https://doi.org/10.26160/2474-5901-2022-29-46-53

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГЕНЕТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ

Филимонов А.Б.[1], Филимонов Н.Б.[2]

[1]МИРЭА – Российский технологический университет; Московский авиационный институт (НИУ), Москва, Россия;

[2]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова; Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

Ключевые слова: линейная задача быстродействия, метод пристрелки, промах, норма невязки, нелинейное программирование, генетический алгоритм.

Аннотация. Обсуждается линейная задача предельного быстродействия для динамических объектов управления со скалярным входом. Посредством принципа максимума Понтрягина определяется структура экстремальных управлений и далее используется метод пристрелки, причем процедура поиска пристрелочных параметров формализуется как задача нелинейного программирования, для решения которой применяется генетический алгоритм.

A METHOD FOR SOLVING A LINEAR PROBLEM OF THE TIME-OPTIMAL CONTROL USING GENETIC ALGORITHMS

Filimonov A.B.[1], Filimonov N.B.[2]

[1]MIREA - Russian Technological University; Moscow Aviation Institute (NRU); Moscow, Russia;

[2]Lomonosov Moscow State University; Trapeznikov Institute of Control Problems of RAS, Moscow, Russia

Keywords: linear problem time-optimal control, targeting method, miss, discrepancy rate, nonlinear programming, genetic algorithm.

Abstract. The linear problem of time-optimal control for dynamic control objects with scalar input is discussed. By means of the Pontryagin maximum principle, the structure of optimal controls is determined and then the method of targeting is used. Procedure for searching for targeting parameters is formalized as a nonlinear programming problem, for which a genetic algorithm is used.

В современной теории оптимального управления одно из центральных мест занимает задача предельного быстродействия, для решения которой наибольшее применение получил принцип максимума Л.С. Понтрягина [1]. Основная трудность решения данной задачи заключается в нахождении начальных условий для сопряженной системы относительно вспомогательного вектора. Ввиду невозможности аналитического решения задачи предложен целый ряд численных итерационных методов нахождения оптимального управления, обладающих определенными достоинствами и недостатками (см., например, [2-6]). В связи с этим актуальна разработка новых численных методов решения задачи оптимального быстродействия, обладающих малой вычислительной трудоемкостью. В настоящей работе предлагается численное решение линейной задачи оптимального быстродействия, основанное на использовании метода пристрелки и генетического алгоритма.

Постановка задачи

Рассмотрим класс линейных стационарных объектов управления со скалярными входом, динамика состояния которых описывается уравнением вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \tag{1}$$

где $t \geq 0$, $\mathbf{x} \in X = \mathbf{R}^n$ – состояние, X – пространство состояний; $u \in \mathbf{R}$ – скалярный управляющих вход; $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^{n\times 1}$ – коэффициентные матрицы.

Полагаем, что пара матриц $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ управляема.

Предполагается, что управление ограничено по модулю:

$$u \in U, \tag{2}$$

где U – область допустимых управлений, причем $(M > 0)$:

$$U = [-M, +M]. \tag{3}$$

Допустимыми считаем управляющие воздействия $u(t)$, удовлетворяющие ограничению (2) и являющиеся кусочно-непрерывными функциями времени.

Обозначим через $\mathcal{U}_T$ множество всех допустимых управляющих воздействий на временном отрезке $[0, T]$, а через $X_c \subset X$ множество *управляемых* состояний объекта – каждое из них может быть переведено некоторым допустимым управляющим воздействием в начало координат.

Рассмотрим следующую задачу оптимального по быстродействию управления: требуется объект управления (1) за минимально возможное время T перевести из заданного возмущенного начального состояния $\mathbf{x}_0 \in X_c$ в целевое конечное состояние $\mathbf{x}_F^* = 0$ – начало координат пространства состояний X.

Таким образом, для объекта управления (1) ставится экстремальная задача вида

$$T \to \min \tag{4}$$

с граничными (начальным и конечным) условиями:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \tag{5}$$

$$\mathbf{x}(T) = 0, \tag{6}$$

Введем следующие обозначения: T^* – время быстродействия, т.е. время окончания процесса управления объектом, $u^*(t)$ – оптимальное управление, $\mathbf{x}^*(t)$ – отвечающая ему фазовая траектория объекта.

Особенности применение принципа максимума Понтрягина

Обсудим способ решения поставленной оптимизационной задачи посредством принципа максимума Понтрягина [1]. Прежде всего, отметим, что она формализуется как задача Лагранжа

$$I = \int_0^T L dt \to \min,$$

где $L \equiv 1$.

Функция Гамильтона для данной задачи

$$H(\boldsymbol{\psi},\mathbf{x},u)=-L+\langle\boldsymbol{\psi},\mathbf{Ax}+\mathbf{b}u\rangle. \qquad (7)$$

Здесь угловые скобки $\langle\cdot,\cdot\rangle$ означают скалярное произведение векторов.

Уравнение, сопряженное уравнению (1):

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}=-\frac{\partial H}{\partial\mathbf{x}}.$$

Согласно (7), оно является линейным:

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}=-\mathbf{A}'\boldsymbol{\psi}. \qquad (8)$$

Здесь и далее штрих означает транспонирование матрицы/вектора.

Решение уравнения (8):

$$\boldsymbol{\psi}(t)=e^{-\mathbf{A}'t}\boldsymbol{\psi}(0). \qquad (9)$$

Согласно принципу максимума в точках непрерывности управления гамильтониан должен принимать максимальное значение:

$$\max_{u\in U}H(\boldsymbol{\psi},\mathbf{x}^*,u)=H(\boldsymbol{\psi},\mathbf{x}^*,u^*).$$

Отсюда с учетом выражения (7) следует

$$u(t)=\arg\max_{u\in U}\langle\boldsymbol{\psi}(t),\mathbf{b}u\rangle. \qquad (10)$$

Из (10) с учетом (2), (3) получаем допустимое управление

$$u(t)=M\,\mathrm{sign}\langle\boldsymbol{\psi}(t),\mathbf{b}\rangle. \qquad (11)$$

Управление $u(t)$ вида (11) будем называть *экстремальным* и соответствующую траекторию $\mathbf{x}(t)$ – *экстремальной*.

Подставляя функцию (10) в дифференциальное уравнение (1) и принимая во внимание начальное условие (5), получаем задачу Коши относительно неизвестной функции $\mathbf{x}(t)$. В итоге искомое решение задачи оптимального управления сводится к нахождению подходящего начального значения вектора сопряженных переменных $\boldsymbol{\psi}(0)$ – соответствующая задача Коши должна приводить к граничному условию (6).

Задача максимизации скалярного выхода

Выберем некоторую вектор-строку $\mathbf{c}\in\mathbf{R}^{1\times n}$ и введем вспомогательную выходную переменную

$$y=\mathbf{cx}. \qquad (12)$$

Обозначим через $\mathcal{K}_y(t)$ импульсную переходную характеристику объекта (1), (12) по каналу «вход u – выход y». Справедливо равенство

$$\mathcal{K}_y(t)=\mathbf{c}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{b}. \qquad (13)$$

Терминальное значение выхода $y(T)$ при действии на объект управляющего воздействия $u(t)$ определяется интегралом

$$y(T)=\int_0^T\mathcal{K}_y(T-t)u(t)dt.$$

Рассмотрим задачу максимизации данной величины:

$$y(T) \to \max \tag{14}$$

при $u(t) \in \mathcal{U}_T$. Ее решение очевидно:

$$u(t) = M \operatorname{sign} \mathcal{K}_y(T - t)\,. \tag{15}$$

Нетрудно убедиться, что данное выражение совпадает с (11) при подстановке выражения

$$\boldsymbol{\psi}(0) = e^{\mathbf{A}'T}\mathbf{c}'$$

в (9).

Таким образом, экстремальные управления можно формировать посредством соотношений (13) и (15). Более того, решение задачи (14) не изменится при умножении вектора $\mathbf{c}$ на скаляр, т.е. можно полагать, что $\mathbf{c}$ – вектор с единичной евклидовой нормой:

$$\|\mathbf{c}\| = 1\,. \tag{16}$$

Метод пристрелки

Одним из наиболее популярных методов решения задачи оптимального управления является метод пристрелки в начало координат [7].

Метод *пристрелки* (методом стрельбы) – численный метод решения краевой задачи для системы дифференциальных уравнений (ДУ), заключающийся в ее сведении к задаче Коши с заданием недостающих начальных условий – так называемых, *пристрелочных параметров* [8]. В конце численного интегрирования системы ДУ получаются невязки, т.е. несоответствия между заданными и фактическими краевыми условиями на правом конце. Заметим, что в классических схемах пристрелки подбор точных значений параметров пристрелки осуществляется с помощью решения системы нелинейных алгебраических уравнений [9, 10].

Сведем поставленную задачу поиска оптимального решения к задаче нелинейного программирования с применением метода пристрелки.

За параметры пристрелки примем $\mathbf{c}$ и T.

Под *невязкой* будем иметь ввиду отклонение концевой точки фазовой траектории $\mathbf{x}(T)$ от целевого положения:

$$\mathbf{x}(T) - \mathbf{x}_F^* = \mathbf{x}(T)\,.$$

В предлагаемом алгоритме вводится *промах* – евклидова норма невязки:

$$E = \| \mathbf{x}(T) - \mathbf{x}_F^* \|\,.$$

Невязка зависит от пристрелочных параметров.

В итоге необходимо решить задачу векторной оптимизации

$$T \to \min\,, \; E = E(\mathbf{c}, T) \to \min \tag{17}$$

с ограничивающим условием (16).

Очевидно, что данная задача не принадлежит классу задач математического программирования – последние должны содержать всегда только одну целевую функцию. Сведем ее к задаче математического программирования.

В качестве целевой функции выберем мультипликативную свертку критериев (17):

$$F(\mathbf{c},T)=T\cdot E(\mathbf{c},T)\to\min \qquad (18)$$

и также наложим ограничения на критерий T:

$$\underline{T}\le T\le\overline{T}. \qquad (19)$$

Здесь $\underline{T},\overline{T}>0$ - соответственно нижняя и верхняя оценки критерия T.

Нетрудно убедиться, что в силу наличия ограничения критерия T снизу оптимизационная задача (18) эквивалентна оптимизационной задаче (17), причем минимальное значение F^* критерия (18) заранее известно и равно нулю:

$$F^*=0.$$

Для решения оптимизационной задачи (18), (16), (19) предлагается применять генетические алгоритмы. При этом величины $\underline{T}$, $\overline{T}$ могут быть получены априори, исходя из дополнительных эвристических соображений, либо экспериментально с пробными прогонами генетическим алгоритмом.

Пример

Имеем объект порядка $n=3$, описываемый уравнениями

$$T_1\dot{x}_1=-x_1+u,$$

$$T_2\dot{x}_2=x_1-x_2,$$

$$T_3\dot{x}_3=x_2-x_3.$$

Таким образом, $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ x_3)'$,

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1/T_1 & 0 & 0\\ 1/T_2 & -1/T_2 & 0\\ 0 & 1/T_3 & -1/T_3\end{bmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{bmatrix}1/T_1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}.$$

Далее полагаем $T_1=1$, $T_2=1.25$, $T_3=2$, $M=1$.

Решим задачу оптимального быстродействия для начального состояния $\mathbf{x}_0=(2,2,2)'$.

Примем следующие граничные оценки времени успокоения объекта $\underline{T}=4$, $\overline{T}=6$.

Приведем фрагменты программы решения поставленной оптимизационной задачи на языке MATLAB.

Два фрагмента головной программы:

```
global n xG x0
n=3;
xG=zeros(1,n);
x0=[2,2,2];

……………………………………………………………………

options=optimoptions('ga','PopulationSize',300,...
                        'Generations',100);
Tlb=4; Tub=6;
```

```
clb=-ones(1,n); cub=ones(1,n);
lb=[clb Tlb];
ub=[cub Tub];
[z,fval]=ga(@fun,n+1,[],[],[],[],lb,ub,@nonlcon,options);
copt=z(1:n)
Topt=z(n+1)
```

Файл-функция `fun.m` вычисляет значения целевой функции (18):

```
function F=fun(z)
global n xG
c=z(1:n);
T=z(n+1);
[xF,x,u,t]=trajectory(c,T);
E=norm(xG-xF);
F=T*E;
end
```

Здесь `trajectory(c,T)` – файл-функция, вычисляющая фазовую траекторию объекта для экстремального управления, определяемого равенствами (13) и (15), причем используется пакет расширения Control System Toolbox.

Файл-функция `nonlcon.m` программирует нелинейное ограничение (16):

```
function [con,coneq]=nonlcon(z)
global n
con=[];
c=z(1:n);
coneq=norm(c)-1;
end
```

Смысл применяемых в программе идентификаторов поясняет следующая таблица:

Исходные математические символы	Идентификаторы
$\mathbf{x}_F^*$, $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}(T)$	`xG, x0, xF`
$(\mathbf{c},T)$	`z`
$\underline{T}$, $\overline{T}$	`Tlb, Tub`

Результаты решения задачи:

Topt = 5.7700,

copt = -0.1852 0.5892 -0.7865.

Величина промаха равна E = 0.0025, т.е. можно говорить об успешном решении задачи оптимального управления.

На рисунке 1 приведен график полученного оптимального управляющего воздействия $u^*(t)$. На рисунке 2 представлены графики изменения во времени координат оптимальной фазовой траектории $\mathbf{x}^*(t)$.

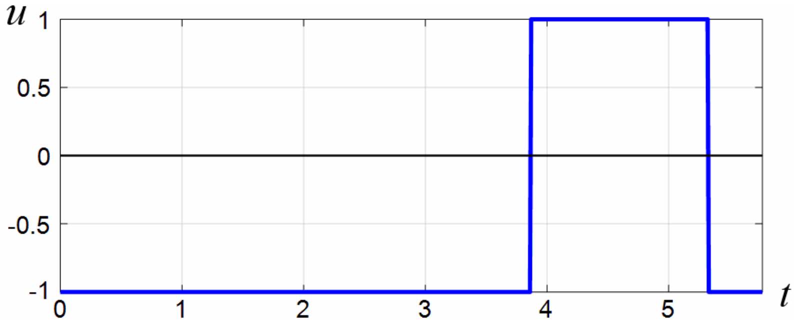

Рис. 1

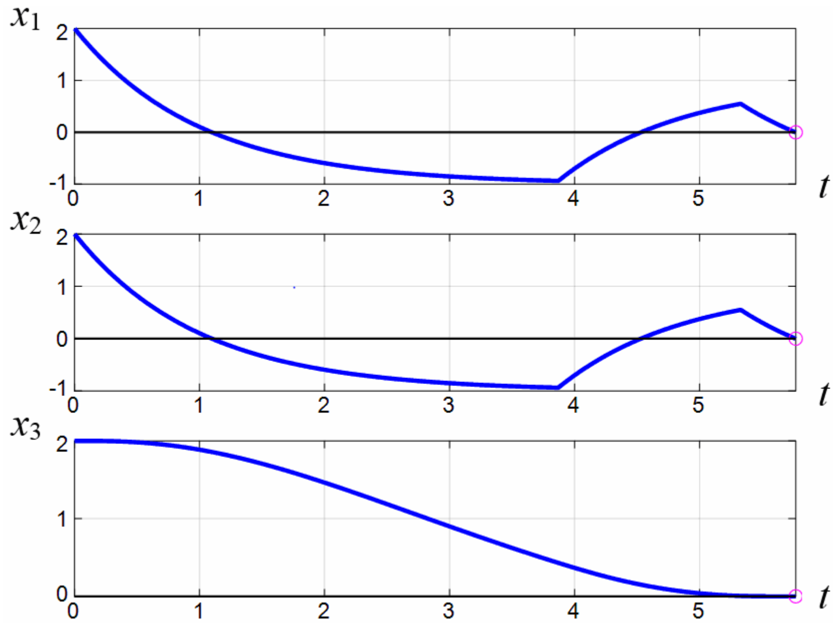

Рис. 2

Список литературы

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1983. – 393с.
2. Белолипецкий А.А. Численный метод решения линейной задачи оптимального быстродействия сведением ее к задаче Коши // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1977. Т. 17, № 6. С. 1380-1386.
3. Киселёв Ю.М., Орлов М.В. Численные алгоритмы линейных быстродействий // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1991. Т. 31, № 12. С. 1763-1771.
4. Александров В.М. Численный метод решения задачи линейного быстродействия // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1998. Т. 38, № 6. С. 918-931.
5. Шевченко Г.В. Численный алгоритм решения линейной задачи оптимального быстродействия // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2002. Т. 42, № 8. С. 1184-1186.

6. Тятюшкин А.И. Численные методы расчета оптимального по быстродействию управления // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. 2014. Т. 8. С. 164-177.
7. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. – М.: Наука, 1969. – 408 с.
8. Мозжорина Т.Ю. Численное решение задач оптимального управления с переключением методом пристрелки // Математическое моделирование и численные методы. 2017. № 2. С. 94-106.
9. Keller H.B. Numerical method of two-point boundary value problems. Ginn-Bleisdell. – Dover Publication, 2018. – 416 с.
10. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 600 с.

References

1. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. Mathematical theory of optimal processes. – Moscow: Phizmatgiz, 1983. – 393p.
2. Belolipetskii A.A. A numerical method of solving a linear time optimal problem by reduction to a Cauchy problem // Vychisl. Mat. Mat. Fiz. 1998, vol. 77, no. 6, pp. 40-45.
3. Kiselev Yu.M., Orlov M.B. Numerical algorithms of linear speeds // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1991, vol. 31, no. 12, pp. 1-7.
4. Aleksandrov V.M. A Numerical Method of Solving the Linear Speed Problem // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1998, vol. 38, no. 6, pp. 918-931.
5. Shevchenko G.V. A numerical algorithm for solving a linear time-optimality problem // Comput. Math. Math. Phys., 2002, vol. 42, no. 8, pp. 1184-1196.
6. Tyatyushkin A.I. Numerical Methods for Calculation of Time-Optimal Control // News of Irkutsk State University. Ser. Mathematics. 2014, vol. 8, pp. 164-177.
7. Boltyanskii V.G. Mathematical methods of optimal control. – Moscow: Science, 1969. – 408 p.
8. Mozzhorina T.Y. Numerical solution of optimal control problems with switching by targeting method // Mathematical modeling and numerical methods. 2017, no. 2, pp. 94-106.
9. Keller H.B. Numerical method of two-point boundary value problems. – Ginn-Bleisdell. – Dover Publicatiom, 2018. – 416 p.
10. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. Numerical methods. – Moscow: Science, 1987. – 600 p.

Филимонов Александр Борисович – доктор технических наук, профессор	**Filimonov Alexandr Borisovich** – doctor of technical sciences, professor
Филимонов Николай Борисович – доктор технических наук, профессор	**Filimonov Nikolay Borisovich** – doctor of technical sciences, professor
nbfilimonov@mail.ru	

Received 05.04.2022