https://doi.org/10.26160/2474-5901-2022-29-36-41

ДРОБНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ В ОБОБЩЕНИИ ПРОСТЕЙШИХ МОДЕЛЕЙ ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

Кравчук А.С.[1]***, Кравчук А.И.***[2]

[1]*Белорусский государственный экономический университет, Минск, Беларусь;*
[2]*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*

Ключевые слова: простейшие модели вязкоупругости, модель Максвелла, модель Фойгта, дробная производная, время неустановившейся ползучести, время неустановившейся релаксации.

Аннотация. Рассмотрены две простейшие одномерные вязкоупругие модели Максвелла и Фойгта (Кельвина-Фойгта). Проверкой размерностей было установлено, что простая формальная замена обыкновенной производной дробной в обеих моделях невозможна. Однако на основе дробной модели Скотта-Блэра предложены дробные модели Кравчука-Максвелла и Кравчука-Фойгта. Они являются обобщением известных моделей Максвелла и Фойгта (Кельвина-Фойгта) линейной вязко-упругости с использованием дробных производных произвольного вида. Данные обобщения позволяют использовать стандартные параметры моделей, такие как модуль упругости и вязкость, но требуют экспериментального доопределения дополнительных констант по времени. В качестве констант предложено использовать время релаксации и время ползучести – константы, определяющие переход от нестационарного процесса (релаксации/ползучести) к стационарному.

FRACTIONAL DERIVATIVES IN THE GENERALIZATION OF SIMPLE MODELS OF LINEAR VISCOELASTICITY

Kravchuk A.S.[1]***, Kravchuk A.I.***[2]

[1]*Belarusian State Economic University, Minsk, Belarus;*
[2]*Belarusian State University, Minsk, Belarus*

Keywords: simplest viscoelasticity models, Maxwell model, Voigt model, fractional derivative, transient creep time, transient relaxation time.

Abstract. Two simplest one-dimensional viscoelastic Maxwell and Voigt (Kelvin-Voigt) models were considered. By checking the dimensions, it was found that a formal replacement of the ordinary fractional derivative in both models is impossible. However, based on the fractional Scott-Blair model, the fractional Kravchuk-Maxwell and Kravchuk-Voigt models were proposed. They are a generalization of the Maxwell and Voigt (Kelvin-Voigt) models of linear viscoelasticity using arbitrary fractional derivatives. The generalization will allow us the use of standard model parameters, such as the elasticity modulus and viscosity, but require the experimental determination of additional time constants. It is proposed to use the relaxation time and the creep time as constants. It determines the transition from a non-stationary process (relaxation/creep) to a stationary one.

Введение. Одним из основных объектов исследований в механике твердого тела и инженерии является установление уравнения состояния, характеризующего связь между напряжениями и деформациями, а также их скоростями. Без этого уравнения невозможно провести расчет напряженно-деформированного состояния технического объекта или его элемента (узла в машиностроении).

Исторически сложилось так, что линейные модели стали самыми первыми моделями, с помощью которых были выполнены теоретические расчеты практически важных элементов конструкций. Естественно эти расчеты были выполнены вначале исключительно с использованием упругого поведения материала.

Однако после в 50-х годах прошлого века появилась портретность учитывать необратимые деформации, проявляемые при вязком поведении материала.

Поведение материала, сочетающего в себе свойства упругости и вязкости, называется вязкоупругим. В одномерном случае линейную вязкоупругость удобно интерпретировать с помощью простейших механических моделей [1, 2].

Эти модели построены с использованием механических элементов, таких как линейный упругий элемент (рис. 1) с модулем упругости E (размерностью Па, рис. 1) и вязкий элемент (демпфер) с коэффициентом вязкости η (размерностью Па·с, рис. 2). Вязкий элемент представляет собой поршень, движущийся в цилиндре с вязкой жидкостью (рис. 2). Весом упругого и вязкого элемента следует пренебречь.

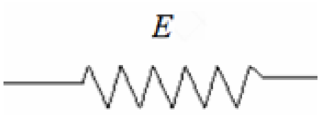

Рис. 1. Упругая пружина [1, 2]

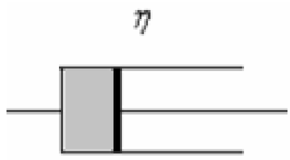

Рис. 2. Вязкий элемент [1, 2]

Известны две простейшие модели вязкоупругости. Это модель Максвелла и модель Фойгта (в некоторых источниках называется моделью Кельвина-Фойгта) [1, 2]. В этих моделях используются следующие понятия механики: напряжение (Па), обозначаемое σ, и деформация (безразмерная величина), обозначаемая ε. Кроме того, используются производные первого порядка по времени от этих величин (напряжение и деформация), называемые скоростью напряжения и скоростью деформации соответственно:

$$\frac{d\sigma}{dt} \text{ и } \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Модель Максвелла. При этом упругий и вязкий элементы фиксируются последовательно, и уравнение состояния одномерного тела записывается по формуле (рис. 3) [1, 2]:

$$\frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt}+\frac{\sigma}{\eta}=\frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (1)$$

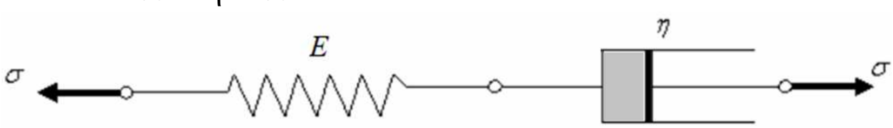

Рис. 3. Модель Максвелла [1, 2]

Модель Фойгта (Кельвина-Фойгта). Упругие и вязкие элементы закреплены параллельно и уравнение состояния одномерного тела записывается по формуле (рис. 4) [1, 2]:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}. \qquad (2)$$

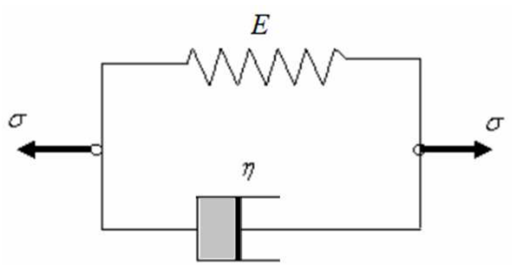

Рис. 4. Модель Фойгта (Кельвина-Фойгта) [1, 2]

Замена обыкновенной производной дробной в модели Максвелла. Несмотря на то, что перечисленные выше модели в настоящее время считаются классическими, их исследованию и обобщению продолжают посвящаться многие научные работы [3].

Одним из направлений возможного общения этих общеизвестных моделей может стать ставшая популярной формальная замена обычных производных на дробные [4].

Будем использовать обозначение дробной производной по времени без уточнения определения в виде:

$$\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}.$$

Формальная замена производной целого порядка на дробную в модели вязкоупругости Максвелла. С помощью формальной замены обычной производной на дробную из (1) можно получить наиболее общее уравнение, когда $\alpha \neq \beta$:

$$\frac{1}{E}\frac{d^{\alpha}\sigma}{dt^{\alpha}} + \frac{\sigma}{\eta} = \frac{d^{\beta}\varepsilon}{dt^{\beta}}.$$

Размерность аддитивного члена $\frac{\sigma}{\eta}$ в указанном выше уравнении равна $\frac{1}{c}$. Следовательно, слагаемые $\frac{1}{E}\frac{d^{\alpha}\sigma}{dt^{\alpha}}$, $\frac{d^{\beta}\varepsilon}{dt^{\beta}}$ должны иметь ту же размерность, а это возможно тогда и только тогда, когда $\alpha = \beta = 1$.

Формальная замена обыкновенной производной на дробную в модели Фойгта (Кельвина-Фойгта). Из (2) формально можно получить:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon + \eta \frac{d^{\alpha}\varepsilon}{dt^{\alpha}}.$$

Величины σ и $E \cdot \varepsilon$ имеют размерность Па. Исходя из общеизвестного правила величина $\eta \dfrac{d^{\alpha}\varepsilon}{dt^{\alpha}}$ должна иметь такую же размерность. Это может быть тогда и только тогда, когда $\alpha = 1$.

Внесение корректив в определение обеих моделей вязкоупругости с целью удовлетворения требования по совпадению размерностей аддитивных частей рассматриваемых моделей. Эту погрешность в вязкоупругих моделях с дробной производной можно было бы исправить с помощью коэффициента, дающего в размерности некоторых аддитивных слагаемых дробную степень секунды.

Этой идее есть предпосылки, если вспомнить о работе [5], в которой упоминается так называемая дробная модель Скотта-Блэра:

$$\sigma = E \cdot \tau^{\alpha} \cdot \frac{d^{\alpha}\varepsilon}{dt^{\alpha}},$$

где τ – время релаксации, вспомогательная константа с размерностью время. За счет введения вспомогательной константы τ, вероятно, впервые в этой модели была решена проблема размерностей.

Если эту модель дополнить следующим определением константы τ, как времени определяющим точку на временной шкале, соответствующую переходу от неустановившегося реономного процесса к установившемуся, то модель Скотта-Блэра, по сути, указывает целое направление. Это, очевидно, позволит кардинально изменить восприятие дробной производной в физике как абсолютной несуразности, вызывающей проблемы с размерностями в уравнениях и указывающей на невнимательность исследователей их использующих, на положение инструмента исследований вполне адекватного в некоторых случаях, с которым, вероятно, все же возможно решать некоторые прикладные задачи.

Используя данную подсказку из модели Скотта-Блэра, продемонстрируем модели, аналогичные линейным моделям Максвелла и Фойгта (Кельвина-Фойгта), но использующим дробные производные любого из известных видов.

Дробной моделью Кравчука-Максвелла будем называть аналог линейной модели Максвелла, записанный с использованием дробных производных:

$$\frac{1}{E^{\alpha} \cdot (\tau_P)^{1-\alpha}} \frac{d^{\alpha}\sigma}{dt^{\alpha}} + \frac{\sigma}{\eta} = \frac{1}{(\tau_P)^{1-\beta}} \frac{d^{\beta}\varepsilon}{dt^{\beta}}, \qquad (3)$$

где τ_P – время в секундах, указывающее границу перехода от неустановившейся релаксации к установившемуся процессу (время неустановившейся релаксации).

Соответственно дробной моделью Кравчука-Фойгта будем называть аналог линейной модели Фойгта (Кельвина-Фойгта), записанный с использованием производных дробных порядков:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon + \frac{\eta}{(\tau_П)^{1-\alpha}} \frac{d^{\alpha}\varepsilon}{dt^{\alpha}}, \tag{4}$$

где $\tau_П$ – время в секундах, указывающее границу перехода от неустановившейся ползучести к установившемуся процессу (время неустановившейся ползучести).

Очевидно, что $\tau_П$ и τ_P могут для некоторых материалов как совпадать, так и различаться.

Следует отметить, что обе предлагаемые модели с дробными производными могут рассматриваться как обобщение моделей Максвелла и Фойгта (Кельвина-Фойгта) также с той точки зрения, что впервые корректно выполняются предельные переходы от предложенных моделей с дробными производными (3), (4) к исходным моделям (1) и (2):

$$\lim_{\alpha \to 1} \left(\frac{1}{E^{\alpha} \cdot (\tau_P)^{1-\alpha}} \frac{d^{\alpha}\sigma}{dt^{\alpha}} + \frac{\sigma}{\eta} \right) = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta},$$

$$\lim_{\beta \to 1} \left(\frac{1}{(\tau_P)^{1-\beta}} \frac{d^{\beta}\varepsilon}{dt^{\beta}} \right) = \frac{d\varepsilon}{dt},$$

$$\lim_{\alpha \to 1} \left(E \cdot \varepsilon + \frac{\eta}{(\tau_П)^{1-\alpha}} \frac{d^{\alpha}\varepsilon}{dt^{\alpha}} \right) = E \cdot \varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Выводы. Данное исследование продемонстрировало невозможность формальной замены производных целых порядков на дробные в простейших моделях вязкоупругости. Это связано, прежде всего, с тем, что формальная замена типа производных приводит к нарушению правила сохранения размерностей в слагаемых таких уравнений состояния как модели Максвелла и Фойгта (Кельвина-Фойгта) вязкоупругого материала.

На основе дробной модели Скотта-Блэра предложено обобщение простейших моделей линейной вязко-упругости, в которых используются дробные производные произвольного вида. Установлено, что для того, чтобы использовать в моделях общеизвестные константы материала, такие как модуль упругости и вязкость без ущерба их корректности достаточно доопределить для каждой из моделей по одной дополнительной константе (время неустановившейся релаксации и время неустановившейся ползучести), задающих границу перехода от неустановившейся релаксации/ползучести к установившейся.

Список литературы

1. Простейшие механические модели вязкоупругого поведения / В.М. Козин и др. Прикладные задачи динамики ледяного покрова [Электронный ресурс]. – URL: https://www.monographies.ru/ru/book/section?id=282.
2. Ржаницын А.Р. Теория ползучести. – М.: Стройиздат, 1968. – 419 с.

3. Amabili M. Derivation of nonlinear damping from viscoelasticity in case of nonlinear vibrations // Nonlinear Dyn., 97, 2019. – P. 1785-1797. DOI: 10.1007/s11071-018-4312-0.
4. Bonfanti A. Fractional viscoelastic models for power-law materials / A. Bonfanti, J.L. Kaplan, G. Charras, A. Kabla // Soft Matter, 2020, 16, P. 6002-6020. URL: https://pubs.rsc.org/en/content/articlehtml/2020/sm/d0sm00354a.
5. Stankiewicz, A. Fractional Maxwell model of viscoelastic biological materials / A. Stankiewicz // BIO Web of Conferences 10, 02032, 2018, DOI: 10.1051/bioconf/20181002032.

References

1. The simplest mechanical models of viscoelastic behavior / V.M. Kozin et al. Applied problems of ice cover dynamics [Electronic resource]. – URL: https://www.monographies.ru/ru/book/section?id=282.
2. Rzhanitsyn A.R. Creep theory. – M.: Stroyizdat, 1968. – 419 p.
3. Amabili M. Derivation of nonlinear damping from viscoelasticity in case of nonlinear vibrations // Nonlinear Dyn., 97, 2019. – P. 1785-1797. DOI: 10.1007/s11071-018-4312-0.
4. Bonfanti A. Fractional viscoelastic models for power-law materials / A. Bonfanti, J.L. Kaplan, G. Charras, A. Kabla // Soft Matter, 2020, 16, P. 6002-6020. URL: https://pubs.rsc.org/en/content/articlehtml/2020/sm/d0sm00354a.
5. Stankiewicz, A. Fractional Maxwell model of viscoelastic biological materials / A. Stankiewicz // BIO Web of Conferences 10, 02032, 2018, DOI: 10.1051/bioconf/20181002032.

Кравчук Александр Степанович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры экономической информатики	**Kravchuk Alexander Stepanovich** – doctor of physical and mathematical sciences, associate professor, professor of the Department of economic informatics
Кравчук Анжелика Ивановна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования	**Kravchuk Anzhelika Ivanovna** – candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, associate professor of the Department of web technologies and computer modeling
ask_belarus@inbox.ru	

Received 20.03.2022