https://doi.org/10.26160/2474-5901-2020-21-68-74

К ВОПРОСУ ПОСТРОЕНИЯ МОДАЛЬНЫХ КОМПЕНСАТОРОВ В МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМАХ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Филимонов А.Б., Филимонов Н.Б.

Ключевые слова: многомерные объекты управления, задача модальной стабилизации, модальный синтез системы регулирования, структура модального компенсатора.
Аннотация. Рассматривается задача линейного синтеза многомерных систем автоматического регулирования с желаемым распределением полюсов, обеспечивающих отработку задающих воздействий. Предлагается метод построения модальных регуляторов (компенсаторов) без использования наблюдающих устройств.

ON THE QUESTION OF THE CONSTRUCTION OF MODAL COMPENSATORS FOR MULTIDIMENSIONAL REGULATION SYSTEMS

Filimonov A.B., Filimonov N.B.

Keywords: multidimensional control objects, the problem of modal stabilization, modal synthesis of the regulation system, the structure of modal compensator.
Abstract. The problem of linear synthesis of multidimensional systems of automatic regulation with desired poles distribution, providing the working out of the giving actions is considered. The method of the construction of modal regulators (compensators) without use of the observed devices.

В современной теории и практике автоматических систем важное место занимают задачи и методы модального управления, направленные на синтез линейных стационарных систем управления с заданным (желаемым) расположением полюсов на комплексной плоскости. В настоящее время в теоретическом плане хорошо изучены задачи модального синтеза систем стабилизации конечномерных динамических объектов управления. Однако мало внимания уделяется вопросам модального синтеза систем автоматического регулирования (САР), назначение которых – отработка задающих воздействий (командных сигналов). В качестве одной из немногих работ в этой области укажем статью [1], в которой решается задача построения модальных регуляторов с учетом задающих воздействий, определенной динамической структуры.

В настоящей работе рассматриваются вопросы модального синтеза САР с неизвестным задающим воздействием. Предлагается метод построения модальных регуляторов (компенсаторов) для многомерных САР.

Задача модального синтеза САР. Полагаем, что объект управления является непрерывной линейной стационарной динамической системой n_0-го порядка класса MIMO (Multiple-Input – Multiple-Output) и описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_0\mathbf{x} + \mathbf{B}_0\mathbf{u}, \qquad (1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_0\mathbf{x}, \qquad (2)$$

где $\mathbf{u}\in \mathbf{R}^{r}$ - вход, $\mathbf{x}\in \mathbf{R}^{n_0}$ - состояние, $\mathbf{y}\in \mathbf{R}^{m}$ - выход, $\mathbf{A}_0\in \mathbf{R}^{n_0\times n_0}$, $\mathbf{B}_0\in \mathbf{R}^{n_0\times r}$, $\mathbf{C}_0\in \mathbf{R}^{m\times n_0}$ - постоянные коэффициентные матрицы, причем

$$\operatorname{rank}\mathbf{C}_0 = m .$$

Полагаем, что уравнения (1) и (2) описывают динамику объекта на временной полуоси $t \ge 0$, так что начальным условием для дифференциального уравнения (1) является начальное состояние объекта $\mathbf{x}(0)$.

Считаем объект вполне управляемым и наблюдаемым, причем имеем случай неполной информации о состоянии объекта:

$$m < n_0 .$$

Рассмотрим задачу *модального* синтеза САР [2]: спектр синтезированной системы (множество ее полюсов) должен совпадать с заданным множеством Λ^* - *желаемым спектром*, локализованном в левой полуплоскости комплексной плоскости.

Традиционная схема модальной стабилизации. Обсудим сначала схему стабилизации нулевого состояния объекта посредством *модальной обратной связи* (МОС) (см., например, [3–5]). Поскольку мы не располагаем измерительной информацией о текущем состоянии объекта, то построение обратной связи осуществляется на основе *принципа разделения*: сначала формируется обратная связь по состоянию, которая затем модифицируется заменой фактического состояния объекта на его оценку, причем для генерирования асимптотической оценки состояния в структуру регулятора включается наблюдатель Д. Люенбергера. Функциональная схема системы модальной стабилизации показана на рис. 1.

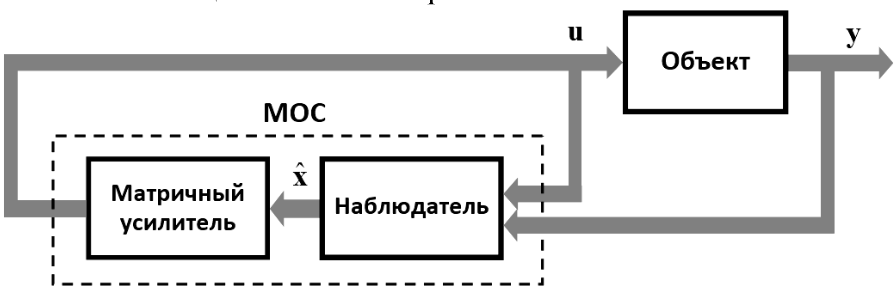

Рис. 1

Функция наблюдателя - формирование оценки $\hat{\mathbf{x}}(t)$ текущего состояния объекта $\mathbf{x}(t)$ по данным наблюдения его входа $\mathbf{u}(t)$ и выхода $\mathbf{y}(t)$.

Действие матричного усилителя описывается уравнением

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} . \tag{3}$$

Как известно [4], функционирование асимптотического наблюдателя Д. Люенбергера полного порядка подчиняется уравнению

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}_0\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_0\mathbf{u} + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{C}_0\hat{\mathbf{x}}) , \tag{4}$$

где $\mathbf{L}\in \mathbf{R}^{n\times m}$ - матрица коэффициентов усиления наблюдателя.

Очевидно, что динамика ошибки оценивания состояния объекта:

$$\Delta\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t),$$

описывается дифференциальным уравнением

$$\Delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_{\mathrm{obs}}\Delta\mathbf{x}(t), \tag{5}$$

где

$$\mathbf{A}_{\mathrm{obs}} = \mathbf{A}_0 - \mathbf{L}\mathbf{C}_0. \tag{6}$$

Из соотношений (5) и (6) вытекает следующее утверждение.

***Утверждение* 1.** Динамика ошибки оценивания $\Delta\mathbf{x}(t)$ не зависит от состояния объекта и определяется исключительно матрицей $\mathbf{A}_{\mathrm{obs}}$. Процесс оценивания сходится:

$$\lim_{t\to\infty}\Delta\mathbf{x}(t) = 0,$$

тогда и только тогда, когда матрица $\mathbf{A}_{\mathrm{obs}}$ является устойчивой. Скорость сходимости оценки определяется спектром данной матрицы. ■

Итак, динамическая точность оценивания определяется настройкой наблюдателя, т.е. выбором его коэффициентной матрицы $\mathbf{L}$.

Динамика состояния замкнутой САР описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{\mathrm{ctr}}\mathbf{x} - \mathbf{B}_0\mathbf{K}\Delta\mathbf{x}, \tag{7}$$

где $\mathbf{A}_{\mathrm{ctr}} = \mathbf{A}_0 - \mathbf{B}_0\mathbf{K}$.

Примем следующие обозначения для квадратных числовых матриц: $\chi_{\mathbf{M}}(s)$ - характеристический многочлен, а $\sigma(\mathbf{M})$ - спектр матрицы $\mathbf{M}$.

В динамике САР можно выделить контуры управления и наблюдения, процессы в которых описываются уравнениями (7) и (5), структура которых показывает, что контур наблюдения в одностороннем порядке влияет на контур управления, что отражено в следующем утверждении.

***Утверждение* 2**. Динамическое поведение замкнутой САР есть прямая сумма динамического поведения контуров управления и наблюдения, причем характеристический многочлен системы $\chi(s)$ равен произведению характеристических многочленов данных контуров:

$$\chi(s) = \chi_{\mathbf{A}_{\mathrm{ctr}}}(s)\cdot\chi_{\mathbf{A}_{\mathrm{obs}}}(s).$$

Таким образом, спектр замкнутой системы регулирования Λ (с учетом кратности полюсов) является объединением спектров контура управления и контура наблюдения:

$$\Lambda = \sigma(\mathbf{A}_0 - \mathbf{B}_0\mathbf{K}) \cup \sigma(\mathbf{A}_0 - \mathbf{L}\mathbf{C}_0). \tag{8}$$

Модальные требования к синтезируемой САР означают выполнение равенства

$$\Lambda = \Lambda^*. \tag{9}$$

Необходимая настройка регулятора осуществляется выбором коэффициентных матриц $\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}$, обеспечивающих с учетом (8) равенство (9).

Структура МОС изменяется в случае применения *редуцированного наблюдателя* состояния объекта, динамический порядок которого равен

$$n_{\text{obs}} = n_0 - m\,. \tag{10}$$

САР с модальным компенсатором. В общем случае цель регулирования заключается в отработке поступающего извне командного сигнала (уставки) $\mathbf{y}^*$. Динамический регулятор в составе такой САР, обеспечивающий получение желаемого спектра в замкнутой системе, будем называть *модальным компенсатором* (МК) Соответствующая функциональная схема САР с МК представлена на рис. 2. Здесь $\mathbf{e}$ - векторный сигнал рассогласования (ошибка):

$$\mathbf{e} = \mathbf{y}^* - \mathbf{y}\,. \tag{11}$$

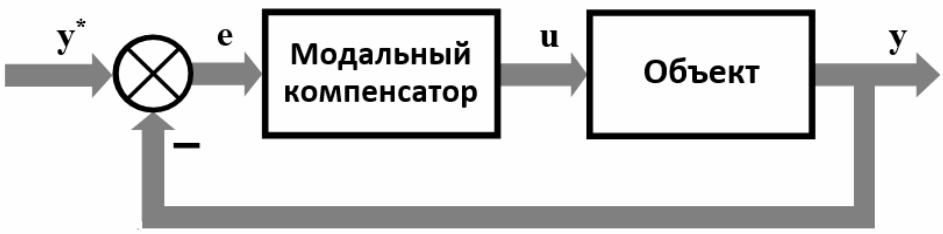

Рис. 2

Полагаем, что MIMO-модель МК динамического порядка n_1 описывается уравнениями вида

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{e}, \tag{12}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_1\mathbf{e}, \tag{13}$$

где $\mathbf{A}_1 \in \mathbf{R}^{n_1\times n_1}$, $\mathbf{B}_1 \in \mathbf{R}^{n_1\times m}$, $\mathbf{C}_1 \in \mathbf{R}^{r\times n_1}$, $\mathbf{D}_1 \in \mathbf{R}^{r\times m}$.

Перейдем к вопросу построения МК.

Наличие уставки $\mathbf{y}^*$ в схеме САР требует изменения уравнения наблюдателя (4): сигнал $(-\mathbf{y})$ необходимо заменить на сигнал рассогласования $\mathbf{e}$ вида (11):

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}_0\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_0\mathbf{u} - \mathbf{L}\,\mathbf{C}_0\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{L}\mathbf{e}\,. \tag{14}$$

Очевидно, что в случае $\mathbf{y}^* \equiv 0$ данное уравнение возвращается к виду (4).

Подставляя в уравнение (14) выражение (3) получим

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A}_0 - \mathbf{B}_0\mathbf{K} - \mathbf{L}\,\mathbf{C}_0)\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{L}\mathbf{e}, \tag{15}$$

Таким образом, МК описывается уравнениями (15) и (3), сравнение которых дает следующее выражение для его состояния:

$$\mathbf{x}_1 = \hat{\mathbf{x}},$$

а также формулы вычисления его параметров:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_0 - \mathbf{B}_0\mathbf{K} - \mathbf{L}\,\mathbf{C}_0\,,\ \mathbf{B}_1 = -\mathbf{L}\,,\ \mathbf{C}_1 = -\mathbf{K}\,,\ \mathbf{D}_1 = 0\,. \tag{16}$$

Динамический порядок синтезированного таким образом МК равен $n_1 = n_0$. Применение редуцированного наблюдателя позволяет снизить данный порядок – теперь он будет равен (10). При этом расчетные формулы (16) для параметров МК изменятся, причем, как правило, будет иметь место неравенство $\mathbf{D}_1 \neq 0$.

Построение модального компенсатора в частотной области. Рассмотрим постановку задачи модального синтеза САР в частотной области.

Обозначим через $\mathbf{W}_0(s)$, $\mathbf{W}_1(s)$, $\mathbf{W}(s)$ передаточные матрицы объекта управления, МК и замкнутой САР соответственно. Здесь s - комплексная частота. Пусть $\mathbf{E}_k$ - единичная матрица k-го порядка, тогда справедливо следующее соотношение

$$\mathbf{W}(s) = (\mathbf{E}_m + \mathbf{W}_0(s)\mathbf{W}_1(s))^{-1}\mathbf{W}_0(s)\mathbf{W}_1(s).$$

Модальные свойства синтезируемой САР определяются полюсами ее передаточной матрицы $\mathbf{W}(s)$, а желаемое размещение полюсов системы определяется множеством $\Lambda^* \subset \{s \,|\, \mathrm{Re}\, s < 0\}$ и обеспечивается действием МК.

В силу уравнений динамики объекта (1) и (2) его передаточная матрица $\mathbf{W}_0(s)$ равна

$$\mathbf{W}_0(s) = \mathbf{C}_0(\mathbf{E}_{n_0}s - \mathbf{A}_0)^{-1}\mathbf{B}_0.$$

Наоборот, если задана передаточная матрица объекта $\mathbf{W}_0(s)$, то, решая задачу минимальной реализации [4], можно получить уравнения объекта (1), (2), а затем, применяя изложенный выше способ построения МК, получить уравнения (12) и (13), которым отвечает его искомая передаточная матрица

$$\mathbf{W}_1(s) = \mathbf{C}_1(\mathbf{E}_{n_1}s - \mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{B}_1 + \mathbf{D}_1.$$

Замечание. К синтезируемой САР обычно выдвигается требование астатизма по отношению к задающим воздействиям. Для его выполнения в каналы управления вводятся интегрирующие звенья, выходы которых включаются в состав измерительной информации. При этом, очевидно, динамический порядок редуцированного наблюдателя, а, стало быть, и порядок МК не изменятся.

Пример. Пусть $m = r = 2$ и передаточная матрица объекта равна

$$\mathbf{W}_0(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s(s+1)} & \dfrac{1}{s+2} \\ -\dfrac{1}{s+1} & \dfrac{2}{s(s+2)} \end{bmatrix}.$$

Минимальная реализация данной матрицы дает MIMO-модель объекта порядка $n_0 = 4$.

Динамический порядок замкнутой САР равен $n = 8$. Зададим желаемый спектр системы в виде мультимножества:

$$\Lambda^* = \{-0.75, -0.75, -1, -1, -1, -1, -1.25, -1.25\}.$$

Первые четыре величины этого набора выберем в качестве спектра матрицы $\mathbf{A}_{obs}$, а остальные четыре – в качестве спектра матрицы $\mathbf{A}_{ctr}$.

Расчет передаточной матрицы МК в среде MATLAB дает

$$\mathbf{W}_1(s) = \frac{1}{D_1(s)} \begin{bmatrix} N_{11}(s) & N_{12}(s) \\ N_{21}(s) & N_{22}(s) \end{bmatrix},$$

где

$$D_1(s) = s^4 + 5s^3 + 10.88s^2 + 11.45s + 5.567;$$

$$N_{11}(s) = 0.7031s^3 + 2.344s^2 + 3.237s + 1.597;$$

$$N_{12}(s) = 0.2344s^3 + 0.4688s^2 + 0.564s + 0.3296;$$

$$N_{21}(s) = 0.2344s^3 + 0.7031s^2 + 0.5786s - 0.2197;$$

$$N_{22}(s) = 0.2344s^3 + 1.172s^2 + 2.095s + 1.487.$$

На рис. 3 показаны результаты расчета переходных характеристик синтезированной САР - реакции ее выходов на единичные входные воздействия: $h_{ij}(t) = y_i(t)|_{y_j^* = 1(t)}$, $i, j = 1, 2$.

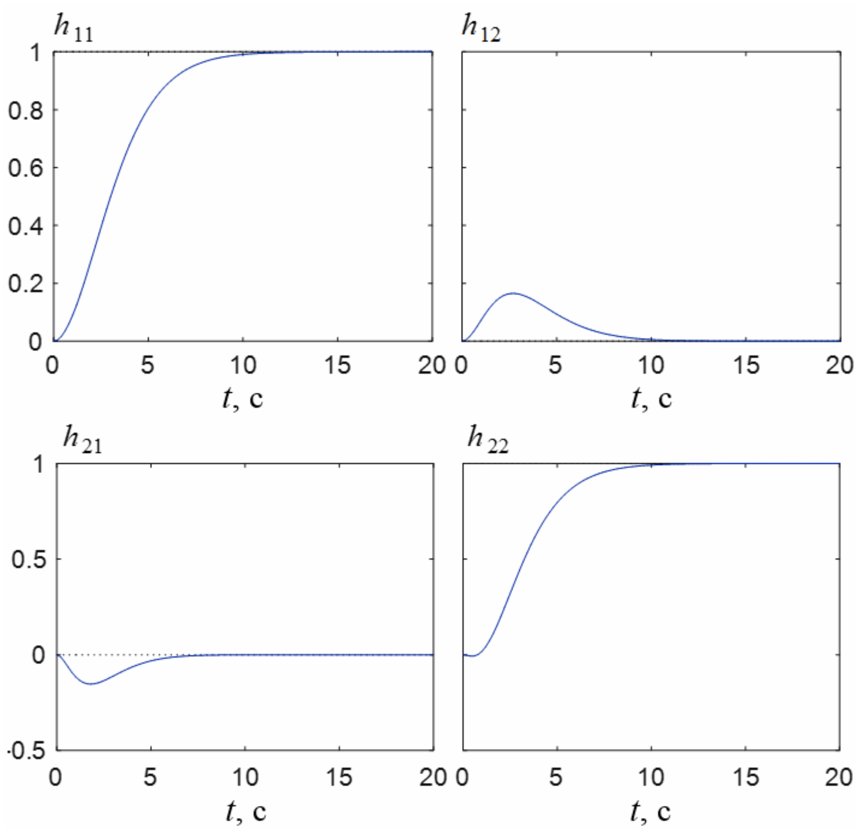

Рис. 3

Список литературы

1. Безрядин М.М., Лозгачев Г.И. Применение теоремы Безу и схемы Горнера для построения модального регулятора по передаточной функции замкнутой системы в случае наличия внешнего задающего и возмущающего воздействий // Вестник ВГУ. Серия: системный анализ и информационные технологии. – 2012. – № 1. – С. 5-11.
2. Simon J.D., Mitter S.K. A Theory of Modal Control // Information and Control, 1968, vol. 13. – P. 316-353.
3. Brogan W.I. Modern Control Theory. Prentice Hall, 1991. – 653 p.
4. Basar T., Meyn S.P., Perkins W.R. Lecture Notes on Control System Theory and Design. University of Illinois at Urbana-Champaign. 2010. – 225 p.
5. Ogata K. Modern Control Engineering. Prentice Hall, 2010. – 905 p.

References

1. Bezryadin M.M., Lozgachev G.I. Using of Bezout’s Theorem and Horner’s Scheme for Building a Transfer Function of the Modal Controller on Transfer Function of Closed-Loop System in the Presence of an External Defining and Disturbing Influences // Proceedings of Voronezh State University. Series: Systems analysis and information technologies. – 2012. – №1. – P. 5-11.
2. Simon J.D., Mitter S.K. A Theory of Modal Control // Information and Control, 1968, vol. 13. – P. 316-353.
3. Brogan W.I. Modern Control Theory. Prentice Hall, 1991. – 653 p.
4. Basar T., Meyn S.P., Perkins W.R. Lecture Notes on Control System Theory and Design. University of Illinois at Urbana-Champaign. 2010. – 225 p.
5. Ogata K. Modern Control Engineering. Prentice Hall, 2010. – 905 p.

Филимонов Александр Борисович – доктор технических наук, профессор, МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, Россия, filimon_ab@mail.ru	**Filimonov Aleksandr Borisovich** – doctor of technical sciences, professor, MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russia, filimon_ab@mail.ru
Филимонов Николай Борисович – доктор технических наук, профессор, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия; nbfilimonov@mail.ru	**Filimonov Nikolay Borisovich** – doctor of technical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia; nbfilimonov@mail.ru

Received 20.09.2020