https://doi.org/10.26160/2474-5901-2022-28-30-36

МИНИМАЛЬНОЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ПРИНУЖДЕНИЕ ДЛЯ ДОСТИЖЕНИЯ ЦЕЛИ УПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ ОБЪЕКТА

Бохонский А.И.[1], Варминская Н.И.[2]
[1]Севастопольский государственный университет, г. Севастополь, Россия;
[2]Черноморское высшее военно-морское училище имени П.С. Нахимова, г.Севастополь, Россия

Ключевые слова: принцип наименьшего принуждения, реверсионное конструирование управлений, снижение энергоемкости, движение типа «разгон-торможение».
Аннотация. Известные результаты исследований подтверждают снижение энергии с ростом степени полинома управления (ускорения) для оптимального поступательного и вращательного движений объекта из исходного состояния покоя в конечное состояние покоя при заданном расстоянии и времени движения. В статье А.П. Маркеева «О принципе наименьшего принуждения» приводятся примеры применения и варианты формулировок принципа наименьшего принуждения К.Ф. Гаусса. Не исключается некоторая аналогия между целенаправленным движением (К.Ф. Гаусс) и возможной минимальной энергоемкостью при управляемом движении типа «разгон-торможение» с достижением цели движения. Приведены примеры конструирования управлений с наименьшим энергетическим принуждением.

MINIMUM ENERGY COERCION TO ACHIEVE THE GOAL OF CONTROLLED OBJECT MOTION

Bokhonsky A.I.[1], Varminskaya N.I.[2]
[1]Sevastopol State University, Sevastopol, Russia;
[2]Nakhimov Black Sea Higher Naval School, Sevastopol, Russia

Keywords: principle of least coercion, control reversive design, reduction of energy consumption, “acceleration-deceleration” motion.
Abstract. Known research results confirm the energy decrease with an increase in the degree of the polynomial (control function or acceleration) for the optimal translational and rotational motions of an object from the initial state of quiescence to the final state of quiescence at a given distance and motion time. The article by A.P. Markeev “On the principle of least coercion” provides examples of the application and formulation of the principle of least coercion by K. F. Gauss. Some analogy between the purposeful movement according to the principle of K. F. Gauss and the possible minimum energy consumption in controlled movement of the “acceleration-deceleration” type with the achievement of the purpose of motion is not excluded. Examples of designing controls with the least energy coercion are given.

Введение

Методам теории оптимального управления перемещением объектов, управлению колебаниями упругих систем посвящены работы [1-5]. И в настоящее время продолжают оставаться актуальными задачи, посвященные проектируемым экстремальным свойствам движения объектов техники. Отдельные типы оптимального управления могут быть обоснованы с использованием принципа наименьшего энергетического принуждения для достижения цели движения.

В 1829г. К.Ф. Гаусс опубликовал статью «Об одном новом принципе механики», который со временем получил название принципа наименьшего принуждения [6]. В работе [7] приведены варианты формулировок и применения принципа, а также важное утверждение о том, что в истинном движении принуждение (работа реакций связей) является минимальным. На этом основании можно также утверждать, что в действительном движении реализуется и наименьшее энергетическое принуждение.

В работах [8-12] обращено внимание на использование алгоритма решения полной обратной задачи вариационного исчисления для конструирования оптимальных управлений типа «разгон-торможение». На ряде примеров было показано, что такой подход неизбежно приводит к экономии энергии для реализации цели движения – из исходного в конечное состояние покоя.

Цель исследования – сравнительный анализ оптимальных управлений движением, полученных при их конструировании с заданием различных степеней полинома управления и, как следствие, появлением новых критериев, в том числе – принципа наименьшего энергетического принуждения.

Универсальные зависимости для управления движением типа «разгон-торможение»

В работах [5-12] приведены универсальные аналитические зависимости для оптимального поступательного переносного движения объекта при нечетных степенях полинома ускорения (n = 1,3,5,7…). Ускорение (управление), скорость и перемещение в общем случае теперь имеют вид:

$$U_e(t)=\frac{L}{T^2}(2n+4)\left(\frac{T-2t}{T}\right)^n,\qquad V_e(t)=\frac{L}{T}\frac{n+2}{2n+2}\left(1-\left(\frac{T-2t}{T}\right)^{n+1}\right),$$
$$S_e(t)=\frac{L}{2n+2}\left(\left(\frac{T-2t}{T}\right)^{n+2}+2n\frac{t}{T}+4\frac{t}{T}-1\right),\tag{1}$$

где L, T – заданные перемещение и время движения. Из (1) при n = 1 следует известный частный случай классического управления, который находится вариационным методом теории оптимального управления при заранее заданном критерии $J=\int_0^T U_1^2 dt.$

Примеры реверсионного конструирования управления

Задан полином

$$S_e(t)=\sum_{i=1}^{n}C_i t^{i+1},\qquad V_e(t)=\frac{dS_e(t)}{dt},\qquad U_e(t)=\frac{dV_e(t)}{dt},$$

где C_i – константы, $V_e(t)$ – скорость, $U_e(t)$ – ускорение (управление), для которого выполняются условия: $V_e(0)=0,\ \ S_e(0)=0.$

Принято:

$$S_e(T)=L,$$

где L – общее перемещение;

$$U_e(0)+U_e(T)=0, \quad \dot{U}_e(T/2)=0.$$

Дополнительно использован интегральный квадратичный критерий:

$$E_p=\frac{1}{2}\int_0^T \left(U_1-U_e\right)^2 dt=\min, \qquad (2)$$

где $U_1=\dfrac{6L(T-2t)}{T^3}$ – управление, которое, как отмечалось выше, находится с использованием критерия $J=\int_0^T U_1^2 dt$.

Из необходимого условия экстремума функционала (2) следует уравнение $\dfrac{\partial E_p}{\partial C_3}=0.$

Таким образом, получена система алгебраических уравнений:

$$2C_1+3TC_2+6T^2C_3+10T^3C_4=0,$$

$$2C_2+4TC_3+5T^2C_4=0,$$

$$T^2C_1+T^3C_2+T^4C_3+T^5C_4=L,$$

$$20T^2C_1+45T^3C_2+72T^4C_3+100T^5C_4=-30L,$$

решение которой: $C_1=5L/T^2$, $C_2=-10L/T^3$, $C_3=10L/T^4$, $C_4=-4L/T^5$.

После факторизации полиномов, выражения для ускорения, скорости и перемещения принимают вид:

$$U_e=\frac{10L}{T^5}(T-2t)^3, \qquad V_e(t)=\frac{10Lt}{T^5}(T-t)(2t^2-2T\cdot t+T^2),$$

$$S_e(t)=\frac{Lt^2}{T^5}(5T^3-10T^2\cdot t+10T\cdot t^2-4t^3).$$

На рисунке 1 представлены графики перемещения и скорости переносного движения объекта. На рисунке 2 для сравнения изображены графики управлений $U_1(t)$ и $U_e(t)$.

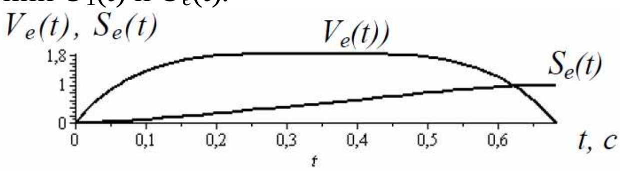

Рис. 1. Графики перемещения $S_e(t)$ и скорости $V_e(t)$ конструируемого движения

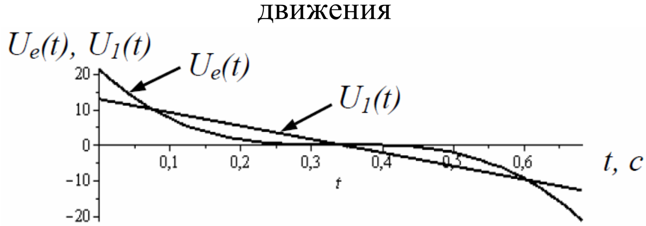

Рис. 2. Графики классического $U_1(t)$ и конструируемого $U_e(t)$ управлений

Интересно, что и без критерия может быть получен этот же результат [11]. Программа аналитических вычислений прилагается.

В прилагаемой программе аналитического конструирования показано, что использование дополнительного кососимметричного условия дает такие же значения констант, что и условия экстремума функционала. Это по существу является дополнительной проверкой результата конструирования.

```
> # ПРОГРАММА РЕВЕРСИОННОГО КОНСТРУИРОВАНИЯ УПРАВЛЕНИЯ
> restart; #полином – функция перемещения переносного движения
> Se:=C1*t^2+C2*t^3+C3*t^4+C4*t^5:
 Ve:=diff(Se,t):Ue:=diff(Ve,t):  #определение выражений для
 скорости и ускорения
> #задание граничных и условий косой симметрии
> t:=0: Ue0:=Ue: t:=T: UeT:=Ue: L1:=Ue0+Ue=0: L2:=Se-L=0:
> # производные
> t:='t': dUe:=diff(Ue,t): d2Ue:=diff(dUe,t):
 U1:=6*L*(T-2*t)/T^3:
> # критерий – принцип наименьшего энергетического принуждения
> J:=int((U1-Ue)^2,t=0..T/2): L4:=simplify(diff(J,C3)):
> # Дополнительные условия косой симметрии
> t:=T/2: L3:=dUe=0: L4:=d2Ue=0;
> L4:=100*C4*T^5+72*C3*T^4+30*L+45*C2*T^3+20*C1*T^2=0:
> # Решение системы алгебраических уравнений для определения
 неизвестных констант, вариант 1
> solve({L1,L2,L3,L4},{C1,C2,C3,C4});
```

$$C1 = \frac{5\,L}{T^2} \quad C2 = -\frac{10\,L}{T^3} \quad C3 = \frac{10\,L}{T^4} \quad C4 = -\frac{4\,L}{T^5}$$

```
> # Решение системы алгебраических уравнений, вариант 2
> solve({L1,L2,L3,L4},{C1,C2,C3,C4}):
```

$$C1 = \frac{5\,L}{T^2} \quad C2 = -\frac{10\,L}{T^3} \quad C3 = \frac{10\,L}{T^4} \quad C4 = -\frac{4\,L}{T^5}$$

Характеристики оптимального движения при различных степенях полинома представлены в таблице 1.

Значения параметров, приведенные в таблице 1, свидетельствуют об асимптотическом свойстве кососимметричного управления при возрастании степени полинома. Интересно, что в частном случае при степени $n \to \infty$ действие и энергия (m = 1 кг, L = 1 м, T = 1с) стремятся к 1.

Как и следовало ожидать, с ростом степени полинома затрачиваемая энергия уменьшается, а по смыслу принципа принуждения (критерия (2)) его численное значение увеличивается, т.е. увеличивается площадь удаляемой части графика переносного ускорения.

Табл. 1. Обобщенные характеристики движения

Степень полинома n	Норма мощности $J_1 = \int_0^T U_e^2 dt$	Действие (по Лагранжу) $J_2 = \int_0^T V_e^2 dt$	Энергия $J_3 = 2\int_0^{T/2} U_e V_e dt$	Скорость $V_e\left(\frac{T}{2}\right) = \int_0^{T/2} U_e dt$	Критерий принуждения $E_p = \frac{1}{2}\int_0^T (U_1 - U_e)^2 dt$
1	$\frac{12L^2}{T^3}$	$\frac{1,2L^2}{T}$	$\frac{2,25L^2}{T^2}$	$\frac{1,5L}{T}$	
3	$\frac{14,2857L^2}{T^3}$	$\frac{1,1111L^2}{T}$	$\frac{1,5625L^2}{T^2}$	$\frac{1,25L}{T}$	$\frac{1,1428L^2}{T^3}$
5	$\frac{17,818L^2}{T^3}$	$\frac{1,0769L^2}{T}$	$\frac{1,3611L^2}{T^2}$	$\frac{1,166L}{T}$	$\frac{2,909L^2}{T^3}$
117	$\frac{241,038L^2}{T^3}$	$\frac{1,0042L^2}{T}$	$\frac{1,017L^2}{T^2}$	$\frac{1,0085L}{T}$	$\frac{114,52L^2}{T^3}$

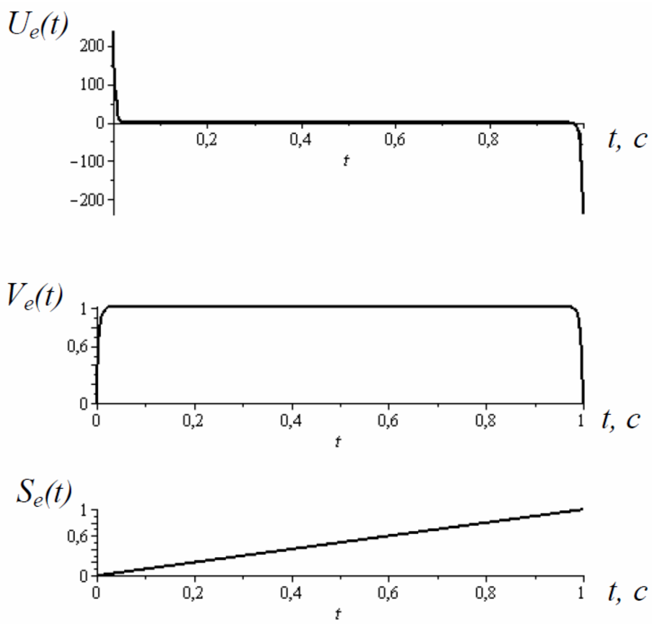

Рис. 3. Графики ускорения $U_e(t)$, скорости $V_e(t)$ и перемещения $S_e(t)$ при n=117

Принцип наименьшего энергетического принуждения (ПНЭП)

В конструируемом оптимальном управлении (ускорении) типа «разгон-торможение» переносным движением объекта с ростом степени полинома ускорения и достижением нового состояния покоя мера энергетического принуждении стремится к предельному значению.

Заключение

С использованием механической аналогии сформулирован принцип наименьшего энергетического принуждения (ПНЭП), отражающий свойство снижения энергоемкости оптимального управляемого движения объекта из исходного в конечное состояние покоя при заданном времени движения и расстоянии.

Если в классической механике принцип наименьшего принуждения (ПНП) позволяет отличать кинематически возможные движения, то при реверсионном конструировании оптимально управляемого движения (типа «разгон-торможение») ПНЭП подтверждает тенденцию к снижению энергии для достижения поставленной цели движения.

С ростом степени полинома ускорения увеличивается число ограничений-условий косой симметрии управления, но без потери самой цели движения. В известном смысле ПНЭП перекликается с принципом наименьшего действия (например, в форме Ж.Л. Лагранжа), отражая в данном случае тенденцию снижения энергозатрат.

Конечный предельный результат ($n \to \infty$) свидетельствует о том, что предельная экономия энергии приводит к постоянной скорости на всем временном участке движения, но, естественно, возникают практические трудности при задании (разгоне) такой скорости и ее устранении (торможении).

Список литературы

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 476с.
2. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: линейные модели. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
3. Карновский И.А. Методы оптимального управления колебаниями деформируемых систем / И.А. Карновский, Ю.М. Почтман. – К.: Высш. шк., 1982. – 116 с.
4. Троицкий В.А. Оптимальные процессы колебаний механических систем. – Л.: Машиностроение, 1976. – 236 с.
5. Черноусько Ф.Л. Управление колебаниями / Ф.Л. Черноусько, П.Д. Акуленко, Б.Н. Соколов. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
6. Гаусс К. Об одном новом общем принципе механики // Вариационные принципы механики. – М.: Физматгиз, 1959. – С. 170-172.
7. Маркеев А.П. О принципе наименьшего принуждения // http://www.pereplet.ru/nauka/Soros/pdf/9801_113.pdf.
8. Бохонский А.И. Энергоемкость управления перемещением объектов // Фундаментальные основы механики. – 2017. – №2. – С. 38-41.
9. Бохонский А.И. Конструирование управляемого движения объекта / А.И. Бохонский, А.И. Рыжков // Механика, автоматика и робототехника. – 2017. – №1. – С. 64-69.
10. Бохонский А.И. Конструирование оптимального управления движения

объектов как абсолютно твердых и деформируемых тел / А.И. Бохонский, Н.И. Варминская, А.И. Рыжков // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2016. – С. 70-76.
11. Бохонский А.И. Реверсионный принцип оптимальности. – М.: Вузовский учебник: ИНФРА-М, 2016. – 174 с.
12. Бохонский А.И., Варминская Н.И., Рыжков А.И. Принцип и теоремы реверсионного исчисления // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2021. – №3(347). – С. 12-21.

References

1. Krasovsky N.N. Motion Control Theory. – M.: Science, 1968. – 476 p.
2. Krutko P.D. Inverse Problems of Controlled Systems Dynamics: Linear Models. – M.: Science, 1987. – 304 p.
3. Karnovsky I.A. Optimal Control Methods of Deformable Systems Oscillations / I.A. Karnovsky, Yu.M. Pochtman. – K.: Higher school, 1982. – 116 p.
4. Troitsky V.A. Optimal Processes of Mechanical Systems Oscillations / V.A. Troitsky. – L.: Mechanical Engineering, 1976. – 236 p.
5. Chernousko F.L. Oscillations Control / F.L. Chernousko, P.D. Akulenko, B.N. Sokolov. – M.: Nauka, 1980. – 384 p.
6. Gauss K. On a New General Principle of Mechanics // Variational principles of mechanics. – M.: Fizmatgiz, 1959. – P. 170 – 172.
7. Markeev A.P. On the Least Coercion Principle // http://www.pereplet.ru/nauka/Soros/pdf/9801_113.pdf.
8. Bokhonsky A.I. Energy Intensity of Objects Motion Control // Fundamental Foundations of Mechanics. – 2017. – No. 3. – P. 38-41.
9. Bokhonsky A.I. Designing an Object Controlled Movement /A.I.Bokhonsky, A.I.Ryzhkov // Mechanics, Automation and Robotics. – 2017. – No. 1. – P. 64-69.
10. Bokhonsky A.I. Designing the Optimal Motion Control for the Absolutely Rigid and Deformable Objects / A.I. Bokhonsky, N.I. Varminskaya, A.I. Ryzhkov // Fundamental and Applied Problems of Engineering and Technology. – 2016. – P. 70-76.
11. Bokhonsky A.I. Reversive Principle of Optimality. – M.: University textbook INFRA-M, 2016. – 174 p.
12. Bokhonsky A.I., Varminskaya N.I., Ryzhkov A.I. Principle and Theorems of Reversive Calculus // Fundamental and Applied Problems of Engineering and Technology. –2021. – No. 3(347). – P. 12-21.

Бохонский Александр Иванович – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Цифровое проектирование»	**Bokhonsky Alexander Ivanovich** – doctor of technical sciences, professor, professor of the Digital Design Department
Варминская Наталья Ивановна – кандидат технических наук, доцент, заведующая кафедрой физики и общетехнических дисциплин	**Varminskaya Natalia Ivanovna** – candidate of technical sciences, associate professor, head of the Department of Physics and General Technical Disciplines
bohon.alex@mail.ru	

Received 07.02.2022