https://doi.org/10.26160/2474-5901-2019-15-110-116

ОПТИМИЗАЦИЯ МНОГОМЕРНОГО МОДАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА

Матвиенко В.Т.

Ключевые слова: линейные стационарные многомерные объекты управления, модальное управление, оптимизация модального регулятора, минимизация энергии управления.

Аннотация. Рассматривается задача многомерного модального управления для линейных стационарных динамических систем. Приводится построение оптимального модального регулятора с минимальной нормой. Предложен алгоритм построения асимптотически устойчивого регулятора с ограничением на фазовые траектории системы и с максимизацией области ее начальных возмущений.

OPTIMIZATION OF MULTIDIMENSIONAL MODAL CONTROLLER

Matvienko V.T.

Keywords: modal control, optimization, eigenvalues, constraint on trajectories, minimization of control energy, multidimensional modal controllers, asymptotically stability.

Abstract. The problem of multidimensional modal control for stationary systems is considered. The construction of optimal modal regulator with a minimum rate is given. An algorithm for constructing an asymptotically stable controller with a limitation on the phase trajectories of the system is proposed, and the region of initial perturbations of the control system is maximized.

Многомерность управляющего входа объекта значительно затрудняет решение задачи модального управления [1]: она привносит в задачу модального управления неоднозначность решения. Естественный путь устранения данной неоднозначности заключается в оптимизации решения задачи модального управления многомерным объектом.

Идея оптимизации модального управления впервые предложена в 1969г. в работе Андерсона (Anderson B.D.O) и Мура (Moore I.B.) и получила развитие в работах Портера (Porter B.), Коваритакиса (Kouvaritakis B.), Кириченко Н.Ф., Медведева М.С., Параева Ю.И. и др. В настоящей работе предлагаются методы синтеза модального регулятора с минимальной нормой, а также с ограничением на фазовые траектории системы и с максимизацией области начальных возмущений.

Одномерный модальный регулятор

Рассмотрим сначала класс конечномерных линейных стационарных объектов, описываемых в переменных состояния уравнением

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + bu(t), \tag{1}$$

где $x \in R^n$ и $u \in R$ – соответственно вектор состояния и скалярный управляющий вход объекта; $A \in R^{n\times n}$ и $b \in R^{n\times 1}$ – коэффициентные матрицы объекта; R - поле вещественных чисел.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ - полюса объекта (собственные значения матрицы A), являющиеся множеством корней характеристического уравнения

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \ldots + p_n = 0\,. \quad (2)$$

Замкнем объект управления (1) модальным регулятором в виде матричного усилителя в цепи обратной связи по состоянию

$$u(t) = c^{\mathrm{T}} x(t)\,, \quad (3)$$

где $c \in R^{n\times 1}$ – коэффициентная матрица-вектор регулятора.

Задача модального управления заключается в построении для объекта (1) регулятора (3), обеспечивающего замкнутой системе управления

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A + bc^{\mathrm{T}})x(t) \quad (4)$$

наперед заданные полюса $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, являющиеся множеством корней полинома

$$\chi^*(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \mu_i) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_n = 0\,. \quad 5)$$

Решение задачи модального управления, т.е. искомый матричный усилитель c регулятора (3), находится из равенства

$$\chi_{A+bc^{\mathrm{T}}}(\lambda) = \det(\lambda E - A - bc^{\mathrm{T}}) = \chi^*(\lambda)$$

и имеет следующий вид [2, 3]:

$$c = (S^{-1})^{\mathrm{T}} P^{-1}(p - a)\,, \quad 6)$$

где

$$S = (b,\, Ab,\, A^2b,\, \ldots,\, A^{n-1}b)\,,\ \det S \neq 0\,;$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ p_1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ p_2 & p_1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ p_{n-1} & p_{n-2} & \ldots & p_1 & 1 \end{bmatrix},\quad p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix},\ a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}. \quad 7)$$

Многомерный модальный регулятор

Рассмотрим теперь класс конечномерных линейных стационарных многомерных объектов управления

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)\,, \quad 8)$$

где $x \in R^{n\times n}$ и $u \in R^{m\times 1}$ – соответственно вектор состояния и векторный управляющий вход объекта; $A \in R^{n\times n}$ и $B \in R^{n\times m}$ – коэффициентные матрицы объекта.

Полюса объекта управления (8) определяются множеством корней его характеристического уравнения (2).

Замкнем объект управления (8) многомерным модальным регулятором вида

$$u(t) = Cx(t), \tag{9}$$

где $C \in R^{m \times n}$ – коэффициентная матрица регулятора.

Задача модального управления заключается в построении для объекта (8) регулятора (9), обеспечивающего замкнутой системе управления

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A + BC)x(t) \tag{10}$$

наперед заданные полюса $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, являющиеся множеством корней полинома (5).

Решение данной задачи модального управления, т.е. искомый матричный усилитель C регулятора (9), находится из равенства

$$\chi_{A+BC}(\lambda) = \det(\lambda E - A - BC) = \chi^*(\lambda).$$

Очевидно, что данное решение неоднозначно.

Ограничимся рассмотрением т.н. одноранговего модального регулятора (9), т.е. представим матрицу регулятора C в виде

$$C = vq^{\mathrm{T}}, \tag{11}$$

где $v \in R^{m \times 1}$ и $q \in R^{n \times 1}$ – векторы коэффициентов регулятора.

Очевидно, что $\operatorname{rang} C = 1$.

Уравнение замкнутой системы управления (10) принимает вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A + Bvq^{\mathrm{T}})x(t), \tag{12}$$

или

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A + \bar{b}q^{\mathrm{T}})x(t),$$

где вектор $\bar{b} \in R^{n \times 1}$ определяется равенством

$$\bar{b} = Bv.$$

Таким образом, исходная задача модального управления объектом с векторным входом сводится к задаче модального управления со скалярным входом. При этом искомая матрица C многомерного модального регулятора (9) определяется следующим равенством [4, 5]:

$$C = vq^{\mathrm{T}} = v(p - a)^{\mathrm{T}}(P^{-1})^{\mathrm{T}} S_1^{-1},$$

где

$$S_1 = \left(Bv, ABv, \ldots, A^{n-1}Bv\right),$$

произвольный вектор v выбирается из условия:

$$\det S_1 \neq 0,$$

матрица P и векторы p, a имеют вид (7).

Оптимизация модальных регуляторов

Поскольку задача построения многомерных модальных регуляторов имеет неоднозначное решение, то среди множества регуляторов можно выбрать такой, который обеспечит дополнительные условия, предложенные разработчиком и обеспечивающие более эффективное функционирование системы регулирования.

Рассмотрим систему управления (10), в которой многомерный модальный регулятор (9) имеет вид

$$u = Cx = vq^{\mathrm{T}} x = v(p-a)^{\mathrm{T}} (P^{-1})^{\mathrm{T}} S_1^{-1} x\,, \tag{13}$$

где

$$S_1 = \left(Bv, ABv, \ldots, A^{n-1}Bv\right),$$

матрица P и векторы p, a имеют вид (7).

Поскольку вектор v в матрице регулятора (13) является произвольным вектором, то рассмотрим следующую оптимизационную задачу.

Для объекта управления (8) требуется построить одноранговый модальный регулятор (9), (11), обеспечивающий замкнутой системе управления (9), во-первых, наперед заданные полюса $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, являющиеся множеством корней полинома (5) и, во-вторых, минимизирующий функционал качества вида

$$I(v) = \int_0^T u^{\mathrm{T}}(t) u(t) dt = \int_0^T x^{\mathrm{T}} (S_1^{-1})^{\mathrm{T}} P^{-1} (p-a) v^{\mathrm{T}} v (p-a)^{\mathrm{T}} (P^{-1})^{\mathrm{T}} S_1^{-1} x dt\,. \tag{14}$$

Для данной оптимизационной задачи введем в рассмотрение функцию Гамильтона

$$H(t) = -x^{\mathrm{T}} (S_1^{-1})^{\mathrm{T}} P^{-1} (p-a) v^{\mathrm{T}} v (p-a)^{\mathrm{T}} (P^{-1})^{\mathrm{T}} S_1^{-1} x + \\ + \psi^{\mathrm{T}}(t) \left(Ax + Bv(p-a)^{\mathrm{T}} (P^{-1})^{\mathrm{T}} S_1^{-1}\right) x\,.$$

Для сопряженных переменных $\psi(t)$ справедлива следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi(t)}{dt} = -\mathrm{grad}_x H(t), \\ \psi(T) = 0, \end{cases}$$

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = 2 \begin{bmatrix} v^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} \\ v^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ v^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} (A^{n-1})^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{-1} P^{-1} (p-a) v^{\mathrm{T}} v (p-a)^{\mathrm{T}} (P^{-1})^{\mathrm{T}} S_1^{-1} x -$$

$$- \left(A^{\mathrm{T}} + \begin{bmatrix} v^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} \\ v^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ v^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} (A^{n-1})^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{-1} P^{-1} (p-a) v^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} \right) \psi(t)\,.$$

Полагаем, что произвольный вектор v выбирается из условия

$$\det(Bv, ABv,\ \ldots, A^{n-1}Bv) \neq 0\,.$$

С целью минимизации функционала (14) воспользуемся процедурой градиентного спуска:

$$v^{k+1} = v^k - \rho^k \frac{\partial I(v^k)}{\partial v^k}. \qquad (15)$$

Запишем выражение для градиента функционала по вектору v:

$$\frac{\partial I(v)}{\partial v} = -\int_0^T \mathrm{grad}_v H(t)dt,$$

где

$$\mathrm{grad}_v H(t) = -2\left[(p-a)^T (P^{-1})^\mathrm{T} S_1^{-1} x\right]^2 v + 2v^\mathrm{T} v (p-a)^\mathrm{T} (P^{-1})^\mathrm{T} S_1^{-1} x d_1 +$$
$$+ (p-a)^\mathrm{T} (P^{-1})^\mathrm{T} S_1^{-1} x B^\mathrm{T} \psi(t) - \psi^\mathrm{T}(t) B v d_1.$$

Здесь

$$d_1 = \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ \vdots \\ d_{1m} \end{bmatrix}, \; d_{1j} = (p-a)^\mathrm{T} (P^{-1})^\mathrm{T} S_1^{-1} \left(b_j, Ab_j, \ldots, A^{n-1} b_j\right) S_1^{-1} x, \; j = \overline{1, m},$$

$$B = (b_1, b_2, \ldots, b_m),$$

матрица P и векторы p, a имеют вид (7).

Модальные регуляторы с ограничением на траектории системы

Обратимся к рассмотренной выше задаче модального управления многомерным объектом (8), (9) и положим, что синтезирован одноранговый модальный регулятор вида (13), обеспечивающий замкнутой системе управления (10) наперед заданные полюса $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, являющиеся множеством корней полинома (5).

Выбором свободного параметра v можно обеспечить ограничения на траектории замкнутой системы управления (12). Пусть данные ограничения имеют вид

$$x(t) \in \Gamma_t = \left\{x(t) : \left| l^\mathrm{T} x(t) \right| \le 1\right\}, \; t \in [t_0, T], \qquad (16)$$

с областью начальных возмущений системы вида

$$x(t_0) \in \left\{ x(t_0) : x^\mathrm{T}(t_0) G_0 x(t_0) \le r^2 \right\}. \qquad (17)$$

Тогда задача выбора вектора v заключается в максимизации области начальных возмущений (17) системы (12), в результате чего ее траектории будут принадлежать области ограничений (16) [6].

Фундаментальная матрица решений системы (12) $X(t, t_0)$ удовлетворяет матричной системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t,t_0)}{dt} = \left(A + Bvq^\mathrm{T}\right) X(t, t_0), \\ X(t_0, t_0) = E. \end{cases}$$

Известно [6], что максимальная область начальных возмущений системы (12) при выполнении ограничений на траектории (10), следующая

$$\max_{t\in[t_0,T]}\min_{v} l^{\mathrm{T}} X(t,t_0) G_0^{-1} X^{\mathrm{T}}(t,t_0) l = \max_{t\in[t_0,T]}\min_{v} I(v) \,. \tag{18}$$

Для минимизации функционала (18) воспользуемся процедурой градиентного спуска (15). При этом, вводя обозначения

$$B = (b_1, b_2, \ldots, b_m), \; X(t,t_0) = e^{(A+Bvq^{\mathrm{T}})(t-t_0)}, \; q^{\mathrm{T}} = (p-a)^{\mathrm{T}} (P^{-1})^{\mathrm{T}} S_1^{-1},$$

для градиента функционала можно записать следующее выражение:

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}_v I(v) = {} & l^{\mathrm{T}} e^{(A+Bvq^{\mathrm{T}})(t-t_0)} \left\{ \begin{bmatrix} b_1 q^{\mathrm{T}} \\ b_2 q^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ b_m q^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} (t-t_0) - \right. \\
& \left. - Bv(p-a)^{\mathrm{T}} (P^{-1})^{\mathrm{T}} S_1^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \; Ab_1 \; \ldots \; A^{n-1} b_1 \\ b_2 \; Ab_2 \; \ldots \; A^{n-1} b_2 \\ \vdots \\ b_m \; Ab_m \; \ldots \; A^{n-1} b_m \end{bmatrix} S_1^{-1} \right\} G_0^{-1} e^{(A+Bvq^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(t-t_0)} l + \\
& + l^{\mathrm{T}} e^{(A+Bvq^{\mathrm{T}})(t-t_0)} G_0^{-1} e^{(A+Bvq^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(t-t_0)} \left\{ \begin{bmatrix} q b_1^{\mathrm{T}} \\ q b_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ q b_m^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} (t-t_0) - \right. \\
& \left. - (S_1^{-1})^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} b_1 \; Ab_1 \; \ldots \; A^{n-1} b_1 \\ b_2 \; Ab_2 \; \ldots \; A^{n-1} b_2 \\ \vdots \\ b_m \; Ab_m \; \ldots \; A^{n-1} b_m \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} (S_1^{-1})^{\mathrm{T}} P^{-1} (p-a) v^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} (t-t_0) \right\} l \,.
\end{aligned}$$

Список литературы

1. Филимонов А.Б., Филимонов Н.Б. Модальное управление многомерными объектами // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1985. № 2. С. 130-142.
2. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. – М.: Наука, 1976. – 184с.
3. Кириченко Н.Ф. Введение в теорию стабилизации движения. – К.: Вища школа, 1978. – 184с.
4. Кириченко Н.Ф., Матвиенко В.Т. Оптимизация в задаче модального управления // Вопросы оптимизации в динамических системах с непрырывно-дискретными параметрами. – К.: Наукова думка, 1980. – С. 27-34.

5. Кириченко Н.Ф., Матвиенко В.Т. Оптимальный синтез структур для линейных систем управления // Проблемы управления и информатики. 1996. № 1-2. С. 162-171.
6. Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – К.: Наукова думка, 1985. – 304с.

References

1. Filimonov A.B., Filimonov N.B. Modal control of multi-dimensional objects // Proceedings of the AN of the USSR. Technical Cybernetics. 1985. No. 2. P.130-142.
2. Andreev Yu.N. Control of finite-dimensional linear objects. – M.: Nauka, 1976. – 184 p.
3. Kirichenko N.F. Introduction to the theory of stabilization of motion. – K.: Vishcha shcola, 1978. – 184 p.
4. Kirichenko N.F., Matvienko V.T. Optimization in the problem of modal control // Optimization issues in dynamic systems with continuous-discrete parameters. – K.: Naukova Dumka, 1980. – P.27-34.
5. Kirichenko N.F., Matvienko V.T. Optimal synthesis of structures for linear control systems // Problems of Control and Informatics. 1996. No 1-2. P. 162-171.
6. Bublik B.N., Garashchenko F.G., Kirichenko N.F. Structural-parametric optimization and stability of the beam dynamics. – K.: Naukova Dumka, 1985. – 304 p.

Матвиенко Владимир Тихонович – кандидат физико-математических наук, доцент, Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко, Киев, Украина, matvienko.vt@gmail.com	**Matvienko Vladimir Tihonovich** – candidate of physical-mathematical sciences, associate professor, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine, matvienko.vt@gmail.com

Received 24.06.2019