https://doi.org/10.26160/2474-5901-2021-23-87-93

К ВОПРОСУ О ЛИНЕАРИЗАЦИИ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ АФФИННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

Филимонов А.Б., Филимонов Н.Б.

Ключевые слова: аффинные динамические объекты управления, метод линеаризации обратной связью по выходу, динамическая структура системы управления.

Аннотация. Обсуждаются вопросы применения метода линеаризации обратной связью (ЛОС) по выходу к аффинным динамически объектам управления. Анализируется динамическая структура систем управления, синтезируемых на базе данного метода. Показано, что формирование контура управления выходом объекта на базе метода ЛОС позволяет обеспечить лишь частичную устойчивость, а именно устойчивость по выходу замкнутой системе управления.

ON THE QUESTION OF LINEARIZATION BY FEEDBACK AFFINE DYNAMICAL CONTROL OBJECTS

Filimonov A.B., Filimonov N.B.

Keywords: affine dynamical control objects, the method of linearization by output feedback, the dynamic structure of the control system.

Abstract. The questions of applying the method of linearization by feedback (LF) on the output to affine dynamical control objects are discussed. The dynamic structure of the control systems synthesized on the basis of this method is analyzed. It is shown that the formation of the control loop of the object output based on the LF method allows to provide only partial stability - stability on the output-of the closed control system.

Введение

В современной теории автоматического управления важное место занимают исследования нелинейных аффинных систем. Весьма популярным подходом к решению различных задач управления динамическими аффинными объектами является использование метода линеаризации их динамики посредством обратной связи (linearization by output injection) [1, § 8.4; 2, гл. 13]. Суть данной линеаризации, предложенной в работах Брокетта (R.W. Brockett) [3], заключается в том, что нелинейная система, замкнутая искомым управлением, будет вести себя эквивалентно линейной.

Метод линеаризации обратной связью (ЛОС) применим для объектов, которые заданы нелинейными дифференциальными уравнениями с аддитивным входным воздействием или для объектов, выходные величины которых нелинейно связаны с переменными состояния. В первом случае такая линеаризация называется *линеаризацией по состоянию*, а во втором случае – *линеаризацией по выходу*.

В статье обсуждается вопросы применения метода ЛОС по выходу к SISO-объектам. Анализируется динамическая структура систем управления, синтезируемых на базе данного метода.

Метод линеаризации обратной связью про выходу

Класс аффинных динамических SISO-объектов управления описывается уравнениями в переменных состояния вида

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x})+\mathbf{g}(\mathbf{x})u\,, \qquad (1)$$
$$y=h(\mathbf{x})\,, \qquad (2)$$
где $t\in[0,\infty)$, $u\in\mathbf{R}$ - управляющий вход, $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$ - вектор состояния, $y\in\mathbf{R}$ - управляемый выход; $\mathbf{f}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{g}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ - гладкие векторные функции; $h:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ - гладкая скалярная функция.

ЛОС аффинного динамического объекта направлена на получение эквивалентной линейной модели в новых переменных состояния. Изложим вкратце суть метода ЛОС, основанного аппарате дифференциальной геометрии [4].

Обозначим через η *относительную степень* (relative degree) системы (1), (2), определяемую как минимальное число производных по времени, взятых от равенства (2) в силу уравнения (1), при котором в выражение для этой производной управляемого выхода $y^{(\eta)}$ входит явно управляющий вход u. Тогда
$$y^{(k)}=c_k(\mathbf{x}),\ k=0:\eta-1;$$
$$y^{(\eta)}=c_\eta(\mathbf{x})+d_\eta(\mathbf{x})u\,. \qquad (3)$$

Здесь функции $c_k(\mathbf{x})$ определяются рекуррентными соотношениями
$$c_0(\mathbf{x})=h(\mathbf{x}),\quad c_{k+1}(\mathbf{x})=\langle\frac{\partial c_k(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}},\mathbf{f}(\mathbf{x})\rangle,\ \ k=0:\eta-1,$$
(угловые скобки $\langle,\rangle$ обозначают скалярное произведение векторов), а функция $d_\eta(\mathbf{x})$ - равенством
$$d_\eta(\mathbf{x})=\langle\frac{\partial c_{\eta-1}(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}},\mathbf{g}(\mathbf{x})\rangle\,.$$

Примечание. Функция $c_\eta(\mathbf{x})$ и $d_\eta(\mathbf{x})$ можно выразить через производные Ли (Lie derivative) по векторным функциям $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ [4]:
$$c_\eta(\mathbf{x})=L_f^\eta h(\mathbf{x}),\ d_\eta(\mathbf{x})=L_g L_f^{\eta-1}h(\mathbf{x})\,.$$

Положим, что функция $d_\eta(\mathbf{x})$ является знакопостоянной, т.е. при любом $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$
$$d_\eta(\mathbf{x})\neq 0\,.$$

Примечание. В случае $\eta=n$ записывая уравнение (3) в переменных состояния
$$z_i=\mathrm{y}^{(i-1)}\,(i=1:n)\,,$$
мы получим так называемую *регулярную систему канонического вида* (каноническую форму управления Бруновского [5]).

В методе ЛОС формируется новый, *внешний* управляющий вход v :

$$u = \frac{1}{d_\eta(\mathbf{x})}(-c_\eta(\mathbf{x}) + v). \tag{4}$$

Подстановка данного выражения в (3) дает

$$y^{(\eta)} = v. \tag{5}$$

Таким образом, в результате ЛОС выход объекта описывается цепочкой интеграторов η-го порядка. Далее предлагается посредством внешней переменной v осуществлять управление выходом объекта y.

Уравнение состояния объекта получим подстановкой (4) в (1):

$$\dot{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x})v,$$

где $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \frac{c_\eta(\mathbf{x})}{d_\eta(\mathbf{x})}\mathbf{g}(\mathbf{x})$, $\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{d_\eta(\mathbf{x})}\mathbf{g}(\mathbf{x})$.

Схема формирования управления, выражаемая формулой (4), по существу, является особым видом *коррекции* канала управления выходом объекта.

Важно отметить, что получение регулярной системы канонического вида для аффинного объекта возможно лишь при специальном выборе функции выхода $h(\mathbf{x})$. Поэтому типическим является случай $m \geq 1$ (т.е. $\eta < n$) - но тогда дифференциальное уравнение (5) представляет не полную динамику скорректированного объекта, а лишь динамику его линеаризованной подсистемы η-го порядка с управляющим входом v. Фактически посредством механизма ЛОС по выходу реализуется управление по части переменных и в системе протекают скрытые динамические процессы, не учитываемые в динамике подсистемы (5).

Теоретический интерес представляет вопрос о динамической структуре скрытых динамических процессов, не учитываемых в линеаризованной подсистеме. Обсудим этот вопрос применительно к классу линейных объектов.

Анализ механизма линеаризации обратной связью на классе линейных объектов управления

Пусть линейный объект управления описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \tag{6}$$

$$y = \mathbf{c}\mathbf{x}, \tag{7}$$

где $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^{n\times 1}$, $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^{1\times n}$ - числовые матрицы.

Полагаем, что тройка матриц $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ вполне управляема и наблюдаема.

Передаточная функция (ПФ) объекта управления равна

$$W(s) = \mathbf{c}(\mathbf{E}_n s - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}, \tag{8}$$

где $\mathbf{E}_n$ - единичная матрица n-го порядка, s - комплексная частота.

Представим ПФ (8) в дробном виде:

$$W(s) = \frac{kB(s)}{A(s)}. \qquad (9)$$

Здесь $k \neq 0$ - константа, $A(s)$, $B(s)$ - унитарные многочлены степеней n и m соответственно, $m < n$:

$$A(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i, \ B(s) = \sum_{j=0}^{m} b_j s^j,$$

причем

$$b_m = 1. \qquad (10)$$

Далее полагаем

$$m > 1.$$

Относительная степень ПФ равна разности между степенями полиномов ее знаменателя и числителя:

$$\eta = n - m.$$

Дифференцируя выходной сигнал $y(t)$ η раз, с учетом (6) и (7) получаем

$$y^{(\eta)} = \mathbf{c}\mathbf{A}^{\eta}\mathbf{x} + ku.$$

Выполняя коррекцию канала управления в соответствии с (4)

$$u = \frac{1}{k}(-\mathbf{c}\mathbf{A}^{\eta}\mathbf{x} + v),$$

получим (5). Подстановка данного выражения в (6) дает уравнение состояния скорректированного объекта

$$\dot{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \overline{\mathbf{b}}v, \qquad (11)$$

где $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \frac{1}{k}\mathbf{b}\mathbf{c}\mathbf{A}^{\eta}$, $\overline{\mathbf{b}} = \frac{1}{k}\mathbf{b}$.

Посредством преобразования подобия

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{x}},$$

где $\mathbf{T}$ - неособая квадратная матрица, а $\tilde{\mathbf{x}}$ - новый вектор состояния, уравнения (11) и (7) преобразуются к виду

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{b}}v, \qquad (12)$$

$$y = \tilde{\mathbf{c}}\tilde{\mathbf{x}}, \qquad (13)$$

причем справедливы соотношения

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\overline{\mathbf{A}}\mathbf{T}, \ \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{T}^{-1}\overline{\mathbf{b}}, \ \tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c}\mathbf{T}.$$

В частности, посредством замены координат состояния можно перейти к канонической форме управляемости (канонической форме Фробениуса).

Используя метод фазовой переменной [6], представим динамику объекта уравнениями:

$$\xi^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \xi^{(i)}(t) = u(t),$$

$$y(t)=\sum_{j=0}^{m} b_j \xi^{(j)}(t), \quad (14)$$

где ξ - скалярная переменная состояния (так называемая фазовая переменная).

Вектор состояния $\mathbf{x}_F$ в форме Фробениуса образован переменной ξ и ее производными:

$$\mathbf{x}_F=(\xi, \xi^{(1)}, ..., \xi^{(n-1)})^{\mathrm{T}}.$$

Утверждение. При соответствующем выборе новой системы координат уравнения (12), (13) преобразуются к виду

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1=\tilde{\mathbf{A}}_{11}\tilde{\mathbf{x}}_1+\tilde{\mathbf{b}}_1 v, \quad (15)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2=\tilde{\mathbf{A}}_{21}\tilde{\mathbf{x}}_1+\tilde{\mathbf{A}}_{22}\tilde{\mathbf{x}}_2, \quad (16)$$

$$y=\mathbf{c}\mathbf{T}_1\tilde{\mathbf{x}}_1. \quad (17)$$

Здесь $\tilde{\mathbf{x}}_1\in\mathbf{R}^m$, $\tilde{\mathbf{x}}_2\in\mathbf{R}^\mu$, а $\tilde{\mathbf{A}}_{11}$, $\tilde{\mathbf{A}}_{21}$, $\tilde{\mathbf{A}}_{22}$, $\tilde{\mathbf{b}}_1$, $\mathbf{T}_1$ - матрицы соответствующих размеров. При этом характеристический многочлен матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_{22}$ совпадает с многочленом $B(s)$:

$$\det(\mathbf{E}_\eta s-\tilde{\mathbf{A}}_{22})=B(s). \quad (18)$$

Доказательство. Уравнения (15)–(17) означают декомпозицию системы на две подсистемы с векторами состояния $\tilde{\mathbf{x}}_1$ и $\tilde{\mathbf{x}}_2$. Таким образом,

$$\tilde{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{x}}_1\\ \tilde{\mathbf{x}}_2\end{bmatrix},\ \mathbf{T}=\left[\mathbf{T}_1,\mathbf{T}_2\right],$$

где $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$ - подматрицы матрицы $\mathbf{T}$ размеров $n\times\eta$ и $n\times m$ соответственно.

В общем случае такая декомпозиция системы приводи к уравнениям состояния вида

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1=\tilde{\mathbf{A}}_{11}\tilde{\mathbf{x}}_1+\tilde{\mathbf{A}}_{12}\tilde{\mathbf{x}}_2+\tilde{\mathbf{b}}_1 v, \quad (19)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2=\tilde{\mathbf{A}}_{21}\tilde{\mathbf{x}}_1+\tilde{\mathbf{A}}_{22}\tilde{\mathbf{x}}_2+\tilde{\mathbf{b}}_2 v, \quad (20)$$

$$y=\mathbf{c}\mathbf{T}_1\tilde{\mathbf{x}}_1+\mathbf{c}\mathbf{T}_2\tilde{\mathbf{x}}_2. \quad (21)$$

Выберем новые координаты состояния следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{x}}_1=(y, y^{(1)},..., y^{(\eta-1)}),\ \tilde{\mathbf{x}}_2=(\xi,\xi^{(1)},...,\xi^{(m-1)}).$$

Уравнения (19) и (21) представляют в канонической форме переменных состояния динамику подсистемы (5). Следовательно, матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_{12}$ и $\mathbf{T}_2$ - нулевые:

$$\tilde{\mathbf{A}}_{12}=0,\ \mathbf{T}_2=0.$$

Из (14) с учетом (10) следует соотношение

$$\xi^{(m)}=y-\sum_{j=0}^{m-1} b_j \xi^{(j)},$$

определяющее динамику подсистемы (20). Отсюда вытекает равенство

$$\tilde{\mathbf{b}}_2=0$$

и соотношение (18). Утверждение доказано.

Уравнения (15)–(17) поясняют структурные свойства скорректированного объекта – он *расщепляется на две подсистемы*: вполне управляемую и наблюдаемую, описываемую дифференциальным уравнением (5), и ненаблюдаемую, характеристический многочлен которой определяется числителем ПФ (9). Но это означает, неправомерность применения изложенного метода в двух случаях: ПФ – неминимально-фазовая, либо минимально-фазовая, но имеет левые нули, близкие к мнимой оси. В первом случае ненаблюдаемая подсистема оказывается неустойчивой, а во втором – слабо демпфированной.

Выводы

Выполненный анализ динамической структуры систем управления с ЛОС по выходу позволяет сделать следующие выводы.

В случае, когда относительная степень объекта меньше его динамического порядка, метод ЛОС по выходу по своей сути является компенсационным [7, 8], причем в результате его применения в системе управления образуется ненаблюдаемая подсистема. Свойства устойчивости данной подсистемы не зависят от выбора контура управления выходом и могут быть неприемлемыми с точки зрения поставленной цели управления. В классе линейных объектов полюса ненаблюдаемой подсистемы совпадают с нулями передаточной функции объекта.

Таким образом, формирование контура управления выходом объекта на базе рассматриваемого метода линеаризации позволяет обеспечить лишь частичную устойчивость (точнее, устойчивость по выходу [9]) замкнутой системе управления.

Список литературы

1. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. – М.: Физматлит, 2004. – 464 с.
2. Халил Х.К. Нелинейные системы. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хоатическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. – 832 с.
3. Brockett R.W. Feedback Invariants for Nonlinear Systems // Proceeding VII IFAC Congress, vol. 11, Issue 1, Helsinki, 1978. – P. 115-1120.
4. Краснощеченко В.И., Крищенко А.П. Нелинейные системы: неометрические методы анализа и синтеза. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. – 520 с.
5. Brunovsky P.A. A classification of Linear Controllable Systems // Kybernetika. 1970. – Vol. 6. – P. 173-188.
6. Солодовников В.В., Филимонов А.Б., Филимонов Н.Б. Метод фазового пространства в задачах управления линейными конечномерными объектами // Автоматика. – 1981. – № 2. – С. 55-67.

7. Солодовников В.В., Филимонов Н.Б. Динамическое качество систем автоматического регулирования. – М.: МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1987. – 84 с.
8. Филимонов А.Б., Филимонов Н.Б. Управление нулями и полюсами в задачах синтеза систем регулирования. Ч. I. Компенсационный подход // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2020. – № 8. – С. 443-452.
9. Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. – СПб.: Наука, 2000. – 549 с.

References

1. Kim D.P. Theory of automatic control. Vol. 2. Multidimensional, nonlinear, optimal and adaptive systems. – Moscow: Fizmatlit, 2004. – 464 p.
2. Khalil H.K. Nonlinear Systems. New Jersey: Prentice Hall, 2002. – 750 p.
3. Brockett R.W. Feedback Invariants for Nonlinear Systems // Proceeding VII IFAC Congress, vol. 11, Issue 1, Helsinki, 1978. – P. 115-1120.
4. Krasnoshchechenko V.I., Krishchenko A.P. Nonlinear systems: geometric methods of analysis and synthesis. – Moscow: BMSTU, 2005. – 520 p.
5. Brunovsky P.A. A classification of Linear Controllable Systems // Kybernetika. 1970. – Vol. 6. – P. 173-188.
6. Solodovnikov V.V., Filimonov A.B., Filimonov N.B. Phase Space Method in Control Problems for Linear Finite-Dimensional Objects // Avtomatika. – 1981. – No. 2. – P. 55-67.
7. Solodovnikov V.V., Filimonov N.B. Dynamic Quality of Automatic Control Systems. – Moscow: BMSTU, 1987. – 84 p.
8. Filimonov A.B., Filimonov N.B. Control of Zeros and Poles in Problems of Synthesis of Regulation Systems. Part I. Compensation Approach // Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie. – 2020. – Vol. 21, No. 8. – P. 443-452.
9. Miroshnik I.V., Nikiforov V.O., Fradkov A.L. Nonlinear and adaptive control of complex dynamic systems. – St. Petersburg: Science, 2000. – 549 p.

Филимонов Александр Борисович – доктор технических наук, профессор, МИРЭА – Российский технологический университет; Московский авиационный институт (НИУ), Москва, Россия; filimon_ab@mail.ru	**Filimonov Alexandr Borisovich** – doctor of technical sciences, professor, MIREA - Russian Technological University; Moscow Aviation Institute (NRU), Moscow, Russia; filimon_ab@mail.ru
Филимонов Николай Борисович – доктор технических наук, профессор, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова; Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия, nbfilimonov@mail.ru	**Filimonov Nikolay Borisovich** – doctor of technical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University; Trapeznikov Institute of Control Problems RAS, Moscow, Russia, nbfilimonov@mail.ru

Received 02.02.2021