https://doi.org/10.26160/2474-5901-2020-21-25-32

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Каракеев Т.Т., Рустамова Д.К., Бугубаева Ж.Т.

Ключевые слова: интегральное уравнение Вольтерра, малый параметр, равномерная сходимость.

Аннотация. В работе изучаются вопросы регуляризации и единственности решения нелокальной краевой задачи для линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Доказана равномерная сходимость решения возмущенного уравнения к решению исходного уравнения.

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR SECOND-ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Karakeev T.T., Rustamova D.K., Bugubaeva J.T.

Keywords: Volterra integral equation, small parameter, uniform convergence.

Abstract. The paper studies the regularization and uniqueness of the solution of a nonlocal boundary value problem for linear partial differential equations. The uniform convergence of the solution of the perturbed equation to the solution of the original equation is proved.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t\partial x} = P(x,t)w(x,t) + f\big(x,t,w(x,t),w_t(x,t)\big), \tag{1}$$

с условиями

$$w(0,t) = \sigma(t), \tag{2}$$

$$A(x)w(x,0) + C(x)w(x,T) = q(x). \tag{3}$$

Известные функции такие, что:

$a)$ $A(x),\ C(x) \in C^2[0,b],\ \ p(x) \equiv A(x) + C(x),\ \ p(x) -$ невозрастающая функция,

$p(b) = 0,\ p(x) > 0,\ \forall x \in [0,b),\ q(x) \in C[0,b], A(0)\sigma(0) + C(0)\sigma(T) = q(0);$

б) $P(x,t) \in C(D),\ f(x,t,w,z) \in C(D \times R^1 \times R^1),\ \sigma(t) \in C^1[0,T],\ D = [0,b] \times [0,T],$ функция $f(x,t,w,z)$ удовлетворяет условию Липшица по w и z;

в) $G(x) \equiv C_0 p(x) + K(x,x) \geq d_1, \qquad 0 < C_0,\ d_1 = const, K(x,s) = C(x)\int\limits_0^T P(s,t)dt.$

Введем подстановку [1]

$$w(x,t) = \varphi(x) + \int_0^t z(x,\tau)d\tau, \tag{4}$$

$$w(x,0) = \varphi(x). \tag{5}$$

Тогда из (1), (2), имеем

$$z(x,t) = \sigma'(t) + \int_0^x P(s,t)\varphi(s)ds + \int_0^x P(s,t)\int_0^t z(s,\tau)d\tau ds +$$

$$+\int_0^x f(s,t,\varphi(s)+\int_0^t z(s,\tau)d\tau, z(s,t))ds. \qquad (6)$$

При $t=T$ обе части (4) умножим на $C(x)$. Тогда учитывая условие (3) и уравнение (6), получим интегральное уравнение

$$p(x)\varphi(x)+\int_0^x K(x,s)\varphi(s)ds=\mu(x)-C(x)\int_0^x\int_0^T P(s,t)\int_0^t z(s,\tau)d\tau dtds-$$

$$-C(x)\int_0^x\int_0^T f(s,t,\varphi(s)+\int_0^t z(s,\tau)d\tau, z(s,t))dtds, \qquad (7)$$

где $\mu(x)=q(x)-C(x)[\sigma(T)-\sigma(0)]$.

Проинтегрируем уравнение (7), умноженное на постоянную C_0, от 0 до x и суммируем полученное выражение с исходным уравнением (7). Тогда получим уравнение

$$p(x)\varphi(x)+\int_0^x G(s)\varphi(s)ds=\int_0^x L(x,s)\varphi(s)ds-\int_0^x\int_0^T K_0(x,s)P(s,t)\times$$

$$\times\int_0^t z(s,\tau)d\tau dtds-\int_0^x\int_0^T K_0(x,s)f(s,t,\varphi(s)+\int_0^t z(s,\tau)d\tau, z(s,t))dtds+g(x), \qquad (8)$$

где $L(x,s)=K(s,s)-K(x,s)-C_0\int_s^x K(\nu,s)d\nu$, $g(x)=\mu(x)+C_0\int_0^x\mu(s)ds$, $K_0(x,s)=C(x)+C_0\int_s^x C(\xi)d\xi$.

Регуляризация систем интегральных уравнений (7), (8) построим в следующем виде [2]

$$\begin{cases} z_\varepsilon(x,t)=\sigma'(t)+\int_0^x P(s,t)\varphi_\varepsilon(s)ds+\int_0^x P(s,t)\int_0^T z_\varepsilon(s,\tau)d\tau ds+ \\ +\int_0^x f(s,t,\varphi_\varepsilon(s)+\int_0^t z_\varepsilon(s,t)d\tau, z_\varepsilon(s,t))ds, \\ (\varepsilon+p(x))\varphi_\varepsilon(x)+\int_0^x G(s)\varphi_\varepsilon(s)ds=\int_0^x L(x,s)\varphi_\varepsilon(s)ds- \\ -\int_0^x\int_0^T K_0(x,s)P(s,t)\int_0^t z_\varepsilon(s,\tau)d\tau dtds-\int_0^x\int_0^T K_0(x,s)\times \\ \times f(s,t,\varphi_\varepsilon(s)+\int_0^t z_\varepsilon(s,\tau)d\tau, z_\varepsilon(s,t))dtds+\varepsilon\varphi(0)+g(x). \end{cases} \qquad (9)$$

где ε малый параметр из интервала (0,1). Используя резольвенту [3] $R_\varepsilon(x,s)=-\frac{1}{\varepsilon+p(x)}exp\left(-\int_s^x\frac{G(\xi)}{\varepsilon+p(\xi)}d\xi\right)G(s)$ ядра $\left(-\frac{G(s)}{\varepsilon+p(x)}\right)$ второе уравнение системы (9) представим в виде:

$$\varphi_\varepsilon(x)=-\frac{1}{\varepsilon+p(x)}\int_0^x exp\left(-\int_s^x\frac{G(\xi)}{\varepsilon+p(\xi)}d\xi\right)\frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}\left\{\int_0^s L(s,\xi)\varphi_\varepsilon(\xi)d\xi-\right.$$

$$-\int_0^x L(x,\xi)\varphi_\varepsilon(\xi)d\xi+\int_0^x\int_0^T K_0(x,\xi)f(\xi,t,\varphi_\varepsilon(\xi)+\int_0^t z_\varepsilon(\xi,t)d\tau, z_\varepsilon(\xi,t))dtd\xi-$$

$$-\int_0^s\int_0^T K_0(s,\xi)f(\xi,t,\varphi_\varepsilon(\xi)+\int_0^t z_\varepsilon(\xi,\tau)d\tau, z_\varepsilon(\xi,t))dtd\xi+$$
$$+\int_0^x\int_0^T K_0(x,\xi)P(\xi,t)\int_0^t z_\varepsilon(\xi,\tau)d\tau dtd\xi-\int_0^s\int_0^T K_0(s,\xi)P(\xi,t)\int_0^t z_\varepsilon(\xi,\tau)\,d\tau dtd\xi+$$
$$+g(s)-g(x)\quad\Big\}ds+\frac{1}{\varepsilon+p(x)}exp\left(-\int_0^x\frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\Big\{\int_0^x L(x,s)\varphi_\varepsilon(s)ds-$$
$$-\int_0^x\int_0^T K_0(x,s)\,f(\xi,t,\varphi_\varepsilon(\xi)+\int_0^t z_\varepsilon(\xi,\tau)d\tau, z_\varepsilon(\xi,t))dtds-$$
$$-\int_0^x\int_0^T K_0(x,s)P(x,s)\int_0^t z_\varepsilon(\xi,\tau)d\tau dtd\xi+\varepsilon\varphi(0)+g(x)\Big\}\equiv(B[\varphi_\varepsilon,z_\varepsilon])(x).$$

Тогда получим систему уравнений

$$\begin{cases} z_\varepsilon(x,t)=(A[\varphi_\varepsilon,z_\varepsilon])(x,t),\\ \varphi_\varepsilon=(B[\varphi_\varepsilon,z_\varepsilon])(x),\end{cases}$$

где $(A[\varphi_\varepsilon,z_\varepsilon])(x,t)=\int_0^x P(s,t)\varphi_\varepsilon(s)ds+\int_0^x P(s,t)\int_0^T z_\varepsilon(s,\tau)d\tau ds+$

$$+\int_0^x f(s,t,\varphi(s)+\int_0^t z(s,t)d\tau, z(s,t))ds.$$

Пусть $\bar\varphi_\varepsilon(x),\tilde\varphi_\varepsilon(x)\in\Omega_1,\quad \bar z_\varepsilon(x,t),\tilde z_\varepsilon(x,t)\in\Omega_2,$

где $\Omega_1=\{\varphi_\varepsilon(x)\in C[0,b]: |\varphi_\varepsilon(x)-\varphi_0|\le r_1,\ \forall x\in[0,b], 0<\varphi_0, r_1=const\}$,
$\Omega_2=\{z_\varepsilon(x,t)\in C(D): |z_\varepsilon(x,t)-z_0|\le r_2,\ \forall(x,t)\in(D), 0<z_0, r_2=const\}$,

Оценим разность $(A[\bar\varphi_\varepsilon,\bar z_\varepsilon])(x,t)-(A[\tilde\varphi_\varepsilon\tilde z_\varepsilon])(x,t),\ (B[\bar\varphi_\varepsilon,\bar z_\varepsilon])(x)-$
$-(B[\tilde\varphi_\varepsilon\tilde z_\varepsilon])(x)$.

Из (9) получим

$|(A[\bar\varphi_\varepsilon,\bar z_\varepsilon])(x,t)-(A[\tilde\varphi_\varepsilon,\tilde z_\varepsilon])(x,t)|\le b\big(\|P(x,t)\|_{C(D)}+L_{1f}\big)\|\bar\varphi_\varepsilon(x)-\tilde\varphi_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]}+$
$+b\big(\|P(x,t)\|_{C(D)}+L_{1f}T+L_{2f}\big)\|\bar z_\varepsilon(x,t)-\tilde z_\varepsilon(x,t)\|_{C(D)}$,

где $0<L_{if},\ (i=1,2)$ – коэффициент Липшица функции $f(x,t,w,z)$ по третьему и четвертому аргументам.

Для разности$(B[\bar\varphi_\varepsilon,\bar z_\varepsilon])(x)-(B[\tilde\varphi_\varepsilon,\tilde z_\varepsilon])(x)$ получим следующие оценки

$$1)\ \left|\int_0^s L(s,\xi)[\bar\varphi_\varepsilon(\xi)-\tilde\varphi_\varepsilon(\xi)]\,d\xi-\int_0^x L(x,\xi)[\bar\varphi_\varepsilon(\xi)-\tilde\varphi_\varepsilon(\xi)]\,d\xi\right|=$$
$$=\left|\int_0^s[L(s,\xi)-L(x,\xi)][\bar\varphi_\varepsilon(\xi)-\tilde\varphi_\varepsilon(\xi)]\,d\xi-\int_s^x L(x,\xi)[\bar\varphi_\varepsilon(\xi)-\tilde\varphi_\varepsilon(\xi)]d\xi\right|\le$$
$$\le 2b(L_K+C_0K_1)(x-s)\|\bar\varphi_\varepsilon(x)-\tilde\varphi_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]},$$

где $0<L_K$ - коэффициент Липшица функции $K(x,s)$по переменной x

$K_1=\max\limits_{D_1}|K(x,s)|, D_1=\{0\le s\le x\le b\}$.

$$2)\ \left|\int_0^s\int_0^T[K_0(x,\xi)-K_0(s,\xi)]P(\xi,t)\int_0^t[\bar z_\varepsilon(\xi,\tau)-\tilde z_\varepsilon(\xi,\tau)]d\tau dtd\xi+\right.$$

$$+\int_s^x\int_0^T K_0(x,\xi)P(\xi,t)\int_0^t[\bar{z}_\varepsilon(\xi,\tau)-\tilde{z}_\varepsilon(\xi,\tau)]d\tau dt d\xi\Bigg|\le$$
$$\le(x-s)(1+b)\frac{T^2}{2}\|K_0(x,s)\|_{C(D_1)}\|P(x,t)\|_{C(D)}\times\|\bar{z}_\varepsilon(x,t)-\tilde{z}_\varepsilon(x,t)\|_{C(D)},$$
3) $$\left|\int_0^s\int_0^T[K_0(x,\xi)-K_0(s,\xi)]\,[f(\xi,t,\bar{\varphi}_\varepsilon(\xi)+\int_0^t\bar{z}_\varepsilon(\xi,\tau)d\tau,\bar{z}_\varepsilon(\xi,t))-\right.$$
$$-f(\xi,t,\tilde{\varphi}_\varepsilon(\xi)+\int_0^t\tilde{z}_\varepsilon(\xi,\tau)d\tau,\tilde{z}_\varepsilon(\xi,t))]dtd\xi+$$
$$+\int_s^x\int_0^T K_0(x,\xi)[f(\xi,t,\bar{\varphi}_\varepsilon(\xi)+\int_0^t\bar{z}_\varepsilon(\xi,\tau)d\tau,\bar{z}_\varepsilon(\xi,t))-$$
$$\left.-f(\xi,t,\tilde{\varphi}_\varepsilon(\xi)+\int_0^t\tilde{z}_\varepsilon(\xi,\tau)d\tau,\tilde{z}_\varepsilon(\xi,t))]dtd\xi\right|\le(x-s)bTL_{K_0}\times$$
$$\times[L_{1f}\|\bar{\varphi}_\varepsilon(x)-\tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]}+\left(L_{1f}T+L_{2f}\right)\|\bar{z}_\varepsilon(x,t)-\tilde{z}_\varepsilon(x,t)\|_{C(D)}]+$$
$$+(x-s)T\|K_0(x,s)\|_{C(D_1)}L_{K_0}[L_{1f}\|\bar{\varphi}_\varepsilon(x)-\tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]}+\left(L_{1f}T+L_{2f}\right)\times$$
$$\times\|\bar{z}_\varepsilon(x,t)-\tilde{z}_\varepsilon(x,t)\|_{C(D)}]\le(x-s)T\left(bL_{K_0}+\|K_0(x,s)\|_{C(D_1)}\right)\times$$
$$\times\left[L_{1f}\|\bar{\varphi}_\varepsilon(x)-\tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]}+\left(L_{1f}T+L_{2f}\right)\|\bar{z}_\varepsilon(x,t)-\tilde{z}_\varepsilon(x,t)\|_{C(D)}\right],$$
Где $0<L_{K_0}$- коэффициент Липшица функции $K_0(x,s)$ по переменной x.

4) $$\left|\int_0^x L(x,s)[\bar{\varphi}_\varepsilon(s)-\tilde{\varphi}_\varepsilon(s)]ds\right|\le\left|\int_0^x[K(s,s)-K(x,s)+C_0\int_\nu^x K(\nu,s)d\nu]\times\right.$$
$$\left.\times[\bar{\varphi}_\varepsilon(s)-\tilde{\varphi}_\varepsilon(s)]ds\right|\le x\frac{b}{2}(L_K+C_0K_1)\|\bar{\varphi}_\varepsilon(x)-\tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]},$$
5) $$\left|\int_0^x\int_0^T K_0(x,s)P(s,t)\int_0^t[\bar{z}_\varepsilon(s,\tau)-\tilde{z}_\varepsilon(s,\tau)]d\tau dtds\right|\le x\frac{T^2}{2}\|K_0(x,s)\|_{C(D_1)}\times$$
$$\times\|P(x,t)\|_{C(D)}\|\bar{z}_\varepsilon(x,t)-\tilde{z}_\varepsilon(x,t)\|_{C(D)},$$
6) $$\left|\int_0^x\int_0^T K_0(x,s)[f(s,t,\bar{\varphi}_\varepsilon(s)+\int_0^t\bar{z}_\varepsilon(s,\tau)d\tau,\bar{z}_\varepsilon(s,t))-\right.$$
$$\left.-f(s,t,\tilde{\varphi}_\varepsilon(s)+\int_0^t\tilde{z}_\varepsilon(s,\tau)d\tau,\tilde{z}_\varepsilon(s,t))]dtds\right|\le xT\|K_0(x,s)\|_{C(D_1)}\times$$
$$\times\left[L_{1f}\|\bar{\varphi}_\varepsilon(x)-\tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]}+\left(L_{1f}T+L_{2f}\right)\|\bar{z}_\varepsilon(x,t)-\tilde{z}_\varepsilon(x,t)\|_{C(D)}\right].$$

В силу неравенств 1) - 6) получим

$$|(B[\bar{\varphi}_\varepsilon,\bar{z}_\varepsilon])(x)-(B[\tilde{\varphi}_\varepsilon,\tilde{z}_\varepsilon])(x)|\le d_1^{-1}\theta_2^{-2}\int_0^x exp\left(-\int_s^x\frac{\theta_2G(\xi)}{\varepsilon+p(\xi)}d\xi\right)\times$$
$$\times\left(\int_s^x\frac{\theta_2G(\xi)}{\varepsilon+p(\xi)}d\xi\right)d\left(\int_s^x\frac{\theta_2G(\xi)}{\varepsilon+p(\xi)}d\xi\right)\left\{\frac{3}{2}b(L_K+C_0K_1)\|\bar{\varphi}_\varepsilon(x)-\tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]}+\right.$$

$$+(1+b)\frac{T^2}{2}\|C(x)\|_{C[0,b]}L_{K_0}\|P(x,t)\|_{C(D)}\|\bar{z}_\varepsilon(x,t)-\tilde{z}_\varepsilon(x,t)\|_{C(D)}+$$
$$+\left(bL_{K_0}+\|K_0(x,s)\|_{C(D_1)}\right)T[L_{1f}\|\bar{\varphi}_\varepsilon(x)-\tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]}+$$
$$+\left(L_{1f}T+L_{2f}\right)\|\bar{z}_\varepsilon(x,t)-\tilde{z}_\varepsilon(x,t)\|_{C(D)}]\quad\Big\}+d_1^{-1}\theta_2^{-1}\left(\int_0^x\frac{\theta_2 G(s)}{\varepsilon+p(x)}ds\right)\times$$
$$\times\exp\left(-\int_0^x\frac{\theta_2 G(s)}{\varepsilon+p(x)}ds\right)\Big\{\frac{b}{2}(L_K+C_0K_1)\|\bar{\varphi}_\varepsilon(x)-\tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]}+\frac{T^2}{2}\|K_0(x,s)\|_{C(D_1)}\times$$
$$\times\|P(x,t)\|_{C(D)}\|\bar{z}_\varepsilon(x,t)-\tilde{z}_\varepsilon(x,t)\|_{C(D)}+T\|K_0(x,s)\|_{C(D_1)}[L_{1f}\|\bar{\varphi}_\varepsilon(x)-\tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]}+$$
$$+\left(L_{1f}T+L_{2f}\right)\|\bar{z}_\varepsilon(x,t)-\tilde{z}_\varepsilon(x,t)\|_{C(D)}]\quad\Big\}\le d_1^{-1}\theta_2^{-2}\Big\{\frac{3}{2}b(L_K+C_0K_1)\times$$
$$\times\|\bar{\varphi}_\varepsilon(x)-\tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]}+(1+b)\frac{T^2}{2}\|C(x)\|_{C[0,b]}L_{K_0}\|P(x,t)\|_{C(D)}\times$$
$$\times\|\bar{z}_\varepsilon(x,t)-\tilde{z}_\varepsilon(x,t)\|_{C(D)}+\left(bL_{K_0}+\|K_0(x,s)\|_{C(D_1)}\right)T[L_{1f}\|\bar{\varphi}_\varepsilon(x)-\tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]}+$$
$$+\left(L_{1f}T+L_{2f}\right)\|\bar{z}_\varepsilon(x,t)-\tilde{z}_\varepsilon(x,t)\|_{C(D)}]\quad\Big\}+d_1^{-1}\theta_2^{-1}e^{-1}\Big\{\frac{b}{2}(L_K+C_0K_1)\times$$
$$\times\|\bar{\varphi}_\varepsilon(x)-\tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]}+\frac{T^2}{2}\|K_0(x,s)\|_{C(D_1)}\|P(x,t)\|_{C(D)}\|\bar{z}_\varepsilon(x,t)-\tilde{z}_\varepsilon(x,t)\|_{C(D)}+$$
$$+T\|K_0(x,s)\|_{C(D_1)}[L_{1f}\|\bar{\varphi}_\varepsilon(x)-\tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]}+\left(L_{1f}T+L_{2f}\right)\|\bar{z}_\varepsilon(x,t)-\tilde{z}_\varepsilon(x,t)\|_{C(D)}]\}\le$$
$$\le d_1^{-1}\theta_2^{-1}\Big\{\frac{3b}{2\theta_2}(L_K+C_0K_1)+\theta_2^{-1}\left(bL_{K_0}+\|K_0(x,s)\|_{C(D_1)}\right)TL_{1f}+\frac{b}{2}e^{-1}(L_K+C_0K_1)+$$
$$+e^{-1}T\|K_0(x,s)\|_{C(D_1)}L_{1f}\quad\Big\}\|\bar{\varphi}_\varepsilon(x)-\tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]}+d_1^{-1}\theta_2^{-1}\Big\{(1+b)\theta_2^{-1}\frac{T^2}{2}L_{K_0}\times$$
$$\times\|C(x)\|_{C[0,b]}\|P(x,t)\|_{C(D)}+\theta_2^{-1}\left(bL_{K_0}+\|K_0(x,s)\|_{C(D_1)}\right)T\left(L_{1f}T+L_{2f}\right)+\theta_2^{-1}e^{-1}\frac{T^2}{2}\times$$
$$\times\|K_0(x,s)\|_{C(D_1)}\|P(x,t)\|_{C(D)}+e^{-1}T\|K_0(x,s)\|_{C(D_1)}\left(L_{1f}T+L_{2f}\right)\quad\Big\}\times$$
$\times\|\bar{z}_\varepsilon(x,t)-\tilde{z}_\varepsilon(x,t)\|_{C(D)}$, где$\theta_2=1-\theta_1,\ 0<\theta_1<1$.

Тогда приходим к системе неравенств

$$\begin{cases}|A[\bar{\varphi}_\varepsilon,\bar{z}_\varepsilon](x,t)-A[\tilde{\varphi}_\varepsilon,\tilde{z}_\varepsilon](x,t)|\le q_{11}\|\bar{\varphi}_\varepsilon(x)-\tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]}+\\ +q_{12}\|\bar{z}_\varepsilon(x,t)-\tilde{z}_\varepsilon(x,t)\|,\\ |(B[\bar{\varphi}_\varepsilon,\bar{z}_\varepsilon])(x)-(B[\tilde{\varphi}_\varepsilon,\tilde{z}_\varepsilon])(x)|\le q_{21}\|\bar{\varphi}_\varepsilon(x)-\tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]}+\\ +q_{21}\|\bar{z}_\varepsilon(x,t)-\tilde{z}_\varepsilon(x,t)\|_{C(D)},\end{cases}\qquad(10)$$

где $q_{11}=b\left(\|P(x,t)\|_{C(D)}+L_{1f}\right), q_{12}=b\left(\|P(x,t)\|_{C(D)}+L_{1f}T+L_{2f}\right),$

$$q_{21}=d_1^{-1}\theta_2^{-1}\Big\{\frac{3}{2}b\theta_2^{-1}(L_K+C_0K_1)++\theta_2^{-1}\left(bL_{K_0}+\|K_0(x,s)\|_{C(D_1)}\right)TL_{1f}+$$
$$+\frac{b}{2}e^{-1}(L_K+C_0K_1)+e^{-1}T\|K_0(x,s)\|_{C(D_1)}L_{1f}\Big\},$$

$$q_{22} = d_1^{-1}\theta_2^{-1}\Big\{(1+b)\theta_2^{-1}\frac{T^2}{2}\|C(x)\|_{C[0,b]}L_{K_0}\|P(x,t)\|_{C(D)} +$$
$$+\theta_2^{-1}\big(bL_{K_0} + \|K_0(x,s)\|_{C(D_1)}\big)T\big(L_{1f}T + L_{2f}\big) + \theta_2^{-1}e^{-1}\frac{T^2}{2}\times$$
$$\times\|K_0(x,s)\|_{C(D_1)}\|P(x,t)\|_{C(D)} + e^{-1}T\|K_0(x,s)\|_{C(D_1)}\big(L_{1f}T + L_{2f}\big)\Big\}.$$

Суммируя (10) получим

$$|(A[\bar\varphi_\varepsilon,\bar z_\varepsilon])(x,t) - (A[\tilde\varphi_\varepsilon,\tilde z_\varepsilon])(x,t)| + |(B[\bar\varphi_\varepsilon,\bar z_\varepsilon])(x) - (B[\tilde\varphi_\varepsilon,\tilde z_\varepsilon])(x)| \le$$
$$\le q_1\|\bar\varphi_\varepsilon(x) - \tilde\varphi_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} + q_2\|\bar z_\varepsilon(x,t) - \tilde z_\varepsilon(x,t)\|_{C(D)},$$

где $q_1 = q_{11} + q_{21}$, $q_2 = q_{12} + q_{22}$.

Введем следующее обозначение

$$(H_\varepsilon\varphi)(x) \equiv \frac{1}{\varepsilon + p(x)}\int_0^x exp\left(-\int_s^x \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)}d\xi\right)\frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)}[\varphi(x) - \varphi(s)]ds -$$
$$-\frac{1}{\varepsilon + p(x)}exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)}ds\right)[\varphi(x) - \varphi(0)]. \qquad (11)$$

Имеет место следующая лемма [4].

Лемма. Пусть выполняются условия *а-в* и $\varphi(x) \in C^1[0,b]$. Тогда справедлива оценка

$$\|\varepsilon(H_\varepsilon\varphi)(x)\|_{C[0,b]} \le \varepsilon d_2,$$

где $d_2 = d_1^{-1}(1 + e^{-1})\|\varphi'(x)\|_{C[0,b]}$.

Теорема. Пусть выполняются условия *а-в*, $q_0 = max(q_1, q_2) < 1$ и $\varphi(x) \in C^1[0,b]$. Тогда при $\varepsilon \to 0$, решение системы уравнений (9) равномерно сходится к решению системы уравнений (8). Причем имеет место оценка

$$\|\bar z_\varepsilon(x,t) - \tilde z_\varepsilon(x,t)\|_{C(D)} + \|\bar\varphi_\varepsilon(x) - \tilde\varphi_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} \le (1 - q_0)^{-1}d_2\varepsilon,$$
$$0 < d_2 = const.$$

Доказательство. Воспользуемся подстановками

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(x) + \eta_\varepsilon(x),$$
$$z_\varepsilon(x,t) = z(x,t) + \mu_\varepsilon(x,t).$$

Тогда из (9) приходим к системе уравнений

$$\mu_\varepsilon(x,t) = \int_0^x P(s,t)\eta_\varepsilon(s)ds + \int_0^x P(s,t)\int_0^t \mu_\varepsilon(s,\tau)d\tau ds +$$
$$+\int_0^x [f(s,t,\varphi_\varepsilon(s) + \int_0^t z_\varepsilon(s,\tau)d\tau, z_\varepsilon(s,t)) - f(s,t,\varphi(s) + \int_0^t z(s,t)d\tau, z(s,t))]ds,$$
$$\big(\varepsilon + p(x)\big)\eta_\varepsilon(x) + \int_0^x G(s)\eta_\varepsilon(s)ds = \int_0^x L(x,s)\eta_\varepsilon(s)ds -$$
$$-\int_0^x\int_0^T K_0(x,s)P(s,t)\int_0^t \mu_\varepsilon(s,\tau)d\tau dt ds -$$

$$-\int_0^x \int_0^T K_0(x,s)\,[f(s,t,\varphi_\varepsilon(s)+\int_0^t z_\varepsilon(s,\tau)d\tau, z_\varepsilon(s,t))-$$
$$-f(s,t,\varphi(s)+\int_0^t z(s,t)\,d\tau, z(s,t))]ds-\varepsilon\big(\varphi(x)-\varphi(0)\big). \quad (12)$$

Перепишем второе уравнение системы (12), используя резольвенту ядра $\left(-\frac{G(s)}{\varepsilon+p(x)}\right)$, в следующем виде

$$\eta_\varepsilon(x)=-\frac{1}{\varepsilon+p(x)}\int_0^x exp\left(-\int_s^x \frac{G(\xi)}{\varepsilon+p(\xi)}d\xi\right)\frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}\left\{\int_0^s L(s,\xi)\eta_\varepsilon(\xi)d\xi-\right.$$
$$-\int_0^x L(x,\xi)\eta_\varepsilon(\xi)d\xi+\int_0^x\int_0^T K_0(x,\xi)P(x,\xi)\int_0^t \mu_\varepsilon(\xi,\tau)d\tau dt d\xi-$$
$$-\int_0^t \mu_\varepsilon(\xi,\tau)d\tau dt d\xi+\int_0^x\int_0^T K_0(x,\xi)\,[f(\xi,t,\varphi_\varepsilon(\xi)+\int_0^t z_\varepsilon(\xi,\tau)d\tau, z_\varepsilon(\xi,t))-$$
$$\left.-f(\xi,t,\varphi(\xi)+\int_0^t z(\xi,\tau)d\tau, z(\xi,t))]dt d\xi+\varepsilon[\varphi(x)-\varphi(s)]\right\}ds+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon+p(x)}exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)ds}{\varepsilon+p(s)}\right)\left\{\int_0^x L(x,s)\eta_\varepsilon(s)ds-\right.$$
$$-\int_0^x\int_0^T K_0(x,s)P(x,s)\int_0^t \mu_\varepsilon(s,\tau)d\tau dt ds-$$
$$-\int_0^x\int_0^T K_0(x,s)[f(s,t,\varphi_\varepsilon(s)+\int_0^t z_\varepsilon(s,t)d\tau, z_\varepsilon(s,t)\big)-$$
$$\left.-f(s,t,\varphi(s)+\int_0^t z(s,t)d\tau, z(s,t)\big)]dt ds-\varepsilon[\varphi(x)-\varphi(0)]\right\}.$$

Учитывая оценки для разности $(B[\bar{\varphi}_\varepsilon,\bar{z}_\varepsilon])(x)-(B[\tilde{\varphi}_\varepsilon,\tilde{z}_\varepsilon])(x)$и обозначение (11) для $\mu_\varepsilon(x,t)$ и $\eta_\varepsilon(x)$ имеет место оценка

$$\begin{cases}\|\mu_\varepsilon(x,t)\|_{C(D)}\le q_{11}\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]}+q_{12}\|\mu_\varepsilon(x,t)\|_{C(D)},\\ \|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]}\le q_{21}\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]}+q_{22}\|\mu_\varepsilon(x,t)\|_{C(D)}+\|\varepsilon(H_\varepsilon\varphi)(x)\|_{C[0,b]}.\end{cases} \quad (13)$$

Из (13), учитывая лемму получим

$$\|\mu_\varepsilon(x,t)\|_{C(D)}+\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]}\le q_0\big[\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]}+\|\mu_\varepsilon(x,t)\|_{C(D)}\big]+\varepsilon d_2.$$

Отсюда следует оценка теоремы, что и требовалось доказать.

Следствие. При выполнении условий *а*-*в* решение системы уравнения (8) единственно в паре(Ω_1,Ω_2).

Если выполняются условия теоремы, то для функций $w(x,t)$, $w_\varepsilon(x,t)$, и их производных $w_t(x,t)$, $w_{xt}(x,t)$, $w_{\varepsilon t}(x,t)$, $w_{\varepsilon xt}(x,t)$ при $\varepsilon\to 0$, имеет место равномерная сходимость $w_\varepsilon(x,t)\to w(x,t)$, $w_{\varepsilon t}(x,t)\to w_t(x,t)$, $w_{\varepsilon xt}(x,t)\to w_{xt}(x,t)$.

Список литература

1. Рустамова Д.К. Нелокальная по времени краевая задача для гиперболических дифференциальных уравнений // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. – Бишкек, 2010. – Вып. 4. – С. 158-162.
2. Каракеев Т.Т., Рустамова Д.К. Регуляризация нелокальной по времени краевой задачи для нелинейных уравнений в частных производных // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. – Бишкек, 2012. – Вып. 5. – С. 34-44.
3. Каракеев Т.Т., Рустамова Д.К. Регуляризация нелокальной краевой задачи для уравнения Бенжамина-Бона-Махони // Приволжский научный вестник. – Ижевск, 2016. – №1 (53). – С. 10-15.
4. Омуров Т.Д., Каракеев Т.Т. Регуляризация и численные методы решения обратных и нелокальных краевых задач. – Бишкек: Илим, 2006. – 163с.

References

1. Rustamova D.K. Non-local time boundary problem for hyperbolic differential equations // Bulletin KNU named after J. Balasagyna. – Bishkek, 2010. –Iss. 4. – P. 158-162.
2. Karakeev T.T., Rustamova D.K. Regularization of the non-local time boundary problem for nonlinear equations in partial derivatives // Bulletin KNU named after J. Balasagyna. – Bishkek, 2012. – Iss. 5. – P. 34-44.
3. Karakeev T.T., Rustamova D.K. Regularization of a non-local boundary problem for the Benjamin-Bon-Mahoney equation // Volga Scientific Bulletin. – Izhevsk, 2016. – No. 1 (53). – P. 10-15.
4. Omurov T.D., Karakeev T.T. Regularization and numerical methods for solving inverse and non-local boundary problems. – Bishkek: Ilim, 2006. – 163p.

Каракеев Таалайбек Тултемирович – доктор физико-математических наук, профессор, tkarakeev@yandex.ru	**Karakeev Taalaibek Tultemirovich –** doctor of physical and mathematical sciences, professor, tkarakeev@yandex.ru
Рустамова Динара Кошеевна – кандидат физико-математических наук, доцент, drustamova@list.ru	**RustamovaDinaraKosheevna –** candidate of physics and mathematics sciences, associate professor, drustamova@list.ru
Бугубаева Жумгалбубу Тукеновна – старший преподаватель, tbugubaeva@mail.ru	**Bugubaeva Zhumgalbubu Tukenovna –** senior lecturer, tbugubaeva@list.ru
Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, факультет информационных и инновационных технологий, г. Бишкек, Кыргызстан	Kyrgyz National University named after J. Balasagyn, Faculty of Information and Innovative Technologies, Bishkek, Kyrgyzstan

Received 12.08.2020