

## ЧАСТОТНЫЕ ФУНКЦИИ В ПОСТРОЕНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТОВ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ СВЯЗНОСТИ ВНЕШНИХ СИЛОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

*Елисеев А.В., Миронов А.С.*

*Иркутский государственный университет путей сообщения,  
Иркутск, Россия*

**Ключевые слова:** механические колебательные системы, структурные математические модели, передаточная функция, динамическое гашение колебаний, динамические инварианты, частотная функция.

**Аннотация.** Развивается системный подход в рамках методологии структурного математического моделирования для решения задач оценки, контроля и формирования динамических состояний технических объектов транспортного и технологического назначения, находящихся в условиях вибрационных нагрузжений. В качестве расчетных схем технических объектов рассматриваются механические колебательные системы, находящиеся под воздействием связанных возмущений силовой природы. Цель исследования заключается в разработке подходов для оценки совокупности динамических состояний и динамических форм взаимодействий элементов механической колебательной системы в зависимости от коэффициента связности внешних возмущений силовой природы, рассматриваемого в качестве настроечного параметра. Разработан метод построения динамических инвариантов, отображающих динамические особенности в виде ориентированных графов, с помощью частотных функций обнуления амплитуд колебаний координаты объекта, динамическое состояние которого оценивается.

## FREQUENCY FUNCTIONS IN THE FORMATION OF DYNAMIC INVARIANTS OF MECHANICAL OSCILLATORY SYSTEMS TAKING INTO ACCOUNT THE CONNECTIVITY OF EXTERNAL FORCE EXCITATIONS

*Eliseev A.V., Mironov A.S.*

*Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia*

**Keywords:** mechanical oscillatory systems, structural mathematical models, transfer function, dynamic vibration damping, dynamic invariants, frequency function.

**Abstract.** A systematic approach is being developed within the framework of the methodology of structural mathematical modeling. The problems of evaluation, control and formation of dynamic states of technical objects of transport and technological purpose under conditions of vibration loads are considered. The design schemes of technical objects are mechanical oscillatory systems taking into account connected disturbances of a force nature. The purpose of the study is to develop approaches for assessing the dynamic features of a mechanical oscillatory system depending on the coefficient of connectivity of external disturbances. A method has been developed for constructing dynamic invariants that display dynamic features in the form of oriented graphs using frequency functions.

**Введение.** В последнее время существенно значение приобрели задачи обеспечения безопасности работы технических объектов транспортного и технологического назначения [1]. В рамках задач обеспечения безопасности

существенное внимание уделяется динамическому качеству работы технических объектов, находящихся в условиях вибрационных нагрузений [2]. Разработка эффективных средств оценки и контроля за динамическим состоянием технических объектов предопределяет развития теоретического базиса методов математического моделирования динамических особенностей с учетом характера внешних возмущающих факторов. Расчетными схемами широкого круга задач динамики служат механические колебательные системы с сосредоточенными параметрами. Среди методов математического моделирования особое место занимают структурные подходы, в рамках которых, механическим колебательным системам сопоставляются структурные схемы эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления [3]. Структурное математическое моделирование используется в решении задач вибрационной защиты и виброизоляции [4], для решения динамики сочленений [5], в моделировании взаимодействий элементов с учетом неудерживающих связей [6, 7]. Некоторое развитие структурные методы получили в направлении решения задач оценки динамических состояний и форм взаимодействий элементов технических объектов с использованием частотных и энергетических функций [8].

Вместе с тем, разработка методов оценки динамических состояний и форм взаимодействий элементов механических колебательных систем, находящихся под воздействием внешних возмущений, недостаточно детализирована для учета многообразия возможных динамических особенностей, которое определяется совокупностью зависимых между собой внешних силовых возмущений.

Статья посвящена методу построения динамических инвариантов для оценки множества особенностей взаимодействия элементов механической колебательной системы, определяемого совокупностью связанных внешних возмущений силовой природы.

**I. Основные положения. Постановка задачи.** Рассматривается механическая колебательная система с двумя степенями свободы (рис. 1). Массоинерционные элементы  $m_1$ ,  $m_2$  крепятся друг к другу и к опорным поверхностям с помощью упругих элементов с жесткостями  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  (рис. 1а).

Под воздействием внешних гармонических синфазных силовых возмущений  $Q_1$  и  $Q_2$  массоинерционные элементы совершает малые вынужденные установившиеся колебания относительно положений статического равновесия. Смещения  $y_1$ ,  $y_2$  массоинерционных элементов  $m_1$ ,  $m_2$  относительно положения статического равновесия служат обобщенными координатами. На основе использования известных методов может быть построена структурная схема (рис. 1б), в которой  $p=j\omega$  – комплексная переменная,  $j=\sqrt{-1}$ , «-» над символом обозначает преобразование Лапласа [4]. Между силовыми возмущениями  $Q_1$  и  $Q_2$  реализована функциональная связь:

$$Q_2 = \gamma Q_1, \tag{1}$$

где коэффициентом связности  $\gamma \in (-\infty, \infty)$ .

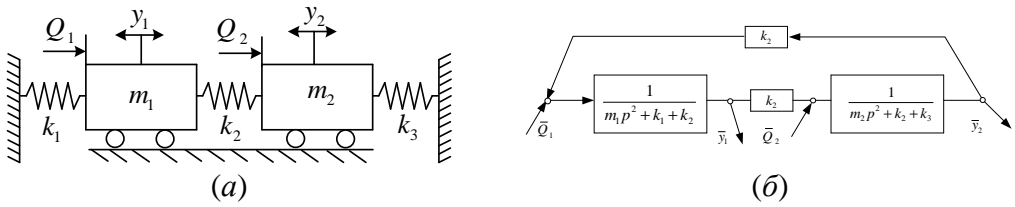


Рис. 1. Механическая колебательная система: *а* – расчетная схема, *б* – структурная схема с учетом коэффициента связности внешних воздействий  $\gamma$

Задача заключается в разработке метода оценки совокупности динамических состояний и форм взаимодействий элементов механической колебательной системы в зависимости от коэффициента связности, рассматриваемого в качестве настроечного параметра.

**II. Математическая модель.** На основе структурной схемы (рис. 1б) с помощью известных методов [9-11] могут быть определены передаточные отношения и построены их амплитудно-частотные характеристики:

$$A_{11}(\omega) = \left. \frac{\bar{y}_1}{Q_1} \right|_{p=j\omega} = \frac{-m_2(\omega^2 - (n_2^2 + \gamma\Delta_2^2))}{m_1 m_2 (\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}, \quad (2)$$

$$A_{22}(\omega) = \left. \frac{\bar{y}_2}{Q_2} \right|_{p=j\omega} = \frac{-m_1(\omega^2 - (n_1^2 + \frac{\Delta_1^2}{\gamma}))}{m_1 m_2 (\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}, \quad (3)$$

где характерные частоты системы  $n_1^2 = \frac{k_1 + k_2}{m_1}$ ,  $n_2^2 = \frac{k_2 + k_3}{m_2}$ ,  $\Delta_1^2 = \frac{k_2}{m_1}$ ,  $\Delta_2^2 = \frac{k_2}{m_2}$ ,

$$\omega_1^2 = \frac{n_1^2 + n_2^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{2}\right)^2 + \Delta_1^2 \Delta_2^2}, \quad \omega_2^2 = \frac{n_1^2 + n_2^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{2}\right)^2 + \Delta_1^2 \Delta_2^2}.$$

Для фиксированного коэффициента связности внешних воздействий, амплитудно-частотные характеристики (2), (3) позволяет определить конечную совокупность динамических состояний и форм взаимодействий элементов [12, 13]. Изменение коэффициента связности  $\gamma$  на всей числовой оси позволяет рассмотреть различные совокупности динамических особенностей.

### III. Методы построения динамических инвариантов на основе частотной функции

1. Частотные интервалы знакопостоянства амплитудно-частотной характеристики в зависимости от коэффициента связности могут быть определены на основе частотной функции аргумента коэффициента связности, обнуляющей числитель соответствующего дробно-рационального выражения (2):

$$\omega_0^2 = n_2^2 + \gamma\Delta_2^2. \quad (4)$$

Частотные интервалы, на которых амплитудно-частотная функция знакоотпределена могут быть построены на основе частотной функции обнуления аргумента коэффициента связности внешних возмущений (рис. 2).

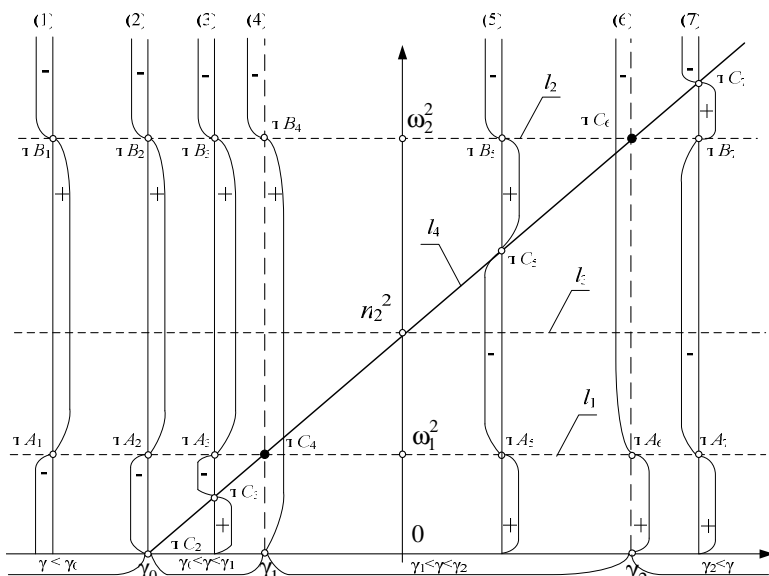


Рис. 2. Частотная функция обнуления координаты  $u_1$ : 1 – 7 интервалы знакопостоянства и критические значения  $A_{11}(\omega)$ ,  $l_1$  – уровень  $\omega_1^2$ ,  $l_2$  – уровень  $\omega_2^2$ ,  $l_3$  – уровень парциальной частоты  $n_2^2$ ,  $l_4$  – график частотной функции обнуления

Для фиксированного коэффициента связности  $\gamma$  распределение частотных интервалов позволяет построить графы динамических состояний (табл. 1, стр. II) и форм динамических взаимодействий (табл. 1, стр. IV).

В обобщенном виде динамические особенности в виде графов, по сути представляющих собой своеобразные инварианты, могут быть представлены выражениями  $S_i^j F_k^l$ , где  $i$  – количество состояний обнуления амплитуд колебаний,  $j$  – количество резонансов,  $k$  – количество отрицательных динамических форм взаимодействий,  $l$  – количество положительных форм взаимодействий.

Табл. 1. Динамические инварианты элемента  $u_1$

	1	2	3	4	5	6	7
I	$\gamma < \gamma_0$	$\gamma = \gamma_0$	$\gamma_0 < \gamma < \gamma_1$	$\gamma = \gamma_1$	$\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$	$\gamma = \gamma_2$	$\gamma_2 < \gamma$
II							
III							
IV	$S_0^2 F_2^1$	$S_1^2 F_1^2$	$S_1^2 F_2^2$	$S_0^1 F_1^1$	$S_1^2 F_2^2$	$S_0^1 F_1^1$	$S_1^2 F_2^2$

2. Частотная функция обнуления амплитуды колебания координаты  $y_2$  определяется из условий равенства нулю числителя дробно-рационального выражения (3):

$$\omega_{02}^2 = n_1^2 + \frac{\Delta_1^2}{\gamma}. \quad (5)$$

Частотная функция (11) определяет частотные интервалы, на которых амплитудно-частотная функция (3) принимает либо положительные, либо отрицательные интервалы (рис. 3).

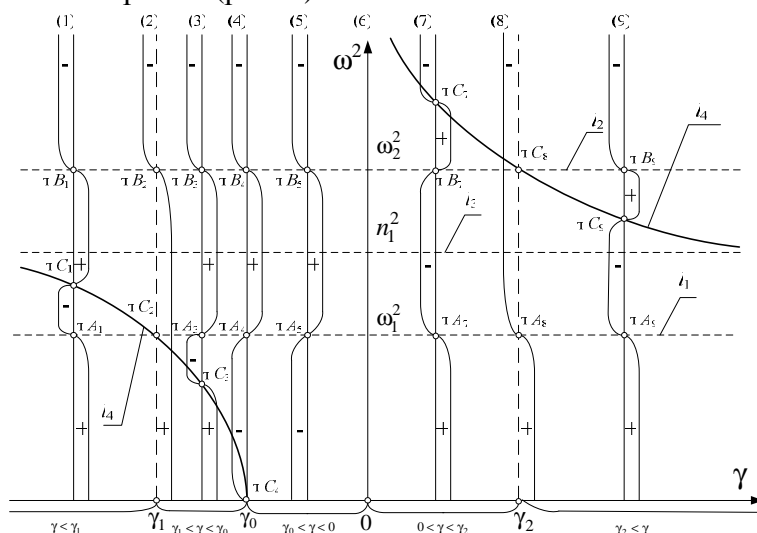


Рис. 3. Частотная функция обнуления координаты  $y_2$ : 1-9 – интервалы знакоопределенности  $A_{22}(\omega)$ ,  $l_1$  – уровень  $\omega_1^2$ ,  $l_2$  – уровень  $\omega_2^2$ ,  $l_3$  – уровень парциальной частоты  $n_1^2$ ,  $l_4$  – график частотной функции обнуления амплитуды колебания координаты  $y_2$

На основе графика (рис. 3) частотной функции обнуления амплитуды колебаний координаты  $y_2$  могут быть определены динамические особенности механической колебательной системы в виде количества частот обнуления, количества резонансов, количества положительных и отрицательных форм динамических взаимодействий.

Таким образом, частотные функции обнуления (4), (5) позволяют определить совокупность динамических инвариантов (табл.1, стр. IV; табл. 2, стр. II).

Табл. 2. Динамические инварианты элемента  $y_2$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
I	$\gamma < \gamma_1$	$\gamma = \gamma_1$	$\gamma_1 < \gamma < \gamma_0$	$\gamma = \gamma_0$	$\gamma_0 < \gamma < 0$	$\gamma = 0$	$0 < \gamma < \gamma_2$	$\gamma = \gamma_2$	$\gamma_2 < \gamma$
II	$S_1^2 F_2^2$	$S_0^1 F_1^1$	$S_1^2 F_2^2$	$S_1^2 F_2^1$	$S_0^2 F_1^2$	-	$S_1^2 F_2^2$	$S_0^1 F_1^1$	$S_1^2 F_2^2$

**Заключение.** В рамках структурного математического моделирования разработан методологический подход для построения динамических

инвариантов механической колебательной системы, находящейся в условиях связанных вибрационных нагружений. Основой подхода служат так называемые частотные функции обнуления, которые позволяют построить совокупность динамических инвариантов, отображающих динамические особенности системы в виде количества частот обнуления, резонансов, положительных и отрицательных форм динамических взаимодействий элементов механических колебательных систем. Разработанный подход служит методологической основой технологии оценки, контроля и формирования динамических состояний механических колебательных систем с использованием настроечных параметров.

### Список литературы

1. Махутов Н.А. Безопасность и риски: системные исследования и разработки. Новосибирск: Наука, 2017. 724 с.
2. Clarence W. de Silva. *Vibration. Fundamentals and Practice*. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2000. 957 p.
3. Елисеев С.В., Артюнин А.И. Прикладная теория колебаний в задачах динамики линейных механических систем. Новосибирск: Наука, 2016. 459с.
4. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П., Засядко А.А. Динамический синтез в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов. Иркутск: Изд-во ИГУ, 2008. 523 с.
5. Елисеев С.В., Ермошенко Ю.В. Сочленения звеньев в динамике механических колебательных систем. Иркутск: Изд-во ИрГУПС, 2012. 156с.
6. Елисеев А.В. Особенности взаимодействия материальной частицы с вибрирующей поверхностью в зависимости от дополнительной силы с неудерживающей связью // *Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований*. 2013. № 3. С. 9-15.
7. Елисеев А.В. Особенности реализации режима кратного подбрасывания в модельной задаче с неудерживающей связью при наличии вязкого трения // *Наука в центральной России*. 2013. № 2. С. 42-47.
8. Елисеев А.В. Развитие системных представлений в динамике колебательных структур: частотная функция и формы связности движений элементов // *Современные технологии. Системный анализ. Моделирование*. 2020. № 4 (68). С. 40-49.
9. Eliseev S.V., Eliseev A.V. *Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control, Vol.252*, Springer International Publishing, Cham, 2020, 521 p.
10. Елисеев А.В., Кузнецов Н.К., Московских А.О. Динамика машин. Системные представления, структурные схемы и связи элементов. М.: Инновационное машиностроение, 2019. 381 с.

11. Елисеев С.В., Елисеев А.В., Большаков Р.С., Хоменко А.П. Методология системного анализа в задачах оценки, формирования и управления динамическим состоянием технологических и транспортных машин. Новосибирск: Наука, 2021. 679 с.
12. Елисеев А.В., Миронов А.С. Новые подходы к оценке режимов динамического гашения колебаний вибрационных машин транспортного и технологического назначения: графы динамических состояний и форм взаимодействия элементов // Мехатроника, автоматика и робототехника. 2022. №9. С. 23-29. doi.org/10.26160/2474-5901-2022-28-22-25
13. Eliseev A.V., Mironov A.S. Methodological approaches to the assessment of the totality of dynamic states and forms of interactions of elements of vibrating machines for transport and technological purposes // Journal of Advanced Research in Technical Science. 2022. № 28. P. 22-25. doi.org/10.26160/2474-5901-2022-28-22-25

### References

1. Makhutov N.A. Safety and risks: system research and development. Novosibirsk: Science, 2017. 724 p.
2. Clarence W. de Silva. Vibration. Fundamentals and Practice. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2000. 957 p.
3. Eliseev S.V., Artyunin A.I. Applied theory of oscillations in problems of dynamics of linear mechanical systems. Novosibirsk: Science, 2016, 459 p.
4. Eliseev S.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P., Zasyadko A.A. Dynamic synthesis in generalized problems of vibration protection and vibration isolation of technical objects. Irkutsk: Publishing House of the ISU, 2008. 523 p.
5. Eliseev S.V., Ermoshenko Yu.V. Articulations of links in the dynamics of mechanical oscillatory systems. Irkutsk: Publishing house of IrGUPS, 2012. 156 p.
6. Eliseev A.V. Features of the interaction of a material particle with a vibrating surface depending on the additional force with an unilateral ties // International Journal of Applied and Fundamental Research. 2013. No. 3. P. 9-15.
7. Eliseev A.V. Features of the implementation of the multiple toss mode in a model problem with an unstoppable bond in the presence of viscous friction // Science in Central Russia. 2013. No. 2. P. 42-47.
8. Eliseev A.V. Development of system representations in dynamics of oscillatory structures: frequency function and forms of connectivity of movements of elements // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2020. No. 4 (68). P. 40-49.
9. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control, Vol.252, Springer International Publishing, Cham, 2020, 521 p.

10. Eliseev A.V., Kuznetsov N.K., Moskovskikh A.O. Dynamics of machines. System representations, block diagrams and connections of elements. M.: Innovative Mechanical engineering, 2019. 381 p.
11. Eliseev S.V., Eliseev A.V., Bolshakov R.S., Khomenko A.P. Methodology of system analysis in the tasks of evaluation, formation and management of the dynamic state of technological and transport machines. Novosibirsk: Science, 2021. 679 p.
12. Eliseev A.V., Mironov A.S. New approaches to the evaluation of modes of dynamic damping of vibrations of vibrating machines of transport and technological purpose: graphs of dynamic states and forms of interaction of elements // Mechatronics, automation and robotics. 2022. No. 9. P. 23-29. doi.org/10.26160/2474-5901-2022-28-22-25
13. Eliseev A.V., Mironov A.S. Methodological approaches to the assessment of the totality of dynamic states and forms of interactions of elements of vibrating machines for transport and technological purposes // Journal of Advanced Research in Technical Science. 2022. № 28. pp. 22-25. doi.org/10.26160/2474-5901-2022-28-22-25

<b>Елисеев Андрей Владимирович</b> – кандидат технических наук, доцент кафедры математики	<b>Eliseev Andrey Vladimirovich</b> – candidate of technical sciences, associate professor of Department of mathematics
<b>Миронов Артем Сергеевич</b> – соискатель НОЦ современных технологий, системного анализа и моделирования	<b>Mironov Artem Sergeevich</b> – applicant, rec of modern technologies, system analysis and modeling
eavsh@ya.ru	

*Received 08.04.2022*