https://doi.org/10.26160/2474-5901-2022-28-26-29

К ВОПРОСУ О КОРРЕКТНОСТИ СОВРЕМЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ УРАВНЕНИЯ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Кравчук А.С.[1], Кравчук А.И.[2]
[1]Белорусский государственный экономический университет, Минск Беларусь;
[2]Белорусский государственный университет, Минск Беларусь

Ключевые слова: математический маятник, свободные колебания, методика вывода дифференциального уравнения, дробная производная, проверка размерностей слагаемых дифференциального уравнения.

Аннотация. Рассмотрен наиболее простой вывод уравнения свободного колебания математического маятника для любых величин его отклонений от вертикали. Производная второго порядка заменяется символическим выражением дробной производной без указания ее конкретного определения. Установлено, что размерности правой и левой частей дифференциального уравнения колебания не совпадают после замены производной целого порядка на дробную. Установлено, что уравнение колебаний маятника имеет физический смысл только в том случае, когда α (параметр дробной производной) тождественно равен единице, т.е. в случае обыкновенной производной целого порядка.

TO THE ISSUE OF THE CORRECTNESS OF MODERN STUDIES OF THE EQUATION OF FREE OSCILLATIONS OF A MATHEMATICAL PENDULUM

Kravchuk A.S.[1], Kravchuk A.I.[2]
[1]Belarusian State Economic University, Minsk Belarus;
[2]Belarusian State University, Minsk, Belarus

Keywords: mathematical pendulum, free oscillations, method for deriving a differential equation, fractional derivative, checking the dimensions of the terms of a differential equation.

Abstract. The simplest derivation of the equation of free oscillation of a mathematical pendulum for any values of its deviation from the vertical is considered. The second order derivative is replaced by the symbolic expression of the fractional derivative without specifying its specific definition. It has been established that after replacing the ordinary derivative with a fractional one, the dimensions of the right and left parts of the differential equation do not coincide. It has been established that the pendulum oscillation equation has a physical meaning only in the case when α (the fractional derivative parameter) is identically equal to unity, i.e. in the case of an ordinary derivative of integer order.

Введение. Не смотря на то, что уравнение свободного колебания маятника является одним из самых изученных и известных уравнений колебаний, до настоящего времени оно продолжает активно и всесторонне исследоваться [1, 2].

На взгляд авторов статьи эти исследования и обобщения несут в себе как положительную, конструктивную информацию, так и деструктивную, т.к. не всегда корректны как с физической точки зрения, так и с математической.

Так, с одной стороны, можно существенно упростить вывод нелинейного уравнения для значительных отклонений маятника от вертикальной линии за счет использования угла отклонения как функции времени, а не линейных величин или проекций, как это принято в отечественной литературе.

Однако, с другой стороны, совершенно удивительным является тот факт, что зарубежные исследователи игнорируют такой способ верификации своих получаемых уравнений как проверка совпадения размерностей их аддитивных членов [2, 3]. Так на этапе подготовки рукописей авторы могли бы избежать элементарных ошибок и самостоятельно установили бы, что замена обычной производной целого порядка на дробную в рассматриваемом уравнении не корректна по своей сути, т.к. приводит к несовпадению размерностей правой и левой частей.

Данная статья актуальна в методическом смысле по нескольким причинам. Во-первых, демонстрирует для преподавателей отечественных технических университетов простой и эффективный способ вывода уравнения свободных колебаний маятника для произвольной величины его отклонения от вертикали. Во-вторых, указывает на необходимость активного использования очень старого и проверенного способа первичной верификации любых усложнений в дифференциальных уравнениях проверкой размерностей слагаемых.

Уравнение свободных колебаний маятника. Математический маятник представляет собой небольшое тело, подвешенное на тонкой недеформируемой нити длиной R [1], масса которой пренебрежимо мала по сравнению с массой тела. В положении равновесия, когда маятник висит по отвесу, сила тяжести уравновешивается силой натяжения нити. При отклонении маятника от положения равновесия на некоторый угол φ тангенциальная составляющая силы тяжести, направленная по касательной к дуге, описываемой маятником, определяется уравнением (рис. 1):

$$F_\tau = -mg\sin\varphi,$$

где m – масса подвешенного тела, g – ускорение свободного падения, φ – угол отклонения маятника от вертикали [1] (рис. 1). Знак минус в этой формуле означает, что касательная составляющая противоположна направлению отклонения маятника (ось Ox касательной к траектории, рис. 1).

В данном случае уравнение баланса сил состоит в применении второго закона Ньютона к силам направленным по касательной к дуге описываемой маятником:

$$ma_\tau = F_\tau = -mg\sin\varphi. \qquad (1)$$

Уравнение (1) только одно, хотя движение осуществляется в плоскости. Это объясняется тем, что движение всегда происходит по заранее известной однопараметрической кривой - дуге окружности. Кроме того стоит помнить, что второе уравнение баланса выписывается для нормального к дуге направления и оно не имеет математического смысла так как это тождество (проекция силы тяжести на нормальное направление к дуге, описываемой маятником, всегда уравновешивается реакцией нити).

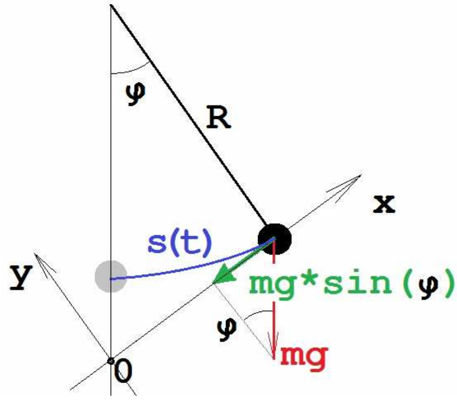

Рис. 1. Математический маятник

Далее будем измерять угол φ отклонения маятника от вертикали в радианах (безразмерная величина в физических уравнениях), а также трактовать его, как функцию времени, $\varphi(t)$. Тогда длина $s(t)$ дуги окружности пройденной маятником за время t определяется уравнением (рис. 1):

$$s(t) = R \cdot \varphi(t)\,. \qquad (2)$$

В случае малых колебаний маятника величина его ускорения, направленная по касательной к дуге, по которой осуществляется движение, определяется выражением:

$$a_\tau = \frac{d^2}{dt^2} s(t)\,. \qquad (3)$$

Подставляя (3) в (2), окончательно получаем:

$$\frac{d^2}{dt^2}\varphi(t) = -\frac{g}{R}\cdot \sin(\varphi(t))\,.$$

Замена обыкновенной производной на дробную в уравнении колебаний маятника. Заменяя символически $\frac{d}{dt}\varphi(t)$ дробной производной $\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}\varphi(t)$ (без уточнения конкретного определения дробной производной), можно формально получить уравнение:

$$\frac{d^{2\alpha}}{dt^{2\alpha}}\varphi(t) = -\frac{g}{R}\cdot \sin(\varphi(t))\,. \qquad (4)$$

Учитывая то, что в (4) функция φ(t) безразмерная (измеряется в радианах), а правая часть уравнения имеет размерность константы $g\,/\,R$, т.е. $1/c^2$. Поэтому и левая часть уравнения (4) должна иметь туже размерность, а это достигается тогда и только тогда, когда $\alpha = 1$ (т.к. $\varphi(t)$ – безразмерная функция). При других значениях α уравнение (4) не имеет физического смысла, так как размерность левой и правой частей не совпадают, а значит уравнение (4) не имеет ни какого физического смысла и нарушает второй закон Ньютона, лежащий в основе вывода уравнения свободного колебания маятника.

Выводы. В статье рассматриваются вопросы методики изложения вывода дифференциального уравнения свободных колебаний маятника в рамках учебных дисциплин в технических вузах. Обосновывается необходимость внесения упрощающих изменений в устоявшийся в отечественной литературе подход, используемый при выводе уравнений колебания маятника. Вместе с тем демонстрируется, что активно используемая в современных дифференциальных уравнениях дробная производная нарушает второй закон Ньютона. Этот вывод делается на основании того, что в полученном с использованием дробных производных уравнении не совпадают размерности правой и левой частей.

Список литературы / References

1. Baker, G.L. The Pendulum a Case Study in Physics / G.L. Baker, J.A. Blackburn – Oxford U.P., Oxford, 2005. – 288 p.
2. Gonçalves, L.N. Physical pendulum model: Fractional differential equation and memory effects / L.N. Gonçalves, J. Fernandes, A. Ferraz, A.G. Silva, P.J. Sebastião // American Journal of Physic, 88, 962, 2020, DOI: https://doi.org/10.1119/10.0001660
3. Kavyanpoor, M. Dynamic behaviors of a fractional order nonlinear oscillator/ M. Kavyanpoor, S. Shokrollahi // J. King Saud Univ.-Sci., V.31, № 1, 2019. – P. 14-20. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jksus.2017.03.006

Кравчук Александр Степанович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры экономической информатики	**Kravchuk Alexander Stepanovich** – doctor of physical and mathematical sciences, associate professor, professor of the Department of Economic Informatics
Кравчук Анжелика Ивановна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования	**Kravchuk Anzhelika Ivanovna** – candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, associate professor of the Department of Web Technologies and Computer Modeling
anzhelika.kravchuk@gmail.com	

Received 10.02.2022