

ЦИФРОВАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ СФЕРИЧЕСКИМ МАЯТНИКОМ

Заика В.В., Масленников А.Л.

Ключевые слова: сферический маятник, нелинейные системы, метод компенсации нелинейностей, ПИ-регулятор, АЦП, ЦАП, цифровая система управления, расширенный фильтр Калмана.

Аннотация. Задача синтеза нелинейных систем управления, особенно при практической реализации на цифровых вычислителях, может быть решена несколькими способами, каждый из которых не является универсальным. В работе рассматривается синтез цифровой системы управления сферическим маятником с использованием ПИ-регуляторов, метода компенсации нелинейностей и метода переоборудования, а также гибридной версии расширенного фильтра Калмана для оценки вектора состояния непрерывной нелинейной системы. Результаты моделирования для сформированной непрерывно-дискретной системы показывают принципиальную применимость описанного подхода синтеза цифровой системы управления.

DIGITAL CONTROL OF THE SPHERICAL PENDULUM

Zaika V.V., Maslennikov A.L.

Keywords: spherical pendulum, nonlinear systems, nonlinearities compensation, PI control, ADC, DAC, digital control, extended Kalman filter.

Abstract. Nonlinear control synthesis, especially for practical applications with digital controllers, could be solved using different approaches, but no one of them could be applied to an arbitrary system. In this paper digital control system synthesis problem for the spherical pendulum is considered. The proposed control is based on the combination of the linear PI-control, feedback linearization (nonlinearity compensation method) and PID digital redesign. The hybrid version of the extended Kalman filter is used to estimate the state of the continuous nonlinear system. The simulation results showed that the proposed approach is applicable for such control synthesis problems.

Введение

Синтез управления непрерывных нелинейных систем связан с рядом сложностей, например, с отсутствием универсальных алгоритмов или методов формирования управляющего воздействия, а также ввиду практической необходимости реализации управления внутри цифрового контроллера, что требует оценки вектора состояния непрерывной системы, точность которой имеет определенную ошибку [1].

Как следствие для синтеза цифровой системы управления непрерывной нелинейной системы необходимо формирование непрерывно-дискретной модели системы и ее последующего анализа. В данной работе рассматривается синтез цифровой системы управления непрерывной нелинейной системы, на примере однозвенного физического сферического маятника, математическая модель которого имеет следующий вид:

$$\ddot{\theta} = \frac{m r_c^2 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta + mgr_c \sin \theta + u_\theta - \mu \dot{\theta}}{(mr_c^2 + \frac{m_l l^2}{3} + m_b(r+l)^2)}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{\varphi} = \frac{u_{\varphi} - 2 \cdot m r_c^2 \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta - \mu \dot{\varphi}}{(m r_c^2 \sin^2 \theta + \frac{m_l l^2}{3} + m_b (r + l)^2)} \end{aligned} \right. \quad (1)$$

где θ и φ – углы поворота звеньев в сферической системе координат, μ_1, μ_2 – коэффициенты демпфирования, m – масса маятника, l – длина стержня массой m_l , r_c – радиус-вектор, соединяющий точку отсчета с центром масс системы, r – радиус шара массой m_b , u_{θ}, u_{φ} – управляющие воздействия по координатам θ и φ соответственно [2]. Для решения задачи синтеза цифровой системы управления используются метод компенсации нелинейностей и метод переоборудования ПИ-регуляторов, настройка которых ПИ-регуляторов реализуется с использованием эволюционного метода оптимизации, а оценка вектора состояния с использованием гибридного расширенного фильтра Калмана.

Методы

Метод компенсации нелинейностей. Управление линейными системами достаточно часто строится на основе ПИД-регуляторов или модального управления. Их применение для синтеза нелинейных систем управления, строго говоря, возможно вместе с применением подхода линеаризации обратной связью и ее частного случая – метода компенсации нелинейностей [1]. Для рассматриваемой системы из уравнений (1) законы управления, сформированные по методу компенсации нелинейностей, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} u_{\theta} &= -(m r_c^2 x_4^2 \sin x_1 \cos x_1 + m g r_c \sin x_1) + \left(m r_c^2 + \frac{m_l l^2}{3} + m_b (r + l)^2 \right) v_{\theta} \\ u_{\varphi} &= 2 m r_c^2 x_4 x_2 \sin x_1 \cos x_1 + \mu x_4 \\ &\quad - \left(m r_c^2 \sin^2 x_1 + \frac{m_l l^2}{3} + m_b (r + l)^2 \right) \left(\frac{\mu x_4}{m r_c^2 + \frac{m_l l^2}{3} + m_b (r + l)^2} - v_{\varphi} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

где v_{θ}, v_{φ} – линейные законы управления – ПИ-регуляторы, которые формируются по величинам ошибок углов отклонения (относительно заданных) и отклонений угловых скоростей относительно нулевых [3].

Использование уравнений (2) позволяет формально перейти к линейной системе, и уже для нее провести настройку ПИ-регуляторов. Для многомерных систем целесообразно настройку ПИ-регуляторов сформулировать как оптимизационную задачу следующим образом:

$$\mathbf{k}_{\text{опт}} = \arg \min_{\mathbf{k} \in K} (J(\mathbf{k}, \mathbf{x})), \quad (3)$$

где K – множество допустимых значений коэффициентов ПИ-регуляторов, а $J(\mathbf{k}, \mathbf{x})$ – общая целевая функция и вектор коэффициентов ПИ-регуляторов:

$$\mathbf{k} = [k_{p\theta} \quad k_{i\theta} \quad k_{p\varphi} \quad k_{i\varphi} \quad k_{p\dot{\theta}} \quad k_{i\dot{\theta}} \quad k_{p\dot{\varphi}} \quad k_{i\dot{\varphi}}]. \quad (4)$$

Общую целевую функцию в общем случае можно представить в виде суммы нескольких критериев оптимизации:

$$J = \sum J_i = J_1 + J_2 + J_3 + J_4, \quad (5)$$

где J_1, J_2 – обеспечивают минимизацию ошибки регулирования относительно заданных значений углов и угловых скоростей, а J_3, J_4 минимизацию характеристик качества – перерегулирования $\eta_\theta, \eta_\varphi$ и времени переходного процесса $T_{\text{пр},\theta}, T_{\text{пр},\varphi}$ по каждой координате с учетом заданных весовых коэффициентов α_{ij} :

$$J_1 = [\alpha_{11} \quad \alpha_{12}] \begin{bmatrix} \theta - \theta_{\text{зад}} \\ \varphi - \varphi_{\text{зад}} \end{bmatrix}, J_2 = [\alpha_{21} \quad \alpha_{22}] \begin{bmatrix} \dot{\theta} - \dot{\theta}_{\text{зад}} \\ \dot{\varphi} - \dot{\varphi}_{\text{зад}} \end{bmatrix},$$

$$J_3 = [\alpha_{31} \quad \alpha_{32}] \begin{bmatrix} \eta_\theta \\ \eta_\varphi \end{bmatrix}, J_4 = [\alpha_{41} \quad \alpha_{42}] \begin{bmatrix} T_{\text{пр},\theta} \\ T_{\text{пр},\varphi} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Эволюционные методы настройки ПИД-регуляторов. Для решения поставленной оптимизационной задачи классические детерминированные методы оптимизации не подходят ввиду сильной нелинейной зависимости характеристик качества, входящих в критерии оптимизации в уравнении (6), от подбираемых параметров ПИ-регуляторов. Поэтому целесообразно использовать эволюционные методы оптимизации, например на основе генетического алгоритма [4-5].

Математическая модель непрерывно-дискретной системы. Полная математическая модель цифровой системы управления может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{t}) \\ \mathbf{u} = \mathbf{M}_{\text{ЦАП}}(\mathbf{u}^*) \\ \mathbf{y}^* = \mathbf{M}_{\text{АЦП}}(\mathbf{y}) \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{t}) \end{cases} \quad (7)$$

где \mathbf{x} – вектор состояния непрерывной системы, $\mathbf{f}(\cdot)$ – описывает динамику непрерывной системы, $\mathbf{h}(\cdot)$ – модель измерений, $\mathbf{M}_{\text{ЦАП}}(\cdot), \mathbf{M}_{\text{АЦП}}(\cdot)$ – математические модели ЦАП и АЦП соответственно, \mathbf{u}, \mathbf{y} – непрерывные, а $\mathbf{u}^*, \mathbf{y}^*$ – дискретные вектора управления и выхода.

Математическая модель АЦП при преобразовании непрерывного сигнала $r(t)$ в цифровой $r^*[k]$ в моменты времени t_k с заданными уровнями квантования, описывается следующим образом:

$$r^*[k] = R_{\text{ц}} \text{round} \left(\frac{r(t_k)}{R} \right), \quad (8)$$

где $R_{\text{ц}}$ – коэффициент пропорциональности, который принимается равным разрешению R двоичного АЦП.

Математическую модель преобразования цифрового сигнала в непрерывный с помощью ЦАП можно представить в виде:

$$r(t) = \frac{U_{\text{ЦАП}}}{\delta_{\text{ЦАП}} (2^{n_{\text{ЦАП}}-1} - 1)} r^*[k], \quad (9)$$

где $U_{\text{ЦАП}}$ – максимальное выходное напряжение, $\delta_{\text{ЦАП}}$ – величина единицы младшего разряда ЦАП, $n_{\text{ЦАП}}$ – разрядность двоичного ЦАП.

Метод переоборудования. Для реализации ПИ-законов управления в цифровом вычислителе необходимо перевести ПИ-регулятор в дискретную форму, что можно реализовать с использованием метода переоборудования [6]. В этом случае линейные законы управления v_θ , v_φ примут вид:

$$\begin{aligned} v_\theta(k) &= v_\theta(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) \\ v_\varphi(k) &= v_\varphi(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) \end{aligned} \quad (10)$$

где коэффициенты q_0 , q_1 определяются по коэффициентам ПИ-регуляторов, ранее полученным решением описанной выше оптимизационной задачи для непрерывной системы, следующим образом:

$$\begin{aligned} q_0 &= K, \\ q_1 &= -K \left(1 - \frac{T_0}{T_I} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Расширенный гибридный фильтр Калмана. В непрерывно-дискретных системах при формировании управления, необходимо на каждом шаге работы цифровой системы проводить оценку вектора состояния непрерывной системы, что может быть реализовано различными гибридными версиями, например расширенного фильтра Калмана [8].

Каждый шаг итерационного процесса гибридного расширенного фильтра Калмана состоит из двух этапов – прогноза и коррекции. На этапе прогноза вычисляются априорные оценки вектора состояния и ковариационной матрицы, путем интегрирования следующих дифференциальных уравнений на интервале $[t_{k-1}, t_k]$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \text{ при } \hat{\mathbf{x}}(t_{k-1}) = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \\ \dot{\mathbf{P}}(t) &= \mathbf{F}_k \mathbf{P}(t_{k-1}) + \mathbf{P}(t_{k-1}) \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_k \text{ при } \mathbf{P}(t_{k-1}) = \mathbf{P}_{k|k-1}, \end{aligned} \quad (12)$$

где \mathbf{Q}_k – ковариационная матрица входных шумов, \mathbf{F}_k – матрица первых частных производных, вычисленная в момент времени t_k по известному значению апостериорной оценки $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$ с предыдущего шага. На этапе коррекции происходит вычисление апостериорных оценок вектора состояния и ковариационной матрицы по следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_k &= \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}} = \mathbf{C} \\ \mathbf{S}_k &= \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \\ \mathbf{z}_k &= \mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \\ \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{S}_k^{-1} \end{aligned}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \mathbf{z}_k \quad (13)$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T$$

где \mathbf{H}_k – матрица первых частных производных модели измерений, а \mathbf{R}_k – ковариационная матрица измерительных шумов. Как правило, модель измерений $\mathbf{h}(\cdot)$ является линейной и вычисление матрицы \mathbf{H}_k не требуется.

Отметим, что для вычисления положительно определенной априорной оценки ковариационной матрицы $\mathbf{P}_{k|k-1}$ из уравнения (12) используется идея разложения Холецкого [7].

Результаты

Параметры непрерывной и дискретной частей рассматриваемой цифровой системы управления физического сферического маятника следующие:

Масса маятника m_T , кг	1
Масса шара m_b , кг.....	0,9
Масса стержня m_l , кг.....	0,1
Радиус шара r , м.....	0,1
Длина стержня l , м.....	0,9
Управляющее воздействие по углу θ , Н.....	0
Управляющее воздействие по углу φ , Н.....	0
Коэффициент демпфирования μ , Дж · с ² /м ²	0,2
Период дискретизации T_0 , с.....	0,01
Шаг моделирования динамики непрерывной системы h , с.....	10 ⁻³
Максимальное выходное напряжение ЦАП $U_{\text{ЦАП}}$, В.....	8
Максимальное значение оцифровываемой величины φ_{max} , Н.....	10
Разрядность АЦП $n_{\text{АЦП}}$, бит.....	8
Входной шум R , дБ.....	10
Измерительный шум Q , дБ.....	0,001

В результате численного моделирования, реализованного в системе научных вычислений MathWorks MATLAB, с учетом следующих начальных условий и матрицы \mathbf{C} модели измерений

$$\mathbf{x}(t_0) = [\theta = \pi/2 \quad \dot{\theta} = 0 \quad \varphi = \pi/2 \quad \dot{\varphi} = 0], \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

были получены графики переходных процессов, представленные на рис. 1, которые наглядно иллюстрируют, что задача регулирования решается, а также что при наличии шумов и процесса квантования имеется некоторое отличие в динамике цифровой системы управления от непрерывной.

Обсуждения

Рассмотренный в работе подход по формированию цифровой системы управления может быть использован для произвольной нелинейной системы, к которой может быть применен метод компенсации нелинейностей. Помимо этого, при практической реализации необходимо выбрать АЦП и ЦАП с достаточной битностью и микроконтроллер с достаточным быстродействием.

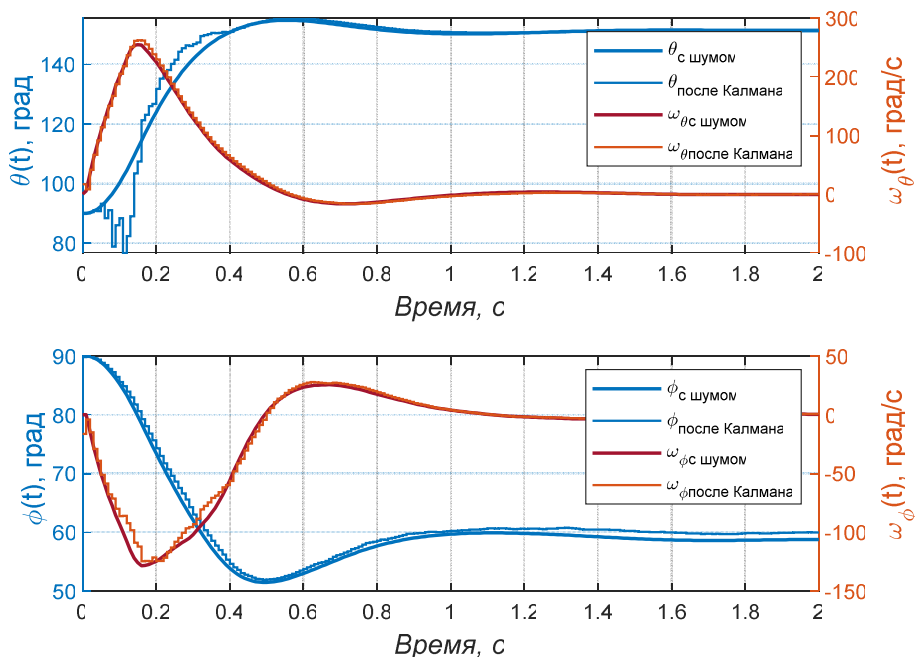


Рис. 1. Результаты моделирования цифровой системы управления

Заключение

В работе рассмотрена задача синтеза цифровой системы управления непрерывной нелинейной системой физического сферического маятника с использованием ПИ-регуляторов, включающей в себя математические модели АЦП, ЦАП, а также алгоритмы оценки вектора состояния непрерывной системы. Синтез непрерывной системы осуществлен с использованием метода компенсации нелинейностей и настройкой ПИ-регуляторов с помощью эволюционных методов. Цифровые эквиваленты ПИ-регуляторов были получены с использованием метода переоборудования. Оценка вектора состояния непрерывной системы осуществлялась гибридным расширенным фильтром Калмана. Результаты моделирования системы показали применимость рассмотренного подхода.

Список литературы

1. Khalil H.K. Nonlinear Systems, 3rd Edition, Prentice Hall, 2002, 750 p.
2. Заика В.В., Масленников А.Л. Математическое моделирование однозвенного сферического маятника в сферической системе координат // Политехнический молодежный журнал МГТУ имени Н.Э. Баумана. Электронный журнал. 2019. Вып. 9. С. 1-9. DOI: 10.18698/25418009-2019-09-522.
3. Заика В.В., Масленников А.Л. Синтез системы регулирования сферического маятника методом компенсации нелинейностей // Фундаментальные основы механики. 2019. №4. С. 74-79. DOI: 10.26160/2542-0127-2019-4-74-79.

4. Куцкий Н.Н., Лукьянов Н.Д. Применение генетического алгоритма для оптимизации автоматических систем с ПИД-регулятором // Вестник ИрГТУ. 2012. №6 (65). С. 6-10.
5. Рядчиков И.В., Гусев А.А., Сеченев С.И., Никольчев Е.В. Генетический алгоритм поиска параметров ПИД-регуляторов системы стабилизации шагающего робота // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2019. №1 (124). С. 57-65.
6. Изерман Р. Цифровые системы управления. Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 541 с.
7. Лысухо Г.В., Масленников А.Л. Реализация расширенного фильтра Калмана для нелинейной модели двухзвенного маятника // Политехнический молодежный журнал МГТУ имени Н.Э. Баумана. Электронный журнал. 2019. №8. DOI: 10.18698/2541-8009-2019-8-513.

References

1. Khalil H.K. Nonlinear Systems, 3rd Edition, Prentice Hall, 2002, 750 p.
2. Zaika V.V., Maslennikov A.L. Single-joint spherical pendulum mathematical modeling in spherical coordinate system // Polytechnical student journal. 2019. №9(38). DOI: 10.18698/25418009-2019-09-522
3. Zaika V.V., Maslennikov A.L. Spherical pendulum control synthesis via nonlinearities compensation // Fundamental basics of mechanics. 2019. №4. P.74-79. DOI: 10.26160/2542-0127-2019-4-74-79
4. Kutsyi N.N., Lukyanov N.D. Using Genetic Algorithm for Optimization of Automatic Systems with PID Control // Proceedings of Irkutsk State Technical University. 2012. №6 (65). P. 6-10.
5. Ryadchikov I.V., Gusev A.A., Sechenev S.I., Nikulchev E.V. Genetic Algorithm for Search PID-Controllers Parameters of a Walking Robot Stabilization // Proceedings of NNSTU n.a. R.E. Alekseev. 2019. №1(124). P.57-65.
6. Isermann R. Digital Control Systems. Springer Science & Business Media, 2013, p. 541.
7. Lysukho G.V., Maslennikov A.L. Extended Kalman filter application to the nonlinear two-link pendulum model // Polytechnical student journal. 2019. №8. DOI: 10.18698/2541-8009-2019-8-513

Заика Валерия Владимировна – студентка	Zaika Valeriya Vladimirovna – student
Масленников Андрей Леонидович – старший преподаватель кафедры «Системы автоматического управления», amas@bmstu.ru	Maslennikov Andrey Leonidovich – senior lecturer of Department of Automatic Control Systems, amas@bmstu.ru
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, г.Москва, Россия	Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Received 23.09.2020