https://doi.org/10.26160/2474-5901-2019-17-129-133

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА УПРАВЛЕНИЯ ТЕПЛООБМЕНОМ В ОБМОТКЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ МАШИНЫ

Конева С.А., Цалоев В.М.

Ключевые слова: электрическая машина, теплообмен, температура обмотки, дифференциальное уравнение.

Аннотация. Рассматривается построениее решения математической модели динамики процесса теплообмена в обмотке электрической машины.

CONSTRUCTION OF MATHEMATICAL MODEL OF MANAGEMENT ROCESS BY HEAT EXCHANGE IN PUTTEE OF ELECTRIC MACHINE

Koneva S.A, Tsaloev V.M.

Keywords: electric machine, heat exchange, winding temperature, differential equation.

Abstract. The construction of a solution of a mathematical model of the dynamics of heat transfer process in the winding of the machine.

Процесс электромеханического преобразования электроэнергии сопровождается ее потерями, ведущими к нагреву элементов машины. Возникают две задачи: определение потерь энергии $\Delta P_{\theta}(t)$ и определение температуры элементов машины $T_T(t)$.

Важной проблемой является нагрев ее обмоток, материал изоляции которой имеют критические пределы нагрева. Обмотка рассматривается как электрическая катушка. Описание распределения температуры в таких проводниках, а также расчет максимальной температуры в точках перегрева, представляет для расчета электрических машин большой интерес, тем более, что часто максимально допустимый ток нагрузки заранее предопределяется фиксированным значением допустимой пиковой температуры для материала катушки (обмотки).

Длина продольной оси катушки велика по сравнению с размерами профильного поперечного сечения. Все выделяемое тепло в обмотке отводится к ее поверхности. В разрезе, нормальном к продольной оси, наблюдается следующая картина: т.к. площадь сечения каждого проводника составляет небольшой процент общей площади сечения, то процесс выделения тепла можно считать равномерным по всей площади поперечного сечения (т.е. зависит только от расстояния точки от центра сечения). В конечном счете, допустима замена катушки однородным проводником круглого сечения [3]. Исходя из этого допущения, рассматриваем распределение температуры в плоском круглом сечении.

При данном механизме теплообмена температура охлаждающей среды при естественном либо искусственном охлаждении хладагентом (воздух, водород, вода), является функцией градиента температуры поверхности, разграничивающей обе среды (для элемента поверхности). Уравнение теплопроводности для любого сечения обмотки имеет вид:

$$c_T \gamma_T \frac{\partial T_T}{\partial t} = \mathrm{Div}(\lambda \operatorname{grad} T_T) + q(r, x, t). \quad (1)$$

Уравнение теплового баланса для хладагента записывается как

$$\mathrm{cG}dT = \frac{\alpha f}{\ell}(T_{T_R}(x, R, t) - T)dx. \quad (2)$$

Начальные условия принимаем нулевые, т.е.

$$T_T(x, r, 0) = T(x, r, 0) = 0.$$

Граничные условия:

$$-\lambda \left.\frac{\partial T_T}{\partial r}\right|_{r=R} = \alpha\left[T_{TR}(x, R, t) - T(x, t)\right]; \quad \left.\frac{\partial T_T(0, x, t)}{\partial r}\right|_{r=0} = 0. \quad (3)$$

Здесь принято, что влияние теплопроводности воздуха пренебрежимо мало и обозначено через λ – коэффициент теплопроводности материала обмотки; T_{T_R} – температура при $r=R$; c, γ, G – соответственно удельная теплоемкость, плотность и расход хладагента; α – коэффициент теплоотдачи хладагента; q – тепловой поток, f – поверхность теплообмена. Уравнение (1) справедливо для плоской и цилиндрической геометрии, т.е.

$$c_T \gamma_T \frac{\partial T_T}{\partial t} = q(x,.., y, t) + \lambda\left(\frac{\partial^2 T_T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_T}{\partial y^2} + ...\right) + \frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial T_T}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial y}\frac{\partial T_T}{\partial y} + ... \ .$$

Так как для твердого тела при $\lambda = const$ $\frac{\partial \lambda}{\partial x} = W_x = 0;\ \frac{\partial \lambda}{\partial y} = W_y = 0,...,$ то (1) перепишется в виде

$$c_T \gamma_T \frac{\partial T_T}{\partial t} = \frac{q}{\lambda}(x,.., y, t) + \nabla^2 T_T,$$

где $\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)$ – оператор Лапласа для цилиндрической геометрии. Раскрывая $\nabla^2 T_T$, получаем

$$\nabla^2 T_T = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 T_T}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T_T}{\partial \varphi^2}.$$

Для некоторого упрощения решения задачи, введем следующие предположения: распределение температуры по радиусу принимаем осесимметричное; теплопроводность обмотки и охлаждающей среды в осевом направлении потока принимаем пренебрежимо малой; наружная поверхность аппарата теплоизолированная; тепловыделение по сечению и длине обмотки принимается равномерное.

Вместо r и x вводятся безразмерные величины r/R, x/ℓ, которые меняются от 0 до 1. Для них сохраняются принятые обозначения r, x. При указанных допущениях исходные уравнения (1),(2) приводятся к виду:

$$\begin{cases} c_T \gamma_T \dfrac{\partial T_T}{\partial t} = \lambda_T \left(\dfrac{\partial^2 T_T}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial T_T}{\partial r} \right) + q(t), \\ cm \dfrac{\partial T}{\partial t} + \mathrm{cG} \dfrac{\partial T}{\partial x} = \dfrac{\alpha f}{\ell} (T_{T_R} - T), \end{cases} \tag{4}$$

при $t > 0$ и $0 \le x \le \ell;\ \ 0 \le r \le R$.

После преобразования Лапласа по переменной t система уравнений (4) и граничные условия запишутся в относительных величинах:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 T_T}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial T_T}{\partial r} - apT_T = -\dfrac{a_1}{p} q; \\ \dfrac{\partial T}{\partial x} + (b_1 p + b_2) T = b_2 T_T(x, R, p) - b_4 G; \end{cases} \tag{5}$$

где $a = \dfrac{c_T \gamma_T R^2}{\lambda_T};\ \ a_1 = \dfrac{R^2}{\lambda_T};\ b_1 = \dfrac{m}{G};\ \ \ b_2 = \dfrac{\alpha f}{cG}$.

Сделав замену $z = i\sqrt{a\,\mathrm{p}} \cdot r$ в первом уравнении системы (5), приходим к уравнению Бесселя нулевого порядка [1]:

$$\frac{\partial^2 T_T}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial T_T}{\partial z} + T_T = \frac{a_1}{ap} q. \tag{6}$$

Общее решение уравнения (6) имеет вид

$$T_T(x, r, p) = C_1(x) J_0(z) + C_2(x) Y_0(z) + C_0,$$

где $J_0(z)$ – функция Бесселя нулевого порядка; $Y_0(z)$ – функция Вебера нулевого порядка; $C_1(x),\ C_2(x),\ C_0$ – функции интегрирования.

Так как функция T_T должна быть ограничена при $r \to 0$, а $Y_0(\sqrt{ap} \cdot r)$ при $r \to 0$ стремится к бесконечности [2], то функция $C_2(x)$ должна равняться нулю. С учетом второго граничного условия, получим окончательное решение в форме изображения при $r = R = 1$

$$T_T(x, 1, \mathrm{p}) = T_{T_R} = C_1(x) I_0(\sqrt{a\,\mathrm{p}}) + \frac{a_1}{a\,\mathrm{p}} q, \tag{7}$$

где $I_0(\sqrt{ap})$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка [2], определяемая, как $I_0(\sqrt{ap}) = J_0\left(i\sqrt{ap}\right)$. Для определения постоянной интегрирования $C_1(x)$ преобразуем второе уравнение системы (5), подставив в него второе граничное условие (3) (при $r=1$). Получим:

$$\frac{\partial T}{\partial x} + Tb_1 p = -b \left(\frac{\partial T_T}{\partial r} \right) \Bigg|_{r=1} - b_4 G, \tag{8}$$

где $b = b_2 \dfrac{\lambda}{\alpha}$. Продифференцировав по r выражение (7), находим:

$$\frac{\partial T_T}{\partial r} \bigg|_{r=1} = \frac{\partial T_{T_R}}{\partial r} = C_1(x) \sqrt{ap} I_1 \sqrt{(ap)}\ .$$

Используя первое граничное условие при r=1 с учетом выражения (2), находим:

$$T = T_T + b\frac{\partial T_T}{\partial r} = C_1(x)I_0(\sqrt{a}\,\mathrm{p}) + \frac{a_1}{ap}q + bC_1(x)\sqrt{ap}I_1(\sqrt{a}\,\mathrm{p}) = \\ = C_1(x)\left[I_0(\sqrt{a}\,\mathrm{p}) + b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{a}\,\mathrm{p})\right] + \frac{a_1}{ap}q. \qquad (9)$$

Продифференцировав последнее выражение по x, получим

$$\frac{dT}{dx} = \frac{dC_1}{dx}\left[I_0(\sqrt{ap}) + b\sqrt{ap}\cdot I_1(\sqrt{ap})\right].$$

Подставив найденные значения производных в уравнение (9), получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $C_1(x)$:

$$\frac{dC_1}{dx}\left[I_0(\sqrt{ap}) + b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{ap})\right] + C_1(x)\left[I_0(\sqrt{ap}) + b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{ap})\right]b_1p + \\ + bC_1(x)\sqrt{ap}I_1(\sqrt{ap}) = -\frac{a_1\,b_1}{ap^2}q - b_4G\,.$$

После соответствующих преобразований последнего выражения запишем:

$$\frac{dC_1}{dx} + C_1(x)\left[b_1p + \frac{b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{ap})}{I_0(\sqrt{ap}) + b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{ap})}\right] = \\ = -\frac{a_1b_1p}{apI_0(\sqrt{a}\,\mathrm{p}) + b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{a}\,\mathrm{p})}q - \frac{b_4G}{I_0(\sqrt{a}\,\mathrm{p}) + b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{a}\,\mathrm{p})}.$$

Решение этого неоднородного уравнения относительно q, имеет вид

$$C_1(x) = -\frac{B(p)}{A(p)} + C(p)e^{-A(p)}, \qquad (10)$$

где $B(p) = \dfrac{a_1b_1}{a\left[I_0(\sqrt{a}\,\mathrm{p}) + b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{a}\,\mathrm{p})\right]}$; $\quad A(p(= b_1p + \dfrac{b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{ap})}{I_0(\sqrt{ap}) + b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{ap})}$.

Подставляя выражение (10) в (9) и используя граничное условие при x=0, $T(0,p) = T_1(p)$, находим:

$$T_1(p) = \left[C(p) - \frac{B(p)}{A(p)}\right]\left[I_0(\sqrt{a}\,\mathrm{p}) + b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{a}\,\mathrm{p})\right] + \frac{a_1}{ap}q.$$

Откуда

$$C(p) = \frac{T_1(p)}{\left[I_0(\sqrt{a}\,\mathrm{p}) + b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{a}\,\mathrm{p})\right]} + \frac{B(p)}{A(p)} - \frac{a_1}{ap\left[I_0(\sqrt{a}\,\mathrm{p}) + b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{a}\,\mathrm{p})\right]}q. \qquad (11)$$

С учетом выражения (10) и (11), решение в форме изображения для температуры хладагента принимает вид:

$$T(x,p) = C_1(x)\left[I_0(\sqrt{a}\,\mathrm{p}) + b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{a}\,\mathrm{p})\right] + \frac{a_1}{ap}q = \left[-\frac{B(p)}{A(p)} + C(p)e^{-A(p)x}\right]\left[I_0(\sqrt{ap}) + b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{ap})\right] +$$

$$+\frac{a_1}{ap}q=\frac{a_1 q}{ap}\left(1-e^{-A(p)x}\right)\left[1-\frac{b_1 p\left[I_0(\sqrt{ap})+b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{ap})\right]ap\cdot a_1 q}{a_1 q\left[I_0(\sqrt{ap})+b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{ap})\right]\cdot ap\cdot A(p)}\right]+T_1(pp)^{-A(p)x}.$$

или
$$T(x,p)=\frac{a_1}{ap}\left[1-\frac{b_1 p}{A(p)}\right]\left(1-e^{-A(p)x}\right)q+e^{-A(p)x}T_1(p). \qquad (12)$$

Для температуры обмотки:

$$T_T(x,r,p)=C_1(x)I_0(\sqrt{ap}\cdot r)+\frac{a_1}{ap}q=\left[-\frac{B(p)}{A(p)}+C(p)e^{-A(p)x}\right]I_0(\sqrt{ap}\cdot r)+\frac{a_1}{ap}q=$$

$$=\frac{I_0(\sqrt{ap}\cdot r)}{\left[I_0(\sqrt{a\mathrm{p}})+b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{a\mathrm{p}})\right]}e^{-A(p)x}T_1(p)+ \qquad (13)$$

$$+\frac{a_1}{ap}\left\{\left[1-\frac{I_0(\sqrt{ap}\cdot r)}{\left[I_0(\sqrt{a\mathrm{p}})+b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{a\mathrm{p}})\right]}e^{-A(p)x}\right]-\frac{b_1 p}{A(p)}\frac{I_0(\sqrt{ap}\cdot r)}{I_0(\sqrt{a\mathrm{p}})+b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{a\mathrm{p}})}\left[1-e^{-A(p)x}\right]\right\}q.$$

Выводы. Выражения (12) и (13) справедливы при α=const и связывают переменные в любой точке рассматриваемого пространства системы, поведение которой описывается дифференциальными уравнениями в частных производных.

Список литературы

1. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: МГУ, 1999. –724 с.
2. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. – М.: Изд-во иностр. лит., 1989. – 220 с.
3. Шевяков А.А. Управление тепловыми объектами с распределенными параметрами / А.А. Шевяков, Р.В. Яковлева. – М.: Энергоатомиздат, 1986. –208 с.

References

1. Tikhonov A.N. Equations of mathematical physics / A.N. Tikhonov, A.A. Samarsky. – M.: MSU, 1999. –724 p.
2. Watson G.N. Theory of Bessel functions. – M.: Publ. house for. lit., 1989. – 220p.
3. Shevyakov A.A. Control of thermal objects with distributed parameters / A.A. Shevyakov, R.V. Yakovleva. – M: Energoatomizdat, 1986. – 208 p.

Конева Светлана Андреевна – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой, e-mail: ksa2602@mail.ru	**Koneva Svetlana Andreevna –** candidate of technical sciences, associate professor, head of Department, ksa2602@mail.ru
Цалоев Владимир Муратович – старший преподаватель e-mail: 1._@mail.ru	**Tsaloev Vladimir Muratovich –** senior lecturer, 1._@mail.ru
Кафедра «Судовое электрооборудование», «Севастопольский государственный университет», Севастополь, Россия	Department "Marine electrical equipment», Sevastopol state University, Sevastopol, Russia

Received 11.12.2019