

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ

Гукасян А.А.

Институт механики НАН Республики Армения, Ереван

Ключевые слова: упругая пластинка, кинематика движения, скорость, ускорения, напряженное состояние.

Аннотация. Исследуется кинематика вращательного движения упругой пластинки, одна сторона которой жестко закреплена к оси вращения, а другие свободны. Приведены основные гипотезы, на которых основаны математические модели и теория тонких пластин. Скорость и ускорения точек упругой пластинки в зависимости от прогиба срединной плоскости, определены методом теоретической механики, который как показывает исследования, является эффективным. Результаты исследования могут дать возможность учитывать при проектировании системы управления те дополнительные воздействия, которые обусловлены упругостью пластинки. Напряженно - деформированное состояние изотропной пластинки, определены в зависимости от прогиба срединной плоскости.

KINEMATIC ANALYSIS OF THE MOVEMENTS OF AN ELASTIC PLATE

Ghukasyan A.A.

Institute of Mechanics of NAS Republic of Armenia, Yerevan

Keywords: elastic plate, kinematic of motion, velocity, acceleration, stress state.

Abstract. The kinematics of rotational motion of an elastic plate is investigated, one side of which is rigidly fixed to the axis of rotation, and the others are free. The main hypotheses on which mathematical models and the theory of thin plates are based are presented. The speed and acceleration of points of the elastic plate depending on the deflection of the median plane are determined by the method of theoretical mechanics, which, as studies show, is effective. The results of the study can make it possible to take into account those additional effects caused by the elasticity of the plate when designing a control system. The stress-strain state of an isotropic plate is determined depending on the deflection of the median plane.

1. Введение. Исследования кинематики движения упругой пластинки являются актуальными, поскольку они находят широкие применения в конструкциях современной техники. Колебание пластинки во время движения механических систем существенно влияет на качество выполняемых работ. Такими механическими системами могут являться летательные аппараты, манипуляционные роботы и другие механизмы, конструкции которых содержат упругие элементы типа пластинки. Рассмотрим изотропную прямоугольную пластинку ($a \times b$), одна сторона которой жестко закреплена, а другие свободны. Пластинка, постоянной толщины h , характеризуется цилиндрической жесткостью на изгиб D и плотностью ρ . Колебательное движение происходит в вертикальной плоскости $Y_0O_0Z_0$ (рис. 1) и оно осуществляется вращательным моментом сил $\mathbf{M}(t)$, приложенным к оси

вращения O_0X_0 . Координатная плоскость $X_0O_0Y_0$ совпадает со срединной плоскостью пластинки. Обобщенную координату движения пластинки обозначим через $\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – угол между плоскостью $X_0O_0Y_0$ и плоскостью, проходящей через неподвижную прямую O_0X_0 и являющейся касательной к срединной поверхности деформируемой пластинки в любой точке оси O_0X_0 . Для исследования кинематики движения прямоугольной пластинки приведем основные гипотезы, предложенные Кирхгофом, на которых основана теория тонких пластинок [1-4]. Предполагается, что эти гипотезы имеют место во время движения пластинки в любой момент времени.

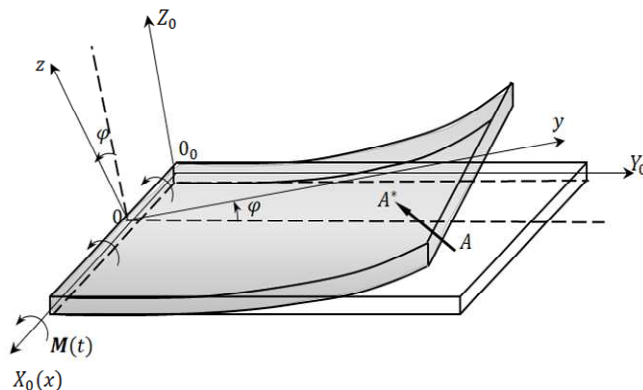


Рис. 1. Упругая пластинка

1. Гипотеза прямых нормалей: любой линейный элемент, нормальный к срединной плоскости пластинки, остается прямолинейным и нормальным к срединной поверхности после деформации, и длина его не изменяется.

Согласно гипотезе 1, любой линейный элемент, нормальный к срединной плоскости, направлен вдоль оси O_0Z_0 и, следовательно, прямые углы между этими элементами и осями O_0X_0 и O_0Y_0 остаются прямыми после деформации, то есть сдвиги в указанных плоскостях отсутствуют ($\epsilon_{yz} = 0, \epsilon_{zx} = 0$). Сохранение длины прямолинейных элементов предполагает отсутствие деформации в направлении оси O_0Z_0 ($\epsilon_{zz} = 0$).

2. Гипотеза о не растяжимости срединной плоскости: в срединной плоскости отсутствуют линейные относительные деформации и деформации сдвига, то есть срединная плоскость является нейтральной и перемещения точек при деформации отсутствуют ($u_1(x, y, 0) = 0, u_2(x, y, 0) = 0$).

3. Гипотеза об отсутствии давления между слоями пластинки: ввиду малости давления между слоями пластинки, параллельными срединной плоскости, напряжением σ_{zz} по сравнению с напряжениями σ_{xx} и σ_{yy} можно пренебрегать.

Согласно приведенным гипотезам, определим компоненты вектора перемещений точек пластинки во время движения [1-3]

$$\varepsilon_{zz} = 0; \frac{\partial u_3}{\partial z} = 0. \quad (1.1)$$

Из (1.1) следует, что прогибы пластинки не зависят от координат z , то есть $u_3 = u_3(x, y, t)$. Из отсутствия сдвигов в срединных плоскостях ($\varepsilon_{yz} = 0, \varepsilon_{zx} = 0$) следует

$$\varepsilon_{yz} = 0: \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} = 0, \varepsilon_{zx} = 0: \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} = 0. \quad (1.2)$$

Интегрируя (1.2) по z , получим остальные компоненты вектора перемещения

$$u_1 = -z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial x} + f_1(x, y, t), u_2 = -z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} + f_2(x, y, t). \quad (1.3)$$

Для вычисления функций $f_i(x, y, t) (i=1, 2)$, появившихся при интегрировании (1.2), воспользуемся гипотезой о не растяжимости срединной плоскости, в каждый момент времени, согласно которой $u_1(x, y, 0, t) = 0, u_2(x, y, 0, t) = 0$. Следовательно, $f_i(x, y, t) = 0 (i=1, 2)$ и перемещения u_1, u_2 точек пластинки в направлениях осей Ox, Oy выражается через функцию прогибов срединной плоскости пластинки u_3 , по формуле (1.3).

Таким образом, компоненты вектора перемещений произвольной точки пластинки во время движения являются

$$u_1 = -z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial x}, u_2 = -z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y}, u_3 = u_3(x, y, t). \quad (1.4)$$

Соответствующие ненулевые компоненты деформации в пластинке являются

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial x^2}, \varepsilon_{yy} = -z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y^2}, \varepsilon_{xy} = -2z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial x \partial y}. \quad (1.5)$$

Следовательно, как составляющие перемещения (1.4), произвольной точки пластинки в каждый момент времени, так и составляющие деформации (1.5) выражены через одну функцию прогиба ($u_3(x, y, t)$) срединной плоскости пластинки.

Радиус-вектор точек пластины относительно точки $O(x, 0, 0)$ после деформации в подвижной системе координат $Oxyz$ обозначим через $\mathbf{p}(x, y, t)$,

$$\mathbf{p}(x, y, z, t) = \mathbf{r}(x, y, z, t) + \mathbf{u}(x, y, z, t). \quad (1.6)$$

Здесь $\mathbf{r}(x, y, z, t)$ радиус-вектор состояния точек недеформированной пластинки относительно точки O , а $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ радиус-вектор упругой

перемещений произвольной точки $A(x, y, z)$ пластинки (рис. 1) после деформации (1.4). Для точек срединной плоскости вектор $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ имеет следующие компоненты: $\mathbf{u}(x, y, 0, t) = (0, 0, u_3(x, y, t))^T$

Относительно неподвижной системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$ радиус-вектор произвольной точки A^* пластины имеет следующие координаты

$$\mathbf{r}_{A^*}(x, y, z, t) = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}(x, y, z, t) + \mathbf{u}(x, y, z, t)), \quad (1.7)$$

где $\mathbf{\Gamma}$ матрица перехода от системы $Oxyz$ к системе координат $O_0X_0Y_0Z_0$ имеет вид

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Следовательно, координаты произвольной точки пластинки после деформации относительно неподвижной системы координат, согласно (1.4), (1.7) и (1.8), будут

$$\begin{aligned} X_{A^*} &= x + u_1(x, y, z, t), \\ Y_{A^*} &= (y + u_2(x, y, z, t)) \cos \varphi - (z + u_3(x, y, t)) \sin \varphi, \\ Z_{A^*} &= (y + u_2(x, y, z, t)) \sin \varphi + (z + u_3(x, y, t)) \cos \varphi, \end{aligned} \quad (1.9)$$

или с учетом (1.4)

$$\begin{aligned} X_{A^*} &= x - z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial x}, Y_{A^*} = \left(y - z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \right) \cos \varphi - (z + u_3(x, y, t)) \sin \varphi, \\ Z_{A^*} &= \left(y - z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \right) \sin \varphi + (z + u_3(x, y, t)) \cos \varphi, \end{aligned} \quad (1.10)$$

а для точек срединной плоскости будут

$$\begin{aligned} X_{A^*} &= x, Y_{A^*} = y \cos \varphi - u_3(x, y, t) \sin \varphi, \\ Z_{A^*} &= y \sin \varphi + u_3(x, y, t) \cos \varphi. \end{aligned} \quad (1.11)$$

2. Скорость движения упругой пластинки. Определим скорость движения точек упругой пластинки относительно системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$ по общей формуле, полученной в первой главе [3], для произвольной точки трехмерного упругого тела с применением методы теоретической механики

$$\mathbf{V}_{A^*} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{\Gamma} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \mathbf{\Gamma} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(x, y, z, t) + \mathbf{\Gamma} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}(x, y, z, t)). \quad (2.1)$$

Здесь, в частности, для скорости движения точек упругой пластинки имеем

$$\mathbf{V}_0 = 0,$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma \cdot (\omega \times r) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & j & k \\ \omega_x & 0 & 0 \\ x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -z\omega_x \cos \varphi - y\omega_x \sin \varphi \\ -z\omega_x \sin \varphi + y\omega_x \cos \varphi \end{pmatrix}, \\
 \Gamma \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(x, y, z, t) &= \begin{pmatrix} -z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial x \partial t} \\ -z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \cos \varphi - \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \sin \varphi \\ -z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \sin \varphi + \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (2.2) \\
 \Gamma \cdot (\omega \times \mathbf{u}(x, y, z, t)) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_x u_3(x, y, t) \cos \varphi + \omega_x z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \sin \varphi \\ -\omega_x u_3(x, y, t) \sin \varphi - \omega_x z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \cos \varphi \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Компоненты вектора скорости движения точек пластинки, в момент времени t будут

$$\begin{aligned}
 V_{A^*X_0} &= -z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial x \partial t}, \\
 V_{A^*Y_0} &= -z\omega_x \cos \varphi - y\omega_x \sin \varphi - z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \cos \varphi - \\
 &\quad - \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \sin \varphi - u_3(x, y, t) \omega_x \cos \varphi + z\omega_x \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \sin \varphi, \quad (2.3) \\
 V_{A^*Z_0} &= -z\omega_x \sin \varphi + y\omega_x \cos \varphi - z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \sin \varphi + \\
 &\quad + \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \cos \varphi - u_3(x, y, t) \omega_x \sin \varphi - z\omega_x \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \cos \varphi.
 \end{aligned}$$

Выражения (2.3) можно также получить непосредственно из (1.7), вычисляя производные по времени.

Скорость движения точек упругой пластинки представим в виде суммы двух скоростей

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}_{A^*} &= \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2, \\
 \mathbf{V}_1 &= \Gamma \cdot (\omega \times \mathbf{r}), \mathbf{V}_2 = \Gamma \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(x, y, t) + \Gamma \cdot (\omega \times \mathbf{u}(x, y, t)), \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

где V_1 – скорость движения точек абсолютно твердой модели пластинки, а V_2 – компоненты скорости движения, обусловленной упругостью пластинки

$$V_{1,1} = 0, V_{1,2} = -z\dot{\varphi} \cos \varphi - y\dot{\varphi} \sin \varphi, V_{1,3} = -z\dot{\varphi} \sin \varphi + y\dot{\varphi} \cos \varphi \quad (2.5)$$

$$V_{2,1} = -z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial x \partial t},$$

$$V_{2,2} = -\frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \sin \varphi - z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \cos \varphi - u_3(x, y, t) \dot{\varphi} \cos \varphi +$$

$$+ z \dot{\varphi} \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \sin \varphi, \quad (2.6)$$

$$V_{2,3} = \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \cos \varphi - z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \sin \varphi - u_3(x, y, t) \dot{\varphi} \sin \varphi -$$

$$- z \dot{\varphi} \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \cos \varphi.$$

Слагаемое V_2 имеет порядок ε , поскольку в линейной теории упругости поперечное смещение пластинки мало ($\max |\mathbf{u}(x, y, t)| / \min(a, b) \sim \varepsilon, \varepsilon \ll 1$), а цилиндрическая жесткость на изгиб велика ($D \sim \varepsilon^{-1}$).

Скорость движения точек срединной плоскости ($z = 0$) пластинки имеет следующие компоненты

$$V_{1,1} = 0, V_{1,2} = -y\dot{\varphi} \sin \varphi, V_{1,3} = +y\dot{\varphi} \cos \varphi, \quad (2.7)$$

$$V_{2,1} = 0, V_{2,2} = -\frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \sin \varphi - u_3(x, y, t) \dot{\varphi} \cos \varphi,$$

$$V_{2,3} = \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \cos \varphi - u_3(x, y, t) \dot{\varphi} \sin \varphi.$$

3. Ускорение движения упругой пластинки. Определим ускорение движения упругой пластинки с помощью формулы, которая определяет ускорение движения произвольной точки трехмерного упругого тела [3,4]. Эту формулу представим в виде

$$\mathbf{W}_A^* = \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 \quad (\mathbf{W}_0 = 0), \quad (3.1)$$

$$\mathbf{W}_1 = \frac{d\Gamma}{dt} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \Gamma \cdot \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} \right) = \Gamma \cdot (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) + \Gamma \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}) =$$

$$= \Gamma \cdot (\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}^2) + \Gamma \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}), \quad (3.2)$$

$$\mathbf{W}_2 = \Gamma \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u}(x, y, z, t) + \Gamma \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{u}(x, y, z, t)) + 2\Gamma \cdot \left(\boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(x, y, z, t) \right) +$$

$$+ \Gamma \cdot (\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{u}(x, y, z, t)) - \mathbf{u}(x, y, z, t) \cdot \boldsymbol{\omega}^2). \quad (3.3)$$

Определим слагаемые в (3.2) для точек абсолютно жесткой модели пластинки

$$\mathbf{W}_{III}^{ep} = \Gamma \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & j & k \\ \varepsilon_x & 0 & 0 \\ x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -z\varepsilon_x \cos \varphi - y\varepsilon_x \sin \varphi \\ -z\varepsilon_x \sin \varphi + y\varepsilon_x \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{W}_{III}^{oc} = \frac{d\Gamma}{dt} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \Gamma \cdot (\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -y\omega_x^2 \cos \varphi + z\omega_x^2 \sin \varphi \\ -y\omega_x^2 \sin \varphi - z\omega_x^2 \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Здесь $\mathbf{W}_{III}^{ep}$ – вращательное ускорение, а $\mathbf{W}_{III}^{oc}$ – осе стремительное ускорение движений точек твердой пластинки.

Ускорение движений абсолютно жесткой модели пластинки, согласно (3.2), (3.4) и (3.5), в проекциях имеет вид

$$W_{1,x_0} = 0,$$

$$W_{1,y_0} = -\varepsilon_x z \cos \varphi - \varepsilon_x y \sin \varphi - \omega_x^2 y \cos \varphi + \omega_x^2 z \sin \varphi, \quad (3.6)$$

$$W_{1,z_0} = -\varepsilon_x z \sin \varphi + \varepsilon_x y \cos \varphi - \omega_x^2 y \sin \varphi - \omega_x^2 z \cos \varphi, (\varepsilon_x = \ddot{\varphi}, \omega_x = \dot{\varphi}).$$

Определим слагаемые в (3.3) для точек упругой модели пластинки

$$\mathbf{W}_{III}^{om} = \Gamma \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} -z \frac{\partial^3 u_3(x, y, t)}{\partial x \partial t^2} \\ -z \frac{\partial^3 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t^2} \cos \varphi - \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial t^2} \sin \varphi \\ -z \frac{\partial^3 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t^2} \sin \varphi + \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial t^2} \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

$$\mathbf{W}_{III}^{ep} = \Gamma \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{u}(x, y, z, t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon_x u_3(x, y, t) \cos \varphi + \varepsilon_x z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \sin \varphi \\ -\varepsilon_x u_3(x, y, t) \sin \varphi - \varepsilon_x z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{W}_{III}^{yk} = 2\Gamma \cdot \left(\boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(x, y, z, t) \right) = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_x \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \cos \varphi + \omega_x z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \sin \varphi \\ -\omega_x \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \sin \varphi - \omega_x z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{W}_{y\Pi}^{oc} = \frac{d\Gamma}{dt} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}(x, y, z, t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_x^2 z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \cos \varphi + \omega_x^2 u_3(x, y, t) \sin \varphi \\ \omega_x^2 z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \sin \varphi - \omega_x^2 u_3(x, y, t) \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

$\mathbf{W}_{y\Pi}^{om}$ – относительное ускорение, $\mathbf{W}_{y\Pi}^{ep}$ – вращательное ускорение, $\mathbf{W}_{y\Pi}^{yk}$ – поворотное ускорение, или ускорение Кориолиса, а $\mathbf{W}_{y\Pi}^{oc}$ – относительное ускорение движений точек упругой модели пластинки.

Все название компонентов ускорения являются аналогами компонентов вектора ускорения сложного движения абсолютного твердого тела [5].

Компоненты вектора ускорения движений пластинки, обусловленные упругостью, согласно (3.3) и (3.7)-(3.10) имеют вид

$$\begin{aligned} W_{2,x_0} &= -z \frac{\partial^3 u_3(x, y, t)}{\partial x \partial t^2}, \\ W_{2,y_0} &= -z \frac{\partial^3 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t^2} \cos \varphi - \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial t^2} \sin \varphi - \varepsilon_x u_3(x, y, t) \cos \varphi + \\ &+ \varepsilon_x z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \sin \varphi - 2\omega_x \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \cos \varphi + 2\omega_x z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \sin \varphi + \\ &+ \omega_x^2 z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \cos \varphi + \omega_x^2 u_3(x, y, t) \sin \varphi, \\ W_{2,z_0} &= -z \frac{\partial^3 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t^2} \sin \varphi + \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial t^2} \cos \varphi - \varepsilon_x u_3(x, y, t) \sin \varphi - \\ &- \varepsilon_x z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \cos \varphi - 2\omega_x \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \sin \varphi - 2\omega_x z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \cos \varphi + \\ &+ \omega_x^2 z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \sin \varphi - \omega_x^2 u_3(x, y, t) \cos \varphi; (\varepsilon_x = \ddot{\varphi}, \omega_x = \dot{\varphi}). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Объединяя (3.6) и (3.11), окончательно получим проекции вектора ускорения движений упругой пластинки в вертикальной плоскости $Y_0 O_0 Z_0$ относительно неподвижной системы координат $O_0 X_0 Y_0 Z_0$ (рис. 1)

$$W_{x_0} = -z \frac{\partial^3 u_3(x, y, t)}{\partial x \partial t^2},$$

$$\begin{aligned}
 W_{Y_0} = & -\varepsilon_x z \cos \varphi - \varepsilon_x z \sin \varphi - \omega_x^2 y \cos \varphi + \omega_x^2 z \sin \varphi - \\
 & -z \frac{\partial^3 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t^2} \cos \varphi - \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial t^2} \sin \varphi - \varepsilon_x u_3(x, y, t) \cos \varphi + \\
 & + \varepsilon_x z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \sin \varphi - 2\omega_x \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \cos \varphi + 2\omega_x z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \sin \varphi + \\
 & + \omega_x^2 z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \cos \varphi + \omega_x^2 u_3(x, y, t) \sin \varphi, \\
 W_{Z_0} = & -\varepsilon_x z \sin \varphi + \varepsilon_x y \cos \varphi - \omega_x^2 y \sin \varphi - \omega_x^2 z \cos \varphi - \\
 & -z \frac{\partial^3 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t^2} \sin \varphi + \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial t^2} \cos \varphi - \varepsilon_x u_3(x, y, t) \sin \varphi - \\
 & -\varepsilon_x z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \cos \varphi - 2\omega_x \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \sin \varphi - 2\omega_x z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \cos \varphi + \\
 & + \omega_x^2 z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \sin \varphi - \omega_x^2 u_3(x, y, t) \cos \varphi, (\varepsilon_x = \ddot{\varphi}, \omega_x = \dot{\varphi}).
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Ускорение движения точек срединной плоскости ($z = 0$) пластинки имеет следующие компоненты

$$\begin{aligned}
 W_{X_0} &= 0, \\
 W_{Y_0} &= -\omega_x^2 y \cos \varphi - \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial t^2} \sin \varphi - \varepsilon_x u_3(x, y, t) \cos \varphi - \\
 & - 2\omega_x \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \cos \varphi + \omega_x^2 u_3(x, y, t) \sin \varphi, \\
 W_{Z_0} &= \varepsilon_x y \cos \varphi - \omega_x^2 y \sin \varphi + \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial t^2} \cos \varphi - \varepsilon_x u_3(x, y, t) \sin \varphi - \\
 & - 2\omega_x \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \sin \varphi - \omega_x^2 u_3(x, y, t) \cos \varphi.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Формулы относительно положения (1.10), скорости (2.6) и ускорения (3.11) движения точек упругой пластинки могут дать возможность при проектировании системы кинематического управления, учитывать те дополнительные слагаемые, которые обусловлены упругостью [6-8].

4. Напряженно-деформационное состояние упругой пластинки. Исследование напряженного состояния упругой пластинки основано на гипотезах (п. 1), согласно которым компоненты деформации являются

$$\varepsilon_{zz} = 0; \frac{\partial u_3}{\partial z} = 0, \varepsilon_{yz} = 0; \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} = 0, \varepsilon_{zx} = 0; \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} = 0, \tag{4.1}$$

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial x^2}, \varepsilon_{yy} = -z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y^2}, \varepsilon_{xy} = -2z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial x \partial y}$$

Вычислим нормальные напряжения σ_{xx}, σ_{yy} для однородной и изотропной пластинки согласно закону Гука [1, 2]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})), \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{zz} + \sigma_{xx})), \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} (\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})), \varepsilon_{xy} = \frac{2}{E} (1 + \nu) \sigma_{xy}, \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{2}{E} (1 + \nu) \sigma_{yz}, \varepsilon_{zx} = \frac{2}{E} (1 + \nu) \sigma_{zx}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Из первых двух формул закона Гука (4.2) и на основании третьей гипотезы (гипотеза об отсутствии давления между слоями пластинки), пренебрегая напряжением σ_{zz} по сравнению с напряжениями σ_{xx}, σ_{yy} , получим

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}), \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}). \quad (4.3)$$

Учитывая соотношения (4.1), из (4.3) определим σ_{xx} и σ_{yy}

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\frac{Ez}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_{yy} &= -\frac{Ez}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Из четвертой формулы (4.2) и (4.1), имеем

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \varepsilon_{xy} = -\frac{Ez}{(1 + \nu)} \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_{xz} = 0, \sigma_{yz} = 0, \quad (4.5)$$

где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

Все величины в выражениях (4.4) и (4.5) в каждый момент времени зависят от прогиба $u_3(x, y, t)$ срединной плоскости пластинки.

Заключение. В рамках основных гипотез, на которых основана теория тонких пластин, исследована кинематика вращательного движения прямоугольной пластинки, одна сторона которой жестко закреплена к оси вращения, а другие свободны. Компоненты вектора упругих перемещений произвольной точки пластинки во время движения, компоненты деформации и напряжения, представлены в зависимости от прогиба срединной плоскости. Определены скорость и ускорения движения точек упругой пластинки относительно неподвижной системы координат по общей формуле, определяющие кинематику движения точек трехмерного упругого тела. Кинематические величины могут быть применены в задачах динамики и

управления колебательным движением механических систем содержащее упругие пластинки.

Список литературы

1. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Наука, 1968. – 592 с.
2. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
3. Гукасян А.А. Движение деформированного твердого тела. – Ереван: Изд-во НАН РА, Гитутюн, 2024. – 190 с.
4. Гукасян А.А. О кинематике движения деформированного твердого тела по аналогии с кинематикой абсолютно твердого тела // Мехатроника, автоматика и робототехника. – 2023. – № 12. – С. 14-18.
5. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Изд-во. физ.-мат. лит., 1961. – 824 с.
6. Черноусько Ф.Л. Динамика систем с упругими элементами большой жесткости // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1983. – № 4. – С.101-113.
7. Гукасян А.А., Саркисян С.В. О колебательном движении прямоугольной пластинки // Известия АН Армянской ССР. Механика. – 1990. – Т. 43, №4. – С. 13-23.
8. Айрапетян В.В., Гукасян А.А. Об управляемом движении одной модели летательного аппарата с упругими элементами // Известия НАН РА. Механика. – 2000. – Т. 53, №1. – С. 61-68.

References

1. Babakov I.M. Theory of Oscillations. – M.: Science, 1968. – 592 p.
2. Timoshenko S.P., Goodyer J. Theory of Elasticity. – M.: Science, 1979. – 560 p.
3. Ghukasyan A.A. Motion of a deformed solid. – Yerevan: Publ. house of the National Academy of Sciences, Gitutyun, 2024. – 190 p.
4. Ghukasyan A.A. On the Kinematics of Motion of a Deformed Rigid Body by Analogy with the Kinematics of a Rigid Body // Mechatronics, Automation and Robotics. 2023, no. 12, pp. 14-18.
5. Lurye A.I. Analytical Mechanics. – M.: Publ. house of phys.-math. lit., 1961. – 824 p.
6. Chernousko F.L. Dynamics of systems with elastic elements of high rigidity // News of AS USSR. Mechanics of Solids. 1983, no. 4, pp. 101-113.
7. Ghukasyan A.A., Sargsyan S.V. On the oscillatory motion of a rectangular plate // News of AS Armenia SSR. Mechanics. 1990, vol. 43, no. 4, pp. 13-23.
8. Airapetyan V.V., Ghukasyan A.A. On the controlled motion of one model of an aircraft with elastic elements // News AS RA. Mechanics. 2000, vol. 53, no. 1, pp. 61-68.

Гукасян Аргуш Аapresович – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник ghukasyan10@yandex.com	Ghukasyan Artush Apresovich – doctor of physical and mathematical sciences, professor, leading researcher
---	--

Received 11.05.2025