https://doi.org/10.26160/2474-5901-2021-23-94-99

ФЕНОМЕН ФУЛЛЕРА В ТЕОРИИ И ПРАКТИКЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Сухинин Б.В., Сурков В.В.

Ключевые слова: феномен Фуллера, квадратичный критерий, оптимальное быстродействие, точность, синтез управления, функция переключения.

Аннотация. Рассматривается постановка и решение задачи аналитического синтеза закона управления систем с квадратичным критерием качества, в которых оптимальное управление имеет бесконечное число точек переключения на конечном интервале времени («феномен Фуллера»), методом аналитического конструирования регуляторов по критерию быстродействия.

PHENOMENON BY FULLER IN THEORY AND PRACTICE OF THE OPTIMUM CONTROL

Sukhinin B. V., Surkov V.V.

Keywords: Fuller phenomenon, quadratic criterion, optimal quick action, accuracy, control synthesis, switching function.

Abstract. The formulation and solution of the problem of analytical synthesis of the control law of systems with a quadratic performance criterion, in which the optimal control has an infinite number of switching points on a finite time interval ("Fuller's phenomenon"), is considered by the method of analytical construction optimal regulators by the criterion of fast action.

«Теория без практики глупа,
практика без теории слепа»

Введение

Важное направление развития современной теории оптимального управления составляют задачи управления системами с квадратичным критерием качества, не содержащим в явном виде управляющего сигнала (критерий точности), в частности, в которых оптимальное управление имеет бесконечное число точек переключения на конечном интервале времени («феномен Фуллера», режим управления «chattering» – болтанка, «режим учащающихся переключений»). Явное решение задачи Фуллера было получено еще в 1960 году [1, 2] только лишь для двумерной линейной управляемой системы (двойной интегратор) благодаря наличию у нее однопараметрической группы симметрий (групповой анализ Ли, симметрийный анализ). В настоящее время интерес к феномену Фуллера еще более обострился, в связи с исследованиями нетривиальных нелинейных задач прикладного содержания (робототехника, БПЛА, ракетная техника, автономный подводный транспорт, в биомедицине при лечении рака, экономические задачи). Традиционное решение задачи построения оптимального управления динамической системой опирается на использование, в основном, принципа максимума Л.С. Понтрягина или, в несколько меньшей степени, метода динамического программирования Р.Е. Беллмана. Несмотря на их универсальность, их практическое применение все еще ограничено в связи с известными сложностями.

Аналитический синтез закона управления

Синтез закона управления базируется на методе аналитического конструирования оптимальных регуляторов [3, 4] по критерию быстродействия и содержит следующие этапы:

1. Записывается расширенный объект (n+1)-го порядка:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(\mathbf{X}) + \mathbf{B}(\mathbf{X})u\,, \tag{1}$$

с включением в него дополнительной фазовой координаты, полученной из критерия Фуллера:

$$x_0 = \int_0^{\infty} \left| x_1 \right|^q dt \to \min. \tag{2}$$

Здесь: $\mathbf{X} = (x_0, x_1, ..., x_n)$ – вектор фазовых координат расширенного объекта управления; q >1 – целое число, u – искомое управление.

2. В соответствии с теоремой об n-интервалах управлений [4], по уравнениям объекта записываются функциональные уравнения и определяются функции переключения каждого интервала, начиная с n-ного до первого. Если функция переключения первого интервала (для не расширенного объекта) известна, то переходят к следующему этапу.

3. Записывается функциональное уравнение и определяется функция переключения нулевого интервала.

4. Используя найденные ранее функции переключения, находится искомый закон управления.

Пример 1.

Задача Фуллера. Объект управления:

$$\dot{x}_1 = x_2\,, \quad \dot{x}_2 = u\,, \tag{3}$$

Критерий качества записан в виде (2). А.Т. Фуллер и вслед за ним многие авторы приводят следующий закон управления:

$$u = -\mathrm{sign}(x_1 + k \cdot |\, x_2 \,| \cdot x_2), \to k = 0.444623\,. \tag{4}$$

На рис. 1 приведены результаты моделирования объекта (3) с известным управлением (4) при минимизации интеграла (2) при $q = 2$, $x_0(0) = 0$, $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 0$.

Расширенный объект управления:

$$\dot{x}_0 = |\, x_1 \,|^q, \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u\,. \tag{5}$$

Функция переключения для первого интервала получена в [4]:

$$\psi_1 = x_1 + \frac{|\, x_2 \,|\, x_2}{2}. \tag{6}$$

Функциональное уравнение нулевого интервала:

$$\psi_0 = \psi_1 + |\, \psi_1 \,|\, u \equiv \mathrm{sign}(\psi_1) + u\,. \tag{7}$$

Функция переключения ψ_0 определяется интегрированием (7).

Искомый закон управления:

$$u = -\mathrm{sign}\left(\int \psi_0 \; dt + C\right), \tag{8}$$

где C – константа интегрирования (рис. 1), подбирается по минимуму критерия (координаты x_0) при моделировании для конкретных начальных условий.

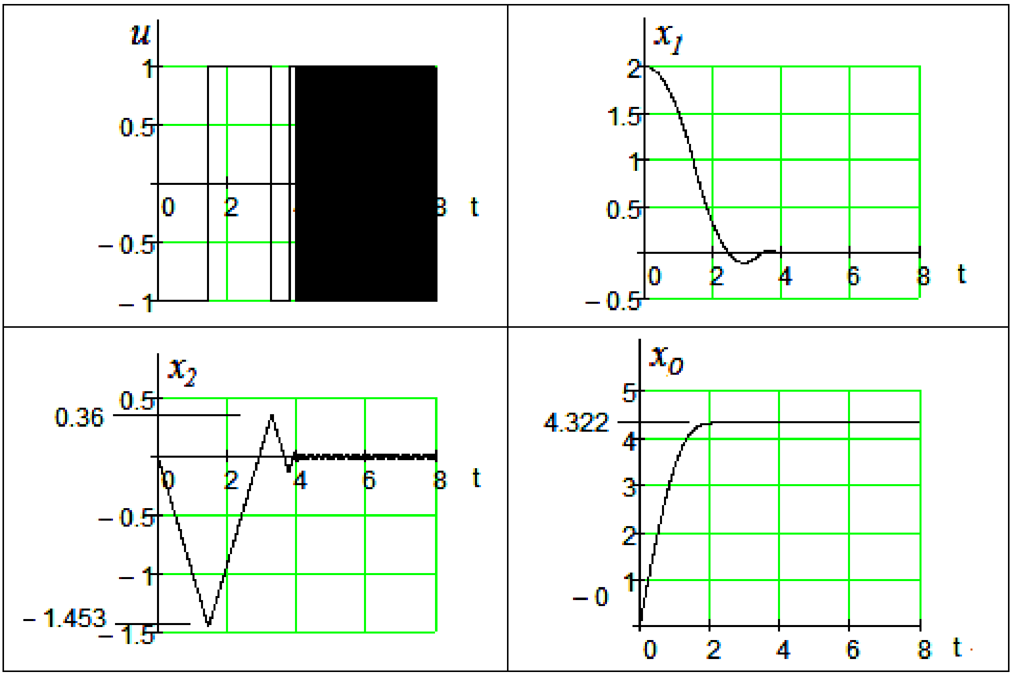

Рис. 1. Оптимальное управление объектом (3) по критерию (2) или оптимальное по быстродействию объектом (5) при C=0.08

По рассмотренной методике, определены постоянные интегрирования, численные значения критерия Фуллера и коэффициенты закона управления (3) задачи Фуллера при различных значениях q (табл. 1).

Табл. 1.

	C	k	x_0 **	x_0 при C=0	$x_0 = \min$
1	0.02	0.491438219	2.828	2.825	2.822
2	0.08	0.444623782*	4.337	4.336	4.322
3	0.13	0.425013686	7.354	7.353	7.338
4	0.196	0.389735922*	13.029	13.028	13.015
5	0.21	0.369475382	23.66	23.659	23.648
6	0.25	0.364746375	43.66	43.66	43.65
7	0.27	0.354142957	81.485	81.484	81.476
8	0.29	0.325643874	153.372	153.371	153.365

* – k совпадает с известным из [5] k для задачи Фуллера;
** – значение критерия при оптимальном по быстродействию управлении.

Пример 2.

Синтез закона оптимального управления для объекта:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3 \quad \dot{x}_3 = -ax_2 - (1+a)x_3 + au, \tag{9}$$

при квадратичном интегральном критерии качества:

$$J = x_0 = \int (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\, dt. \tag{10}$$

Оптимальное по критерию быстродействия управление для объекта (9) в реальных координатах приведено, например, в [4]:

$$u_1 = -\mathrm{sign}(\psi_1) = -\mathrm{sign}\left(y_1 - \frac{a}{a-1} d \left\{ 1 + \frac{(1+d_2)^{1/a} - 2}{[(d_2-1)/d_1]^{1/a}} \right\} \right), \tag{11}$$

где $d = \mathrm{sign}(y_3 + \ln(1 + a\cdot|\, y_2\,|)\mathrm{sign}(y_2))), \; d_1 = ady_2 - 1, \; d_2 = \left[1 + \left(d_1 e^{y_3/d}\right)\right]^{1/2},$

$$y_1 = \frac{ax_2 + x_3}{a-1}, \quad y_2 = -\frac{x_2 + x_3}{a}, \quad y_3 = a(x_1 - x_{1Z}) + (1+a)x_2 + x_3.$$

Здесь x_{1Z} – задающее воздействие по выходной координате x_1.

Оптимальное управление по критерию (10) определяется формулами (7), (8).

На рисунках 2 и 3 изображены результаты моделирования объекта (9) с управлением (21), (20) для $x_{1Z} = 1$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 0$, $C = 0.00016$.

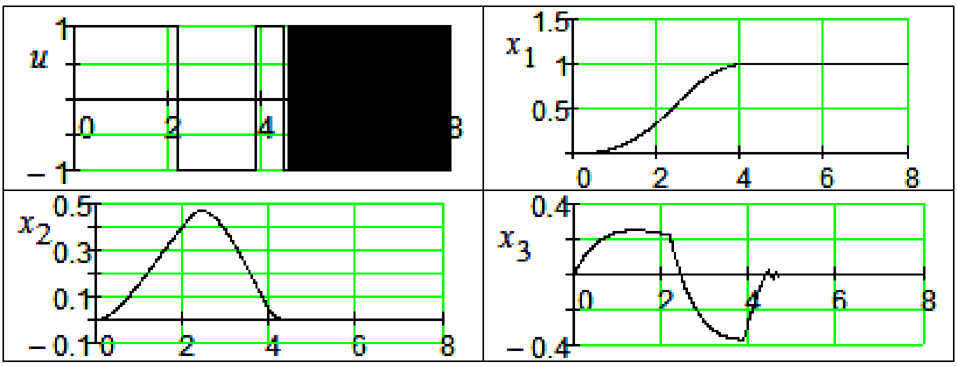

Рис. 2. Оптимальное управление по быстродействию

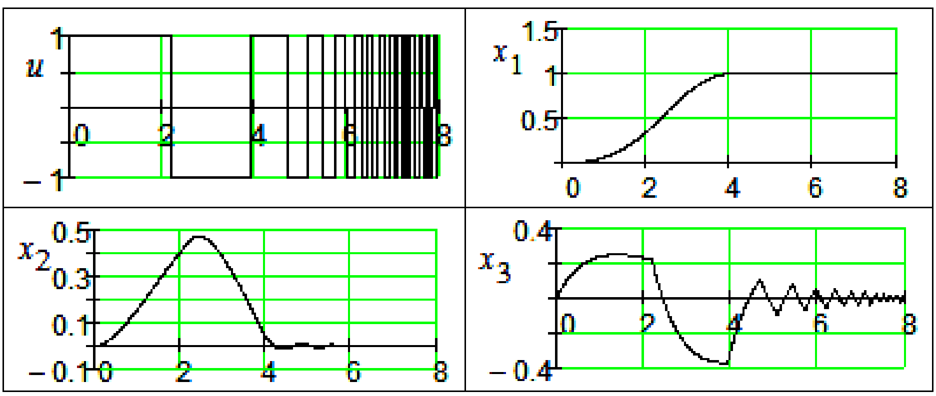

Рис. 3. Оптимальное управление по критерию (10)

Из рисунков 2, 3 следует, что переходный процесс по выходной координате при управлении по критерию (10) практически не отличается от переходного процесса при оптимальном по быстродействию управлении.

Выводы

1. Квадратичный критерий качества (критерий точности) в задачах оптимального управления приводит к колебательному переходному процессу даже для не осциллирующих (не колебательных) объектов.

2. С увеличением значения q в задаче Фуллера, колебательность переходного процесса возрастает.

3. С увеличением порядка объекта колебательность переменных вектора состояния объекта управления увеличивается, причем, чем ближе переменная к сигналу управления (чем дальше от выхода), тем больше «chattering» (болтанка).

4. Так уж ли необходимо решать проблему Фуллера с такими неоправданными затратами времени и усилиями, если известна причина появления проблемы – квадратичный критерий качества? Может надо не решать проблему, а просто выяснить физическую причину такого явления и не допускать его, как в авиации не допускают «флаттер», разрушающий конструкции летательного аппарата. Например, задаваться не квадратичным критерием, при котором реализуется «плохое» управление с «чаттеринг»-ом, а каким-то другим, например, критерием оптимального быстродействия.

5. Предложенный метод аналитического синтеза оптимального по быстродействию регулятора позволяет найти отимальное управление по любому наперед заданому критерию точности, а также найти критерий точности и условия, устраняющие «феномен Фуллера».

Список литературы

1. Фуллер А.Т. Оптимизация релейных систем регулирования по различным критериям качества // Труды IFAC (Москва, 1960). М., 1961. Т. 2. С. 584-605.
2. Zelikin M.I., Borisov V F. Theory of Chattering Control with applications to Astronautics, Robotics, Economics, and Engineering, Birkhäuser, Boston, MA, 1994.
3. Сухинин Б.В., Сурков В.В. Аналитическое конструирование робастных оптимальных по быстродействию систем управления с бесконечно большим коэффициентом усиления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2020. Т. 21, № 8. С.453-463.
4. Сурков В.В., Сухинин Б.В., Ловчаков В.И., Соловьев А.Э. Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов по критериям точности, быстродействию, энергосбережению. Монография. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2005. – 300 с.
5. Наумов Г.В. Анализ задач оптимального управления с учащающимися переключениями инвариантно-групповыми и численными методами.

Дисс. … канд. физ.-мат. наук. М.: Московский физико-технический институт (Государственный университет), 2005. 93 с.

References

1. Fuller A.T. Optimization of relay control systems according to various quality criteria // Proceedings IFAC (Moscow, 1960). M., 1961. Vol. 2. P. 584-605.
2. Zelikin M.I., Borisov V.F. Theory of Chattering Control with applications to Astronautics, Robotics, Economics, and Engineering, Birkhäuser, Boston, MA, 1994.
3. Suhinin B.V., Surkov V.V. Analytical design of robust performance-optimal control systems with infinitely large gain // Mekhatronika, avtomatizaciya, upravlenie. 2020. Vol. 21, № 8. P. 453-463.
4. Surkov V.V., Suhinin B.V., Lovchakov V.I., Solov'ev A.Je. Analytical's constraction of optimum regulators by criteria of accuracy, speed, power savings, Tula: Publ. house TulSU, 2005. 300 p.
5. Naumov G.V. Analysis of optimal control problems with increasing switching by invariant-group and numerical methods. Diss. ... cand. of phys. and math. sc. M.: Moscow Institute of Physics and Technology (State University), 2005. 93p.

Сухинин Борис Владимирович – доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, Тула, Россия, eeo@uic.tula.ru	**Sukhinin Boris Vladimirovich –** doctor of technical sciences, professor, Tula State University, Tula, Russia, eeo@uic.tula.ru
Сурков Виктор Васильевич – доктор технических наук, профессор, доцент, Тульский государственный университет, Тула, Россия, vvs150747@mail.ru	**Surkov Viktor Vasilevich –** doctor of technical sciences, professor, docent, Tula State University, Tula, Russia, vvs150747@mail.ru

Received 02.02.2021