https://doi.org/10.26160/2474-5901-2020-21-39-44

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ТРЕТЬЕГО РОДА С ОПЕРАТОРОМ УМНОЖЕНИЯ НА НЕУБЫВАЮЩУЮ ФУНКЦИЮ

Каракеев Т.Т., Бугубаева Ж.Т.

Ключевые слова: Уравнение Вольтерра; неубывающая функция; метод регуляризации; единственность решения; равномерная сходимость; малый параметр.

Аннотация. В статье рассматривается линейное интегральное уравнение Вольтерра третьего рода с оператором умножения на непрерывную неубывающую функцию и с непрерывным ядром, которое вырождается на диагонали. Предполагается, что решение уравнения существует и принадлежит пространству непрерывных функций. С помощью объединенного оператора получено линейное интегральное уравнение с неубывающей функцией, которое эквивалентно в смысле разрешимости исходному интегральному уравнению. Доказана теорема о равномерной сходимости решения регуляризованного уравнения к точному решению исходного уравнения Вольтерра третьего рода в шаре. Установлены условия, обеспечивающие единственность решения интегральных уравнений Вольтерра третьего рода в шаре.

REGULARIZATION OF VOLTERRA LINEAR INTEGRAL EQUATIONS OF THE THIRD KIND WITH THE MULTIPLICATION OPERATOR TO NON-DECREASING FUNCTION

Karakeev T.T., Bugubaeva Zh.T.

Keywords: Volterra equation; non-decreasing function; regularization; uniqueness of the solution; uniformly convergence; small parameter.

Abstract. In article, the Volterra linear integral equation of the third kind with the functional of multiplication to continuous non-decreasing function is considered. It is supposed, the equation solution exists and belongs to space of continuous functions. The theorem about a solution uniform convergence of the regularized equations to the exact solution of Volterra input equation of the third kind in a full-sphere is proved. The conditions ensuring uniqueness of a solution of Volterra integral equations of the third kind in a full-sphere are established.

Вопросы единственности и устойчивости решения интегральных уравнений Вольтерра третьего рода изучены в работах [1, 2, 4, 5]. В работе [4] доказано существование семейства многопараметрических решений линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода. Единственность решения регуляризованного линейного интегрального уравнения Вольтерра третьего рода рассмотрена в [1, 3].

В данной работе рассматривается линейное интегральное уравнение Вольтерра третьего рода, в случае, когда известная функция вне интеграла обращается в нуль в начале отрезка интегрирования.

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра третьего рода

$$p(x)u(x) + \int_0^x K(x,t)u(t)dt = g(x), \qquad (1)$$

в предположении, что для заданных функций $p(x),\ g(x),\ K(x,t)$ выполняются условия:

а) $p(x)$ - неубывающая функция, $p(0)=0, \quad (x)>0,\ \forall x\in(0,b],$
$p(x), g(x)\in C[0,b], \qquad g(0)=0;$

б) $K(x,t)\in C(D), K(x,x)\geq 0,\ D=\{(x,t)/0\leq t\leq x\leq b\};$

в) $G(x)\geq d_1, \qquad G(x)=C_0p^2(x)+\big(1+C_1g(x)\big)K(x,x),$
$0<d_1, C_0, C_1=const.$

Действуем оператором $I+C_0J+C_1T$ на уравнение (1), где I - единичный оператор, J и T - операторы Вольтерра вида [2]

$$(Jv)(x)=\int\limits_0^x p(t)v(t)dt, \qquad (Tv)(x)=\int\limits_0^x K(t,t)u(t)v(t)dt.$$

Из уравнения (1) получим

$$p(x)u(x)+\int\limits_0^x G(t)u(t)dt=\int\limits_0^x L(x,t)u(t)dt+$$

$$+C_1\int\limits_0^x p_0(t)u^2(t)dt+C_1\int\limits_0^x u(t)dt\int\limits_t^x K_0(s,t)u(s)ds+f(x), \tag{2}$$

где $L(x,t)=K(t,t)-K(x,t)-C_0\int\limits_t^x p(s)K(s,t)ds, \quad p_0(x)=p(x)K(x,x),$

$$K_0(x,t)=K(x,x)K(x,t), \qquad f(x)=g(x)+C_0\int\limits_0^x p(t)g(t)dt.$$

Рассмотрим уравнение с малым параметром ε из интервала (0,1)

$$\big(\varepsilon+p(x)\big)u_\varepsilon(x)+\int\limits_0^x G(t)\,u_\varepsilon(t)dt=\int\limits_0^x L(x,t)\,u_\varepsilon(t)dt+C_1\int\limits_0^x p_0(t)\times$$

$$\times u_\varepsilon^2(t)dt+C_1\int\limits_0^x u_\varepsilon(t)dt\int\limits_t^x K_0(s,t)\,u_\varepsilon(s)ds+\varepsilon u(0)+f(x). \tag{3}$$

С помощью резольвенты ядра $\big(-G(t)/\big(\varepsilon+p(x)\big)\big)$ уравнение (3) приведем к следующему виду

$$u_\varepsilon(x)=-\frac{1}{\varepsilon+p(x)}\int\limits_0^x exp\left(-\int\limits_t^x\frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\frac{G(t)}{\varepsilon+p(t)}\times$$

$$\times\left\{\int\limits_0^t [L(t,s)-L(x,s)]u_\varepsilon(s)ds-\int\limits_t^x L(x,s)u_\varepsilon(s)ds-\right.$$

$$-C_1\int_t^x p_0(s)u_\varepsilon^2(s)ds - C_1\int_0^t u_\varepsilon(s)ds\int_t^x K_0(v,s)\,u_\varepsilon(v)dv -$$

$$-C_1\int_t^x u_\varepsilon(s)ds\int_s^x K_0(v,s)\,u_\varepsilon(v)dv + f(t) - f(x)\Bigg\}dt + \frac{1}{\varepsilon+p(x)}\times$$

$$\times\, exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\Bigg\{\int_0^x L(x,t)\,u_\varepsilon(t)dt + C_1\int_0^x p_0(t)\,u_\varepsilon^2(t)dt +$$

$$+C_1\int_0^x u_\varepsilon(t)dt\int_t^x K_0(s,t)\,u_\varepsilon(s)ds + \varepsilon u(0) + f(x)\Bigg\} \equiv (Au_\varepsilon)(x). \qquad (4)$$

Введем обозначения

$\Omega[0,b] = \{\,u(x)\in C[0,b]\colon |u(x)-u_0|\le r_0, \qquad 0<u_0,\ r_0 = const\}$;

$$\|\cdot\|_{C[0,b]} = \max_{x\in[0,b]}|\cdot|, \qquad P = \max_{x\in[0,b]}|p(x)|, \qquad M_0 = \max_{x\in[0,b]}\left|\int_0^x |K(t,t)|dt\right|.$$

Пусть $\bar{u}_\varepsilon(x),\ \tilde{u}_\varepsilon(x)\in\Omega[0,b]$. Оценим разность операторов $(A\bar{u}_\varepsilon)(x) - (A\tilde{u}_\varepsilon)(x)$. Произведя вычисления, получим следующие оценки

$$\Bigg|\frac{1}{\varepsilon+p(x)}\int_0^x exp\left(-\int_t^x \frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\frac{G(t)}{\varepsilon+p(t)}\Bigg\{\int_0^t [L(x,s)-L(t,s)]\times$$

$$\times\,[\bar{u}_\varepsilon(s)-\tilde{u}_\varepsilon(s)]ds + \int_t^x L(x,s)[\bar{u}_\varepsilon(s)-\tilde{u}_\varepsilon(s)]ds\Bigg\}dt\Bigg| \le$$

$$\le \left(2L_k b d_1^{-1} + 2C_0 b(L_k b^2 + 2M_0)\right)\|\bar{u}_\varepsilon(x)-\tilde{u}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]},$$

где $0 < L_K$ – коэффициент Липшица ядра $K(x,t)$ по первому аргументу;

$$\left|\frac{1}{\varepsilon+p(x)} exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\int_0^x L(x,t)\,[\bar{u}_\varepsilon(t)-\tilde{u}_\varepsilon(t)]dt\right| \le$$

$$\le (L_k b d_1^{-1}(1 + C_0 Pb/2) + C_0 Pb)e^{-1}\|\bar{u}_\varepsilon(x)-\tilde{u}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]};$$

$$\left|\frac{C_1}{\varepsilon+p(x)}\int_0^x exp\left(-\int_t^x \frac{G(s)ds}{\varepsilon+p(s)}\right)\frac{G(t)}{\varepsilon+p(t)}\int_t^x p_0(s)[\bar{u}_\varepsilon^2(s)-\tilde{u}_\varepsilon^2(s)]\,dsdt\right| \le$$

$$\le 4C_1 M_0 r\|\bar{u}_\varepsilon(x)-\tilde{u}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]}, \qquad \text{где} \quad r = r_0 + u_0;$$

$$\left|\frac{C_1}{\varepsilon+p(x)} exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\int_0^x p_0(t)(\bar{u}_\varepsilon^2(t)-\tilde{u}_\varepsilon^2(t))dt\right| \le$$

$$\le 2C_1 Pre^{-1}\|\bar{u}_\varepsilon(x)-\tilde{u}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]};$$

$$\left|\frac{C_1}{\varepsilon+p(x)}\int_0^x exp\left(-\int_t^x \frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\frac{G(t)}{\varepsilon+p(t)}\left\{\int_0^t u_\varepsilon(s)ds\int_t^x K_0(v,s)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\,[\bar{u}_\varepsilon(v)-\tilde{u}_\varepsilon(v)]dv+\int_t^x u_\varepsilon(s)ds\int_s^x K_0(v,s)\,[\bar{u}_\varepsilon(v)-\tilde{u}_\varepsilon(v)]dv\right\}dt\right|\le$$

$$\le C_1 r(L_k b^2+2M_0)\|\bar{u}_\varepsilon(x)-\tilde{u}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]};$$

$$\left|\frac{C_1}{\varepsilon+p(x)}exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\left\{\int_0^x [\bar{u}_\varepsilon(t)-\tilde{u}_\varepsilon(t)]dt\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\int_t^x K_0(s,t)u_\varepsilon(s)ds+\int_0^x u_\varepsilon(t)dt\int_t^x K_0(s,t)[\bar{u}_\varepsilon(s)-\tilde{u}_\varepsilon(s)]ds\right\}\right|\le$$

$$\le C_1 r(L_k b^2+2M_0)e^{-1}\|\bar{u}_\varepsilon(x)-\tilde{u}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]}.$$

В итоге, из (6) вытекает следующее неравенство

$$\|(A\bar{u}_\varepsilon)(x)-(A\tilde{u}_\varepsilon)(x)\|_{C[0,b]}\le q\|\bar{u}_\varepsilon(x)-\tilde{u}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]}, \qquad (5)$$

где $q=2\big(L_k b d_1^{-1}+2C_1M_0r+(C_0b+C_1r)(L_kb^2+2M_0)\big)+$

$$+\Big(L_kbd_1^{-1}(1+C_0Pb/2)+C_0Pb+C_1r\big(L_kb^2+2(M_0+P)\big)\Big)e^{-1}.$$

Пусть оператор $(H_\varepsilon u)(x)$, задан в виде

$$(H_\varepsilon u)(x)\equiv\frac{\varepsilon}{\varepsilon+p(x)}\int_0^x exp\left(-\int_t^x\frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\frac{G(t)}{\varepsilon+p(t)}[u(x)-u(t)]\,dt-$$

$$-\frac{\varepsilon}{\varepsilon+p(x)}exp\left(-\int_0^x\frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)[u(x)-u(0)].$$

Для $\|(H_\varepsilon u)(x)\|_{C[0,b]}$ имеет место оценка [1]

$$\|(H_\varepsilon u)(x)\|_{C[0,b]}\le 4(d_1e)^{-1}\varepsilon^{1-\beta}\|u(x)\|_{C[0,b]}+\omega_u(\varepsilon^\beta), \qquad (6)$$

где $\omega_u(\varepsilon^\beta)=\sup\limits_{|x-t|\le\varepsilon^\beta}|u(x)-u(t)|, \qquad 0<\beta<1.$

Теорема. Пусть выполняются условия *а*) - *в*), $q<1$ и уравнение (1) имеет решение $u(x)\in C[0,b]$. Тогда при $\varepsilon\to 0$ решение уравнения (4) равномерно сходится к решению уравнения (2). При этом справедлива оценка

$$\|u_\varepsilon(x)-u(x)\|_{C[0,b]}\le\Big(4(d_1e)^{-1}\varepsilon^{1-\beta}\|u(x)\|_{C[0,b]}+\omega_u(\varepsilon^\beta)\Big)/(1-q).$$

Доказательство. Прибавим в обе части уравнения (2) величину $\varepsilon u(x)$ и приведем это уравнение к виду

$$u(x)=-\frac{1}{\varepsilon+p(x)}\int_0^x exp\left(-\int_t^x\frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\frac{G(t)}{\varepsilon+p(t)}\left\{\int_0^t L(t,s)u(s)ds-\right.$$

$$-\int_0^x L(x,s)\,u(s)ds - C_1\int_t^x p_0(s)\,u^2(s)ds + C_1\int_0^t u(s)ds\int_s^t K_0(\nu,s)\,u(\nu)d\nu -$$

$$\left.-C_1\int_0^x u(s)ds\int_s^x K_0(\nu,s)\,u(\nu)d\nu + \varepsilon[u(t)-u(x)] + f(t) - f(x)\right\}dt +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon+p(x)}exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\left\{\int_0^x L(x,t)\,u(t)dt + C_1\int_0^x p_0(t)\,u^2(t)dt +\right.$$

$$\left.+C_1\int_0^x u(t)dt\int_t^x K_0(s,t)\,u(s)ds + \varepsilon[u(x)-u(0)] + f(x)\right\}. \qquad (7)$$

Положим $\eta_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x) - u(x)$. Тогда из (4) и (7) получим уравнение

$$\eta_\varepsilon(x) = -\frac{1}{\varepsilon+p(x)}\int_0^x exp\left(-\int_t^x \frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\frac{G(t)}{\varepsilon+p(t)}\times$$

$$\times\left\{\int_0^t L(t,s)\eta_\varepsilon(s)ds - \int_0^x L(x,s)\eta_\varepsilon(s)ds -\right.$$

$$-C_1\int_t^x p_0(s)[u_\varepsilon(s)+u(s)]\eta_\varepsilon(s)ds + C_1\int_0^t \eta_\varepsilon(s)ds\int_s^t K_0(\nu,s)\,u(\nu)d\nu -$$

$$-C_1\int_0^x \eta_\varepsilon(s)ds\int_s^x K_0(\nu,s)\,u(\nu)d\nu + C_1\int_0^t u(s)ds\int_s^t K_0(\nu,s)\,\eta_\varepsilon(\nu)d\nu -$$

$$\left.-C_1\int_0^x u(s)ds\int_s^x K_0(\nu,s)\,\eta_\varepsilon(\nu)d\nu + \varepsilon[u(t)-u(x)]\right\}dt +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon+p(x)}exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\left\{\int_0^x L(x,t)\,\eta_\varepsilon(t)dt +\right.$$

$$+C_1\int_0^x p_0(t)[u_\varepsilon(t)+u(t)]\eta_\varepsilon(t)dt + C_1\int_0^x \eta_\varepsilon(t)dt\int_t^x K_0(s,t)\,u(s)ds +$$

$$\left.+C_1\int_0^x u(t)dt\int_t^x K_0(s,t)\,\eta_\varepsilon(s)ds + \varepsilon\big(u(x)-u(0)\big)\right\}. \qquad (8)$$

Учитывая (5), из (8) получим

$$\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} \le \|(H_\varepsilon u)(x)\|_{C[0,b]}/(1-q).$$

Отсюда, в силу (6), следует, что $\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} \to 0$, при $\varepsilon \to 0$. Поскольку $\eta_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x) - u(x)$, то при $\varepsilon \to 0$ функция $u_\varepsilon(x) \to u(x)$ равномерно.

Теорема доказана.

Следствие. При выполнении условий теоремы решение уравнения (1) единственно в $\Omega[0,b]$.

Список литературы

1. Асанов А., Ободоева Г. Регуляризация и единственность решений линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода. – Фрунзе: Илим, 1994. – Вып. 25. – С. 65-74.
2. Каракеев Т.Т. Регуляризация нелокальной граничной задачи для псевдопараболических уравнений // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек, 2003. – Вып. 32. – С. 179-183.
3. Каракеев Т.Т., Бугубаева Ж.Т. Эквивалентные преобразования и регуляризация линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. – Бишкек, 2012. – С. 29-33.
4. Магницкий Н.А. Линейные интегральные уравнения Вольтерра I и III рода // ЖВМ и МФ.– 1979. – Т.19, №4. – С. 970-989.
5. Омуров Т.Д., Каракеев Т.Т. Регуляризация и численные методы решения обратных и нелокальных краевых задач. – Бишкек: Илим, 2006. –164 с.

References

1. Asanov A., Obodoeva G. Reguljarization and uniqueness of solutions of Volterra linear integral equations of the third kind. – Frunze: Ylym, 1994. – V.25. – P.65-74.
2. Karakeev T.T. Regularization of not local boundary problem for the pseudo-parabolic equations // Researches on the integro-differential equations. – Bishkek, 2003. – P. 179-183.
3. Karakeev T.T., Bugubaeva Zh.T. Equivalent of transformation and a regularization of Volterra linear integral equations of the third kind // Bulletin of Z.Balasagyn KNU. – Bishkek, 2012. – P. 29-33.
4. Magnitsky N.A. Volterra linear integral equations I and III kind // JBM and Mf. – 1979. – V.19, №4. – P. 970-989.
5. Omurov T.D., Karakeev T.T. Regularization and numerical methods of solution of inverse and not local boundary value problems. – Bishkek: Ilim, 2006. – 163p.

Каракеев Таалайбек Тултемирович – доктор физико-математических наук, профессор, tkarakeev@yandex.ru	**Karakeev Taalaibek Tultemirovich –** doctor of physical and mathematical sciences, professor, tkarakeev@yandex.ru
Бугубаева Жумгалбубу Тукеновна – старший преподаватель, tbugubaeva@mail.ru	**Bugubaeva Zhumgalbubu Tukenovna** – senior lecturer, tbugubaeva@mail.ru
Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, факультет информационных и инновационных технологий, г. Бишкек, Кыргызстан	Kyrgyz National University named after J. Balasagyn, Faculty of Information and Innovative Technologies, Bishkek, Kyrgyzstan

Received 12.08.2020