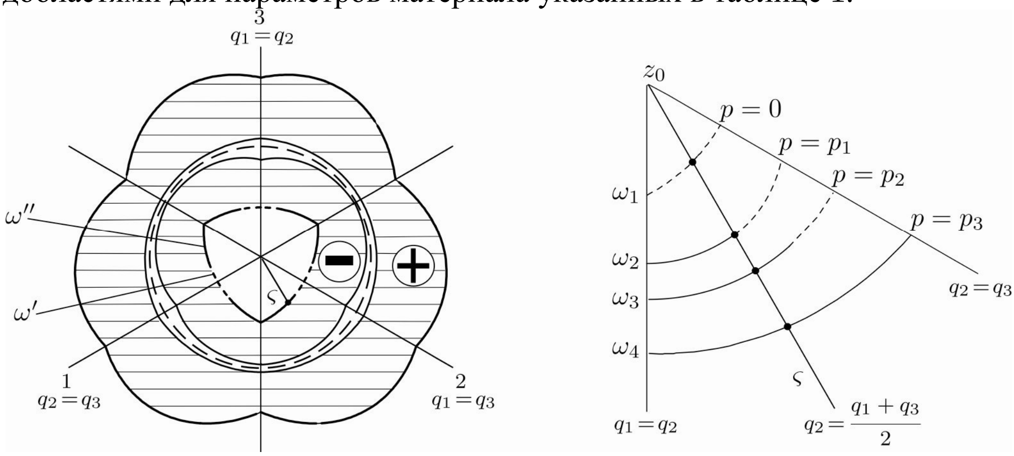
Предполагаем, что обе фазы изотропные:

$$\mathbf{C}_{\pm}=\lambda_{\pm}\mathbf{EE}+2\mu_{\pm}\mathbf{I},\quad \boldsymbol{\varepsilon}_{+}^{p}=\frac{\vartheta^{p}}{3}\mathbf{E},\quad \boldsymbol{\varepsilon}_{-}^{p}=0,$$

$$\mathbf{K}^{\pm}(\mathbf{n}) = \frac{1}{\mu_{\pm}}(\mathbf{nEn})^{s} - \frac{1}{2\mu_{\pm}(1-\nu_{\pm})}\mathbf{nnnn},$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{I}$ – единичные тензоры второго и четвертого ранга, соответственно, λ и μ – коэффициенты Ляме, ν – коэффициент Пуассона, $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ – объемный модуль сжатия.

На рисунке 1 представлен пример изменения типа локализации деформаций на эксперименте чистого сдвига под гидростатическим давлением ($\varepsilon_1 = \frac{\vartheta_0}{3} + \varepsilon, \varepsilon_3 = \frac{\vartheta_0}{3} - \varepsilon, \vartheta_0 = -\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{K}_-}, \sigma_2 = 0$). Соответствующие деформационные пути (линия ς на рис. 1) лежат в различных девиаторных сечениях зон фазовых переходов в зависимости от значений давления. Зоны фазовых переходов на рисунке 1(a) показаны заштрихованными подобластями для параметров материала указанных в таблице 1.



a b

Рис. 1. Сечение зон фазовых переходов плоскостью $\mathrm{tr}\,\mathbf{q} = \mathrm{const}$ и деформационный путь чистого сдвига (линия ς): (a) $\mathrm{p} = \mathrm{p}_1$, (b) – различные внешние границы фазовых переходов подзоны «-» для различных значений давления $\mathrm{p}_3 > \mathrm{p}_2 > \mathrm{p}_1 > 0$

Табл. 1. Параметры материала

Рис.	K_+	K_-	μ_+	μ_-	ϑ^p	γ
1	39	78	15	30	0,1	0.5

Сплошные линии соответствуют границам фаз с нормалью, совпадающей с главным направлением тензора $\mathbf{q}$ (например, если $q_1 > q_2 > q_3$, то $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$, линии ω''), мелкие пунктирные линии – нормаль лежит в главной плоскости тензора $\mathbf{q}$ (линии ω'), широкая пунктирная линия соответствует поверхности разрыва деформаций. На рисунке 1(a) девиаторное сечение и деформационный путь представлены для давления $\mathrm{p} = \mathrm{p}_1 > 0$. На рисунке 1(b) внешние границы зон фазовых переходов подзон «-» и деформационный путь ς показаны для различных значений давления. Видно, что если давление меняется, тип фазовой границы также меняется: при $p = 0$ нормаль совпадает с главным направлением тензора $\mathbf{q}$ - $\mathbf{e}_1$, в то время как при $p = p_2 > p_1$ нормаль к фазовой границе лежит в плоскости векторов $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$. Отметим, что соответствующие скачки деформаций не лежат в той же самой девиаторной плоскости.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 121112500318-1).

Список литературы

1. Гринфельд М.А. Об условиях термодинамического равновесия фаз нелинейно-упругого материала // Доклады Академии Наук СССР. – 1980. – Т. 251, №4. – С. 824-827.
2. Гринфельд М.А. Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений. – М.: Наука, 1990. – 312 с.
3. Кондауров В.И., Никитин Л.В. О фазовых переходах первого рода в нелинейно-упругих средах // Доклады Академии Наук СССР. – 1982. – Т. 262, №6. – С. 1348-1351.
4. Трускиновский Л.М. Равновесные межфазные границы // Доклады Академии Наук СССР. – 1982. – Т. 265, №2. – С. 306-310.
5. Gurtin M.E. Two-phase deformations of elastic solids// Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1983, vol. 84, pp. 1-20.
6. James R.D. Finite deformation by mechanical twinning // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1981, vol.77, pp. 143-177.
7. Фрейдин А.Б. Приближении малых деформаций в теории фазовых превращений при деформировании упругих тел // Прочность и разрушение материалов и конструкций. Межвузовский сборник под ред. Н.Ф. Морозова. (Исследования по упругости и пластичности). – СПб.: Изд-во СПб. ун-та, 1999. – Вып. 18. – С. 266-290.
8. Freidin A.B., Vilchevskay E.N. and Sharipova L.L. Two-phase deformations within the framework of phase transition zones // Theoretical and Apllied Mechanics. 2002, no. 28-29, pp. 149-172.
9. Фрейдин А.Б., Шарипова Л.Л.. Равновесные двухфазные деформации и зоны фазовых переходов в приближении малых деформаций // Известия ВУЗов Северо-Кавказского региона. Серия Естественные науки. Спец. выпуск «Нелинейные проблемы механики сплошных сред». – 2003. – С. 267-274.
10. Фрейдин А.Б., Вильчевская Е.Н., Шарипова Л.Л. Двухфазные деформации упругих тел // Труды Лобачевского центра математики, Т. 22. Модели в сплошной среде. Лекции XVII сессии международной школы моделей в сплошной среде. – Казань: Изд-во Казанского математического общества, 2004. – С. 162-200.
11. Кубланов Л.Б., Фрейдин А.Б. Зародыши твердой фазы в деформируемом материале // Прикладная математика и механика. – 1988. – Т. 52, Вып. 3. – С. 493-501.

12. Назыров И.Р., Фрейдин А.Б. Фазовые превращения при деформировании твердых тел в модельной задаче об упругом шаре // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1998. – №5. – С. 52-71.
13. Kunin I.A. Elastic Media with Microstructure II. Springer-Verlag, Berlin, New-York, etc. 1983, 278 p.

References

1. Grinfeld M.A. On conditions of thermodynamic equilibrium of the phases of a nonlinear elastic material // Reports of the USSR Academy of Sciences. 1980, vol. 251, pp. 824-827.
2. Grinfeld M.A. Methods of Continuum Mechanics in the Theory of Phase Transitions. – M.: Science, 1990. – 312 p.
3. Kondaurov V.I., Nikitin L.V. Phase transformations of the first kind in nonlinear elastic media // Reports of the USSR Academy of Sciences. 1982, vol. 262, no. 6, pp. 1348-1351.
4. Truskinovsky L. Equilibrium interphase boundaries // Reports of the USSR Academy of Sciences. 1982, vol. 265, pp.306-310.
5. Gurtin M.E. Two-phase deformations of elastic solids // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1983, vol. 84, pp. 1-20.
6. James R.D. Finite deformation by mechanical twinning // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1981, vol. 77, pp. 143-177.
7. Freidin A.B. Small strains approach in the theory of strain induced phase transformations. Strength and fracture of materials, studies on elasticity and plasticity. – SPb.: Publ. house of SPb. un-ty, 1999. – Vol. 18. – P. 266-290.
8. Freidin A.B., Vilchevskay E.N. and Sharipova L.L. Two-phase deformations within the framework of phase transition zones // Theoretical and Apllied Mechanics. 2002, no. 28-29, pp. 149-172.
9. Freidin A.B., Sharipova L.L. Equilibrium two-phase deformations and phase transition zones in a small strain approach // News of universities of the North Caucasus region (Notices of Universities. South of Russia. Natural Sciences) Nonlinear Problems of Continuum Mecahnics 2nd special issue. – 2003. – P. 267-274.
10. Freidin A.B., Vilchevskaya E.N., Sharipova L.L. Two-phase deformations of solids // Proc. of the Lobachevskii centre of Mathematics, Vol. 22. Models in Continuum Mechanics. The lections of XVII session of the International school of models in continuum mechanics. – Kazan, 2004. – P. 162-200.
11. Kublanov L.B., Freidin A.B. Solid phase seeds in a deformable material // Applied Mathematics and Mechanics. 1988, vol. 52, pp. 493-501.
12. Nazyrov R., Freidin A.B. Phase transformations of deformable solids in a model problem on an elastic sphere // News of the RAS. Mechanics of Solids. 1998, vol. 33, pp. 52-71.
13. Kunin I.A. Elastic Media with Microstructure II. Springer-Verlag, Berlin, New-York, etc. 1983, 278 p.

Шарипова Лия Львовна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник	**Sharipova Leah Lvovna** – candidate of physics and mathematics sciences, senior researcher
sleah07@gmail.com	

Received 03.11.2022