https://doi.org/10.26160/2474-5901-2020-21-33-38

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ СУММ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ТРЕТЬЕГО РОДА

Бугубаева Ж.Т.

Ключевые слова: интегральное уравнение Вольтерра, регуляризация, неубывающая функция, численное решение, метод последовательных приближений.

Аннотация. В статье рассматривается линейное интегральное уравнение Вольтерра третьего рода с оператором умножения на непрерывную неубывающую функцию, решение которого существует в пространстве непрерывных функций. Методом конечных сумм строится приближенное решение линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода, в случае, когда известная функция вне интеграла обращается в нуль в начале отрезка интегрирования. Построено численное решение и показана его сходимость к решению исходного уравнения.

ABOUT CONVERGENCE OF THE METHOD OF THE FINAL SUMS FOR VOLTERRA LINEAR INTEGRAL EQUATIONS OF THE THIRD KIND

Bugubaeva Zh.T.

Keywords: Volterra integral equation; regularization; non-decreasing function; numerical solution, method of successive approximations.

Abstract. In work the Volterra linear integral equation of the third kind with an operator of multiplication to the continuous non-decreasing function which solution exists in space of continuous functions is considered. Method of the final sums approximate solution of Volterra linear integral equations of the third kind in a case when known function out of integral reduces to zero in the beginning of a segment of integration interval. The numerical solution is constructed and its convergence to the solution of the initial equation is proved.

Методы численного решения линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода с невозрастающей функцией вне интеграла, на основе регуляризованного уравнения и квадратурной формулы правых прямоугольников содержится в работе [1, 2, 6]. Для случая уравнения с неубывающей функцией вне интеграла численный метод применен в [4].

В данной работе методом конечных сумм строится приближенное решение линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода, в случае, когда известная функция вне интеграла обращается в нуль в начале отрезка интегрирования.

Пусть для известных функций $p(x)$, $g(x)$, $K(x,t)$ из линейного интегрального уравнения Вольтерра третьего рода

$$p(x)u(x)+\int_0^x K(x,t)u(t)dt=g(x), \tag{1}$$

выполняются условия:

а) $g(x),\ p(x)\in C[0,b]$, $p(x)$ - неубывающая функция,

$p(0)=g(0)=0$, $p(x)>0$, $\forall x\in[0,b]$;

б) $K(x,t)\in C(D), K(x,x)\geq 0, D=\{(x,t)/0\leq t\leq x\leq b\}$;

в) $G(x) \geq d_1, \qquad G(x) = C_0 p^2(x) + \left(1 + C_1 g(x)\right) K(x,x),$

$\theta_1 G(x) + p'(x) \geq 0, \qquad 0 < \theta_1 < 1, \qquad 0 < C_0, C_1, d_1 = const.$

На уравнение (1) действуем оператором $I + C_0 J + C_1 T$, где I - единичный оператор, J и T - операторы Вольтерра вида

$$(Jv)(x) = \int_0^x p(t)v(t)dt, \qquad (Tv)(x) = \int_0^x K(t,t)u(t)v(t)dt.$$

В результате получим уравнение

$$p(x)u(x) + \int_0^x G(t)u(t)dt = \int_0^x L(x,t)u(t)dt +$$

$$+C_1 \int_0^x p_0(t)u^2(t)dt + C_1 \int_0^x u(t)dt \int_t^x K_0(s,t)u(s)ds + f(x), \quad (2)$$

где $L(x,t) = K(t,t) - K(x,t) - C_0 \int_t^x p(s)K(s,t)ds, \;\; p_0(x) = p(x)K(x,x),$

$$K_0(x,t) = K(x,x)K(x,t), \qquad f(x) = g(x) + C_0 \int_0^x p(t)g(t)dt.$$

Для всех $(x) \in \Omega[0,b] = \{u(x) \in C[0,b]: |u(x)| \leq r, \; 0 < r = const\}$ наряду с уравнением (2), рассматривается уравнение с малым параметром ε из интервала (0,1)

$$\left(\varepsilon + p(x)\right)u_\varepsilon(x) + \int_0^x G(t)\,u_\varepsilon(t)dt =$$

$$= \int_0^x L(x,t)\,u_\varepsilon(t)dt + C_1 \int_0^x p_0(t)u_\varepsilon^2(t)dt +$$

$$+C_1 \int_0^x u_\varepsilon(t)dt \int_t^x K_0(s,t)\,u_\varepsilon(s)ds + \varepsilon u(0) + f(x), \quad x \in [0,b]. \qquad (3)$$

Полученное уравнение (3) приводим к следующему виду [5]

$$u_\varepsilon(x) = -\frac{1}{\varepsilon + p(x)} \int_0^x exp\left(-\int_t^x \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} ds\right) \frac{G(t)}{\varepsilon + p(t)} \times$$

$$\times \left\{ \int_0^t [L(t,s) - L(x,s)]\, u_\varepsilon(s)ds - \int_t^x L(x,s)u_\varepsilon(s)ds - \right.$$

$$-C_1\int_t^x p_0(s)u_\varepsilon^2(s)ds - C_1\int_0^t u_\varepsilon(s)ds\int_t^x K_0(v,s)\,u_\varepsilon(v)dv -$$

$$-C_1\int_t^x u_\varepsilon(s)ds\int_s^x K_0(v,s)\,u_\varepsilon(v)dv + f(t) - f(x)\Bigg\}dt + \frac{1}{\varepsilon+p(x)}\times$$

$$\times\, exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\left\{\int_0^x L(x,t)\,u_\varepsilon(t)dt + C_1\int_0^x p_0(t)\,u_\varepsilon^2(t)dt +\right.$$

$$\left.+C_1\int_0^x u_\varepsilon(t)dt\int_t^x K_0(s,t)\,u_\varepsilon(s)ds + \varepsilon u(0) + f(x)\right\}. \qquad (4)$$

Пусть ω_h – равномерная сетка на отрезке $b]$:

$\omega_h = \{x_i = ih, \quad i = 0..n, \quad b = nh\}$, n – натуральное число,

и ω_h - пространство сеточных функций $_i = u(x_i)$ с нормой

$$\|u_i\|_{C_h} = \max_{0\le i\le n}|u_i|.$$

Посредством квадратурной формулы правых прямоугольников [7, стр. 164] из уравнения (4) приходим к следующей системе нелинейных алгебраических уравнений

$$u_{\varepsilon,i} = -\frac{h}{\varepsilon+p_i}\sum_{j=1}^{i-1} exp\left(-h\sum_{k=j+1}^{i}\frac{G_k}{\varepsilon+p_k}\right)\frac{G_j}{\varepsilon+p_j}\left\{h\sum_{k=1}^{j-1}\left[L_{j,k}-L_{i,k}\right]u_{\varepsilon,k} -\right.$$

$$-h\sum_{k=j}^{i-1}L_{i,k}u_{\varepsilon,k} - C_1 h\left[\sum_{k=j+1}^{i}K_{k,k}p_k u_{\varepsilon,k}^2 - h\sum_{k=1}^{j-1}u_{\varepsilon,k}\,h\sum_{m=j+1}^{i}K_{m,m}K_{m,k}u_{\varepsilon,m} -\right.$$

$$\left.\left.-h\sum_{k=j}^{i-1}u_{\varepsilon,k}\,h\sum_{m=k+1}^{i}K_{m,m}K_{m,k}u_{\varepsilon,m}\right] + f_j - f_i\right\} +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon+p_0}exp\left(-h\sum_{k=1}^{i}\frac{G_k+p_k'}{\varepsilon+p_k}\right)\left\{h\sum_{j=1}^{i-1}L_{i,j}u_{\varepsilon,j} + C_1 h\sum_{j=1}^{i}K_{j,j}p_j u_{\varepsilon,j}^2 +\right.$$

$$\left.+C_1 h\sum_{j=1}^{i-1}u_{\varepsilon,j}\,h\sum_{k=j+1}^{i}K_{k,k}K_{k,j}u_{\varepsilon,k} + f_i\right\}, \qquad i = 1..n, \qquad (5)$$

где $u_{\varepsilon,i} = u_\varepsilon(x_i)$, $\quad p_i = p(x_i)$, $\quad G_i = G(x_i)$,

$$L_{i,j} = K(x_j,x_j) - K(x_i,x_j) - C_0 h\sum_{k=j+1}^{i}K(x_k,x_j)p(x_k), \qquad f_i = f(x_i),$$

$$f(x_i) = g(x_i) + C_0 h\sum_{j=1}^{i}p(x_j)g(x_j),\; x_j = jh, \qquad j = 1..i, \qquad i = 1..n.$$

В дальнейшем будут использованы леммы из работы [6, стр. 83]

Лемма 1. Пусть выполняются условия *а)-в), q<1* и функция $u(x) \in C^1[0,b]$, тогда справедлива оценка

$$\left| -\frac{\varepsilon}{\varepsilon + p_i} h \sum_{j=1}^{i} exp\left(-h \sum_{k=j}^{i} \frac{G_k}{\varepsilon + p_k}\right) \frac{G_j}{\varepsilon + p_j}(u_j - u_i) + \right.$$
$$\left. + \frac{\varepsilon}{\varepsilon + p_0} exp\left(-h \sum_{k=1}^{i} \frac{G_k + p_k'}{\varepsilon + p_k}\right) u_i \right|_{C_h} \le N_1 \varepsilon,$$

где $N_1 = T_0 d_2 r_0 d_1^{-1} + r p_0^{-1}, \quad |u(x)| \le r, \quad |u'(x)| \le r_0, \quad 0 < r, r_0 = const.$

Имеет место [6, стр. 66]

Лемма 2. При выполнении условий *а) - в), q<1* и связи $\varepsilon = O(h^\alpha), \quad 0 < \alpha \le 1/2$ справедливо неравенство

$$\left| \int_0^{x_i} \frac{G(s) + p'(s)}{\varepsilon + p(s)} ds - h \sum_{k=1}^{i} \frac{G_k + 'p_k}{\varepsilon + p_k} \right| \le C h^\sigma, \quad 0 < C = const, \ \sigma = 1 - 2\alpha.$$

Теорема. Если выполняются условия *а) - г), q<1* и $\varepsilon = O(h^\alpha)$ для всех $0 < \alpha < 1/2$, то решение уравнения (3) при $\varepsilon \to 0$ равномерно сходится к i - точному решению уравнения (1), причем

$$\|u_{\varepsilon,i} - u_i\| \le (N_1 h^\alpha + N_2 h^{1-\alpha} + N_3 h)/(1 - q),$$

где $\quad 0 < N_i = const, \ \ i = 1, 2, 3,$

$N_2 = \ M_1\left(d_3 + \left(T_2 d_2 h/2 + T_0 d_5 (d_4 + d_6)\right) d_1^{-1}\right) + T_0 M_2 d_2/2,$

$N_3 = (M_2 h^2/2 + M_3 d_2/d_1 \theta_2)(p_0)^{-1},$

$q = q_0 + q_1, \qquad q_0 = C_1 r(2P + Mb)(T_0 d_2 + M p_0^{-1}) h^{1-\alpha},$

$q_1 = b(L_k + C_0 MP)(T_0 d_2 d_1^{-1} h^{1-\alpha} + p_0^{-1}) +$

$+ 2C_1 r(P + Mb)(T_0 d_2 h^{1-\alpha} + Mbp_0^{-1}).$

Доказательство. Прибавим к обеим частям уравнения (2) величину $\varepsilon u(x)$ и перейдем к уравнению вида (4). К полученному уравнению применим квадратурную формулу правых прямоугольников при $x = x_i, \quad i = 1..n$. Обозначим вектор погрешности через

$$\eta_{\varepsilon,i}^h = u_\varepsilon(x_i) - u(x_i), \qquad i = 1..n.$$

Тогда из (5) получим

$$\eta_{\varepsilon,i}^h = -\frac{h}{\varepsilon + p_i} \sum_{j=1}^{i-1} exp\left(-h \sum_{k=j+1}^{i} \frac{G_k}{\varepsilon + p_k}\right) \frac{G_j}{\varepsilon + p_j} \left\{ h \sum_{k=1}^{j-1} [L_{j,k} - L_{i,k}] \eta_{\varepsilon,k}^h - \right.$$
$$-h \sum_{k=j}^{i-1} L_{i,k} \eta_{\varepsilon,k}^h - C_1 h \sum_{k=j+1}^{i} K_{k,k} p_k (u_{\varepsilon,k} + u_k) \eta_{\varepsilon,k}^h - C_1 h \sum_{k=1}^{j-1} u_{\varepsilon,k} \times$$

$$\times h\sum_{m=j+1}^{i} K_{m,m}K_{m,k}\eta_{\varepsilon,m}^{h} - C_1 h\sum_{k=j}^{i-1} u_{\varepsilon,k}\, h\sum_{m=k+1}^{i} K_{m,m}K_{m,k}\eta_{\varepsilon,m}^{h} -$$

$$-C_1 h\sum_{k=1}^{j-1} \eta_{\varepsilon,k}^{h}\, h\sum_{m=j+1}^{i} K_{m,m}K_{m,k}u_{\varepsilon,m} - C_1 h\sum_{k=j}^{i-1} \eta_{\varepsilon,k}^{h} \times$$

$$\left.\times h\sum_{m=k+1}^{i} K_{m,m}K_{m,k}u_{\varepsilon,m} + \varepsilon(u_j - u_i)\right\} + \frac{1}{\varepsilon + p_0} exp\left(-h\sum_{k=1}^{i}\frac{G_k + p_k'}{\varepsilon + p_k}\right) \times$$

$$\times\left\{h\sum_{j=1}^{i-1} L_{i,j}\eta_{\varepsilon,j}^{h} + C_1 h\sum_{j=1}^{i} K_{j,j}p_j(u_{\varepsilon,j} + u_j)\eta_{\varepsilon,j}^{h} + C_1 h\sum_{j=1}^{i-1} u_{\varepsilon,j}\, h\sum_{k=j+1}^{i} K_{k,k} \times\right.$$

$$\left.\times K_{k,j}\eta_{\varepsilon,k}^{h} + C_1 h\sum_{j=1}^{i-1}\eta_{\varepsilon,j}^{h}\, h\sum_{k=j+1}^{i} K_{k,k}K_{k,j}\, u_{\varepsilon,k} + \varepsilon u_i\right\} - R_i,\ \ i = 1..n, \qquad (6)$$

где R_i – остаточный член интегралов, допускающий оценку вида [3, 4]

$$|R_i| \le N_2 h + N_3 h/\varepsilon, \qquad 0 < N_2, N_3 = const.$$

Произведем оценку в правой части системы (6). Тогда имеем

$$\left|\frac{h}{\varepsilon + p_i}\sum_{j=1}^{i-1} exp\left(-h\sum_{k=j+1}^{i}\frac{G_k}{\varepsilon + p_k}\right)\frac{G_j}{\varepsilon + p_j}\left\{h\sum_{k=1}^{j-1}[L_{i,k} - L_{j,k}]\eta_{\varepsilon,k}^{h} +\right.\right.$$

$$\left.\left. + h\sum_{k=j}^{i-1} L_{i,k}\eta_{\varepsilon,k}^{h}\right\}\right| \le 2(L_k + C_0 MP)T_0 d_2 bh(d_1\varepsilon)^{-1}\left\|\eta_{\varepsilon,i}^{h}\right\|_{C_h}.$$

Оценим подобным образом и остальные выражения из (6). Тогда используя оценки и леммы 1, 2, имеем

$$\left|\eta_{\varepsilon,i}^{h}\right| \le q_0\left\|\eta_{\varepsilon,i}^{h}\right\|_{C_h} + q_1 b\left\|\eta_{\varepsilon,i}^{h}\right\|_{C_h} + \left|\frac{\varepsilon}{\varepsilon + p_0} exp\left(-h\sum_{k=1}^{i}\frac{G_k + p_k'}{\varepsilon + p_k}\right)u_i -\right.$$

$$\left. - \frac{\varepsilon}{\varepsilon + p_i} h\sum_{j=1}^{i} exp\left(-h\sum_{k=j}^{i}\frac{G_k}{\varepsilon + p_k}\right)\frac{G_j}{\varepsilon + p_j}(u_j - u_i)\right| + |R_i|,$$

или

$$\left\|\eta_{\varepsilon,i}^{h}\right\|_{C_h} \le (1 - q)^{-1}\left(N_1\varepsilon + N_2 h + \frac{N_3 h}{\varepsilon}\right),$$

где $q = q_0 + q_1$.

Учитывая, что $\varepsilon = O(h^{\alpha})$ приходим к оценке теоремы.

Список литературы

1. Глушак А.В., Каракеев Т.Т. Численное решение линейной обратной задачи для уравнения Эйлера-Дарбу // ЖВМиМФ. – 2006. – Т.46, № 5. – С.848-857.

2. Каракеев Т.Т. Численное решение линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода // Вестник Самарского государственного технического университета. Естественно-технические науки. – 2004. – Вып. 30. – С.73-76.
3. Каракеев Т.Т., Рустамова Д.К. Регуляризация и метод квадратур для линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2009. – Вып. 40. – С.127-132.
4. Каракеев Т.Т., Рустамова, Д.К., Бугубаева Ж.Т. Приближенные методы решения линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода // Наука и образование. – Прага, 2014. – С. 6-10.
5. Каракеев Т.Т., Бугубаева Ж.Т. Эквивалентные преобразования и регуляризация линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына – Бишкек, 2012. – С. 29-33.
6. Омуров Т.Д., Каракеев Т.Т. Регуляризация и численные методы решения обратных и нелокальных краевых задач. – Бишкек: Илим, 2006. – 164с.
7. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М: Наука, 1989. – 432с.

References

1. Glushak A.V., Karakeev T.T. Numerical solution of Euler-Darbu linear inverse problem for equation // JVM and MF – 2006. – V. 46, № 5. – P. 848-857.
2. Karakeev T.T. Numerical solution of Volterra linear integral equations of the third kind // Bulletin of Samara state engineering university. Nat.-tehn. sciences. – 2004. – V. 30. – P.73-76.
3. Karakeev T.T., Rustamova D.K. Regularization and a method of quadrature for Volterra linear integral equations of the third kind // Researches on the integro-differential equations. – Bishkek: Ylym, 2009. – V 40. – P.127-132.
4. Karakeev T.T., Rustamova, D.K., Bugubaeva ZH.T. The approached methods of solution of Volterra linear integral equations of the third kind // Science and education. – Prague, 2014. – P. 6-10.
5. Karakeev T.T., Bugubaeva ZH.T. Equivalent of transformation and a regularization of Volterra linear integral equations of the third kind // Bulletin of Z.Balasagyna KNU. – Bishkek, 2012. – P. 29-33.
6. Omurov T.D., Karakeev T.T. Regularization and numerical methods of solution of inverse and not local boundary value problems. – Bishkek: Ilim, 2006. – 163p.
7. Samarskij A.A., Gulin A.V. Numerical methods. – M.: Science, 1989. – 432p.

Бугубаева Жумгалбубу Тукеновна – старший преподаватель, Кыргызский национальный университет имени Ж.Баласагына, факультет информационных и инновационных технологий, Кыргызстан, Бишкек, tbugubaeva@mail.ru	**Bugubaeva Zhumgalbubu Tukenovna** – senior lecturer, J. Balasagyn Kyrgyz National University, Faculty of Information and Innovative Technologies, Kyrgyzstan, Bishkek, tbugubaeva@mail.ru

Received 12.08.2020