https://doi.org/10.26160/2572-4347-2024-21-4-13

О ЗАКОНЕ ГУКА

Гукасян А.А.
Институт механики НАН Республики Армения, Ереван

Ключевые слова: Закон Гука, упругое тело, формула Тейлора, нелинейная связь, компоненты деформации (напряжения), коэффициенты упругости.

Аннотация. Существование аналитической связи между напряжением и деформацией в каждой точке упругого тела при определенных условиях дает возможность исследовать напряженно – деформированное состояние как в линейной, так и в нелинейной постановке. Предполагается, что связь допускает разложение в ряд Тейлора относительно компонентов деформации в каждой точке упругого тела. Ограничиваясь членами первого порядка малости, имеем линейную связь между напряжениями и деформацией, которая подтверждается также опытными данными и описывается как обобщенный закон Гука. Для гибких конструкционных материалов, которые обладают большой упругой податливостью и широко применяются в новой технике, при исследовании напряженно – деформированного состояния предлагается учитывать члены второго порядка малости.

ABOUT HOOK'S LAW

Ghukasyan A.A.
Institute of Mechanics of NAS Republic of Armenia, Yerevan

Keywords: Hooke's law, elastic body, Taylor formula, nonlinear relationship, strain (stress) components, elasticity coefficients.

Abstract. The existence of an analytical relationship between stress and strain at each point of an elastic body, under certain conditions, makes it possible to investigate the stress-strain state both in a linear and nonlinear formulation. It is assumed that the relationship allows expansion in a Taylor series with respect to the strain components at each point of the elastic body. Restricting ourselves to terms of the first order of smallness, we have a linear relationship between stress and strain, which is also confirmed by experimental data and is described as a generalized Hooke's law. For flexible structural materials that have high elastic compliance and are widely used in new technology, it is proposed to take into account terms of the second order of smallness when studying the stress-strain state.

Введение. При моделировании напряженно-деформационного состояния упругого тела, предполагается, что в каждой точке упругого тела напряженное состояние определяется шестью компонентами $\sigma_{xx},\sigma_{yy},\sigma_{zz},\sigma_{xy},\sigma_{yz},\sigma_{zx}$ тензора напряжения и одновременно деформационное состояние около той же точки вполне характеризуется так же шестью компонентами $\varepsilon_{xx},\varepsilon_{yy},\varepsilon_{zz},\varepsilon_{xy},\varepsilon_{yz},\varepsilon_{zx}$. Следовательно, естественно полагать, что между этими величинами в каждой точке упругого тела должна быть определенная связь, которую в общем случае можно выразить следующими аналитическими формулами [1-4]

$$\sigma_{xx} = f_1\left(\varepsilon_{xx},\varepsilon_{yy},\varepsilon_{zz},\varepsilon_{xy},\varepsilon_{yz},\varepsilon_{zx}\right);\ \ \sigma_{xy} = f_4\left(\varepsilon_{xx},\varepsilon_{yy},\varepsilon_{zz},\varepsilon_{xy},\varepsilon_{yz},\varepsilon_{zx}\right);$$
$$\sigma_{yy} = f_2\left(\varepsilon_{xx},\varepsilon_{yy},\varepsilon_{zz},\varepsilon_{xy},\varepsilon_{yz},\varepsilon_{zx}\right);\ \ \sigma_{yz} = f_5\left(\varepsilon_{xx},\varepsilon_{yy},\varepsilon_{zz},\varepsilon_{xy},\varepsilon_{yz},\varepsilon_{zx}\right);$$
$$\sigma_{zz} = f_3\left(\varepsilon_{xx},\varepsilon_{yy},\varepsilon_{zz},\varepsilon_{xy},\varepsilon_{yz},\varepsilon_{zx}\right);\ \ \sigma_{zx} = f_6\left(\varepsilon_{xx},\varepsilon_{yy},\varepsilon_{zz},\varepsilon_{xy},\varepsilon_{yz},\varepsilon_{zx}\right)$$

с условием $f_i(0)\equiv 0(i=1,2,...,6)$, так как предполагается, что при отсутствии напряжений составляющие деформации равны нулю и наоборот, если $\varepsilon_{xx}=0$, $\varepsilon_{yy}=0,\varepsilon_{zz}=0,\varepsilon_{xy}=0,\varepsilon_{yz}=0,\varepsilon_{zx}=0$, то и $\sigma_{xx}=0,\sigma_{yy}=0,\sigma_{zz}=0,\sigma_{xy}=0$, $\sigma_{yz}=0$, $\sigma_{zx}=0$.

Общая связь между напряженным состоянием и деформацией при определенных условиях дает возможность известными математическими методами исследовать напряжено-деформированное состояние упругого тела, как в линейной, так и в нелинейной постановке. Однако, полученные точные или приближенные результаты исследования могут иметь прикладной характер только при применении дополнительных гипотез деформационного характера и некоторых других гипотез относительно перемещений точек упругого тела. Ниже приведены приближенные модели напряженно–деформированного состояния упругого тела с применением формулы Тейлора.

1. Линейное напряженно-деформированное состояние упругого тела. Обобщенный закон Гука

Если функции $f_i\left(\varepsilon_{xx},\varepsilon_{yy},\varepsilon_{zz},\varepsilon_{xy},\varepsilon_{yz},\varepsilon_{zx},\right)(i=1,2,...,6)$ допускают разложение в ряд Тейлора относительно $\varepsilon_{xx},\varepsilon_{yy},\varepsilon_{zz},\varepsilon_{xy},\varepsilon_{yz},\varepsilon_{zx}$ в любой точке упругого тела, то ограничиваясь членами первого порядка малости, имеем

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= C_{11}\varepsilon_{xx}+C_{12}\varepsilon_{yy}+C_{13}\varepsilon_{zz}+C_{14}\varepsilon_{xy}+C_{15}\varepsilon_{yz}+C_{16}\varepsilon_{zx};\\
\sigma_{yy} &= C_{21}\varepsilon_{xx}+C_{22}\varepsilon_{yy}+C_{23}\varepsilon_{zz}+C_{24}\varepsilon_{xy}+C_{25}\varepsilon_{yz}+C_{16}\varepsilon_{zx};\\
\sigma_{zz} &= C_{31}\varepsilon_{xx}+C_{32}\varepsilon_{yy}+C_{33}\varepsilon_{zz}+C_{34}\varepsilon_{xy}+C_{35}\varepsilon_{yz}+C_{36}\varepsilon_{zx};\\
\sigma_{xy} &= C_{41}\varepsilon_{xx}+C_{42}\varepsilon_{yy}+C_{43}\varepsilon_{zz}+C_{44}\varepsilon_{xy}+C_{45}\varepsilon_{yz}+C_{46}\varepsilon_{zx};\\
\sigma_{yz} &= C_{51}\varepsilon_{xx}+C_{52}\varepsilon_{yy}+C_{53}\varepsilon_{zz}+C_{54}\varepsilon_{xy}+C_{55}\varepsilon_{yz}+C_{56}\varepsilon_{zx};\\
\sigma_{zx} &= C_{61}\varepsilon_{xx}+C_{62}\varepsilon_{yy}+C_{63}\varepsilon_{zz}+C_{64}\varepsilon_{xy}+C_{65}\varepsilon_{yz}+C_{66}\varepsilon_{zx}.
\end{aligned}\tag{1.1}$$

Коэффициентами разложения в (1.1) являются

$$\begin{aligned}
&C_{i1}=\frac{\partial f_i(0)}{\partial\varepsilon_{xx}},C_{i2}=\frac{\partial f_i(0)}{\partial\varepsilon_{yy}},C_{i3}=\frac{\partial f_i(0)}{\partial\varepsilon_{zz}},C_{i4}=\frac{\partial f_i(0)}{\partial\varepsilon_{xy}},\\
&C_{i5}=\frac{\partial f_i(0)}{\partial\varepsilon_{yz}},C_{i6}=\frac{\partial f_i(0)}{\partial\varepsilon_{zx}},i=1,2,...,6.
\end{aligned}\tag{1.2}$$

Коэффициенты $C_{ij}\left(i,j=1,2,...,6\right)$ для однородного тела являются постоянными, определяются в результате опыта и зависят от материала упругого тела. Линейная связь (1.1) между компонентами напряжения и деформации подтверждается также опытными данными и описывается как обобщенный закон Гука. В (1.1) входят 36 упругих постоянных $C_{ij}\left(i, j=1,2,...,6\right)$ и только 21 из них являются различными $\left(C_{ij}=C_{ji}\left(i, j=1,2,...,6\right)\right)$, поскольку существует упругий потенциал [1-8].

Так как деформации $\varepsilon_{xx},\varepsilon_{yy},\varepsilon_{zz},\varepsilon_{xy},\varepsilon_{yz},\varepsilon_{zx}$ являются величинами безразмерными, то из (1.1) следует, что упругие постоянные имеют размерность напряжения (силы, деленной на площадь). Областью применения закона Гука является линейная теория упругости. Для нелинейных материалов следует в разложениях рядов Тейлора сохранить члены более высокого порядка малости.

Из системы линейных уравнений (1.1) при заданных компонентах напряжения в точках упругого тела можно также определить компоненты деформации $\varepsilon_{xx},\varepsilon_{yy},\varepsilon_{zz},\varepsilon_{xy},\varepsilon_{yz},\varepsilon_{zx}$. Существование решения системы (1.1) относительно компонентов деформации приводит к дополнительным зависимостям между коэффициентами $C_{ij}\left(i, j=1,2,...,6\right)$, например отличный от нуля главный определитель системы (1.1).

Решая систему (1.1) известным методом, получим линейную связь между компонентами деформации и напряжения

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx}&=a_{11}\sigma_{xx}+a_{12}\sigma_{yy}+a_{13}\sigma_{zz}+a_{14}\sigma_{xy}+a_{15}\sigma_{yz}+a_{16}\sigma_{zx};\\
\varepsilon_{yy}&=a_{21}\sigma_{xx}+a_{22}\sigma_{yy}+a_{23}\sigma_{zz}+a_{24}\sigma_{xy}+a_{25}\sigma_{yz}+a_{26}\sigma_{zx};\\
\varepsilon_{zz}&=a_{31}\sigma_{xx}+a_{32}\sigma_{yy}+a_{33}\sigma_{zz}+a_{34}\sigma_{xy}+a_{35}\sigma_{yz}+a_{36}\sigma_{zx};\\
\varepsilon_{xy}&=a_{41}\sigma_{xx}+a_{42}\sigma_{yy}+a_{43}\sigma_{zz}+a_{44}\sigma_{xy}+a_{45}\sigma_{yz}+a_{46}\sigma_{zx};\\
\varepsilon_{yz}&=a_{51}\sigma_{xx}+a_{52}\sigma_{yy}+a_{53}\sigma_{zz}+a_{54}\sigma_{xy}+a_{55}\sigma_{yz}+a_{56}\sigma_{zx};\\
\varepsilon_{zx}&=a_{61}\sigma_{xx}+a_{62}\sigma_{yy}+a_{63}\sigma_{zz}+a_{64}\sigma_{xy}+a_{65}\sigma_{yz}+a_{66}\sigma_{zx}.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь коэффициенты $a_{1j}\left(j=1,2,...,6\right)$ определяются из соотношения $\varepsilon_{xx}=\frac{1}{\Delta}\Delta_{\varepsilon_{xx}}$, где Δ – главный, а $\Delta_{\varepsilon_{xx}}$ – вспомогательный определитель системы (1.1), который имеет вид

$$\Delta_{\varepsilon_{xx}}=\begin{vmatrix}
\sigma_{xx} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16}\\
\sigma_{yy} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26}\\
\sigma_{zz} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36}\\
\sigma_{xy} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46}\\
\sigma_{yz} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56}\\
\sigma_{zx} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66}
\end{vmatrix}. \tag{1.4}$$

Коэффициентами $a_{1j}\left(j=1,2,...,6\right)$ в (1.3) являются

$$a_{11}=\frac{1}{\Delta}(-1)^{1+1}\Delta_{\sigma_{xx}},a_{12}=\frac{1}{\Delta}(-1)^{2+1}\Delta_{\sigma_{yy}},a_{13}=\frac{1}{\Delta}(-1)^{3+1}\Delta_{\sigma_{zz}};$$
$$a_{14}=\frac{1}{\Delta}(-1)^{4+1}\Delta_{\sigma_{xy}},a_{15}=\frac{1}{\Delta}(-1)^{5+1}\Delta_{\sigma_{yz}},a_{16}=\frac{1}{\Delta}(-1)^{6+1}\Delta_{\sigma_{zx}};\tag{1.5}$$

$$\Delta_{\sigma_{xx}}=\begin{vmatrix}C_{22}&C_{23}&C_{24}&C_{25}&C_{26}\\C_{32}&C_{33}&C_{34}&C_{35}&C_{36}\\C_{42}&C_{43}&C_{44}&C_{45}&C_{46}\\C_{52}&C_{53}&C_{54}&C_{55}&C_{56}\\C_{62}&C_{63}&C_{64}&C_{65}&C_{66}\end{vmatrix},\Delta_{\sigma_{yy}}=\begin{vmatrix}C_{12}&C_{13}&C_{14}&C_{15}&C_{16}\\C_{32}&C_{33}&C_{34}&C_{35}&C_{36}\\C_{42}&C_{43}&C_{44}&C_{45}&C_{46}\\C_{52}&C_{53}&C_{54}&C_{55}&C_{56}\\C_{62}&C_{63}&C_{64}&C_{65}&C_{66}\end{vmatrix};$$

$$\Delta_{\sigma_{zz}}=\begin{vmatrix}C_{12}&C_{13}&C_{14}&C_{15}&C_{16}\\C_{22}&C_{23}&C_{24}&C_{25}&C_{26}\\C_{42}&C_{43}&C_{44}&C_{45}&C_{46}\\C_{52}&C_{53}&C_{54}&C_{55}&C_{56}\\C_{62}&C_{63}&C_{64}&C_{65}&C_{66}\end{vmatrix},\Delta_{\sigma_{xy}}=\begin{vmatrix}C_{12}&C_{13}&C_{14}&C_{15}&C_{16}\\C_{22}&C_{23}&C_{24}&C_{25}&C_{26}\\C_{32}&C_{33}&C_{34}&C_{35}&C_{36}\\C_{52}&C_{53}&C_{54}&C_{55}&C_{56}\\C_{62}&C_{63}&C_{64}&C_{65}&C_{66}\end{vmatrix};\tag{1.6}$$

$$\Delta_{\sigma_{yz}}=\begin{vmatrix}C_{12}&C_{13}&C_{14}&C_{15}&C_{16}\\C_{22}&C_{23}&C_{24}&C_{25}&C_{26}\\C_{32}&C_{33}&C_{34}&C_{35}&C_{36}\\C_{42}&C_{43}&C_{44}&C_{45}&C_{46}\\C_{62}&C_{63}&C_{64}&C_{65}&C_{66}\end{vmatrix},\Delta_{\sigma_{zx}}=\begin{vmatrix}C_{12}&C_{13}&C_{14}&C_{15}&C_{16}\\C_{22}&C_{23}&C_{24}&C_{25}&C_{26}\\C_{32}&C_{33}&C_{34}&C_{35}&C_{36}\\C_{42}&C_{43}&C_{44}&C_{45}&C_{46}\\C_{52}&C_{53}&C_{54}&C_{55}&C_{56}\end{vmatrix}.$$

Аналогичным образом, коэффициенты $a_{2j}\ (j=1,2,...,6)$ определяются из соотношения $\varepsilon_{yy}=\frac{1}{\Delta}\Delta_{\varepsilon_{yy}}$, где вспомогательный определитель системы (1.1) $\Delta_{\varepsilon_{yy}}$ будет

$$\Delta_{\varepsilon_{yy}}=\begin{vmatrix}C_{11}&\sigma_{xx}&C_{13}&C_{14}&C_{15}&C_{16}\\C_{21}&\sigma_{yy}&C_{23}&C_{24}&C_{25}&C_{26}\\C_{31}&\sigma_{zz}&C_{33}&C_{34}&C_{35}&C_{36}\\C_{41}&\sigma_{xy}&C_{43}&C_{44}&C_{45}&C_{46}\\C_{51}&\sigma_{yz}&C_{53}&C_{54}&C_{55}&C_{56}\\C_{61}&\sigma_{zx}&C_{63}&C_{64}&C_{65}&C_{66}\end{vmatrix}.\tag{1.7}$$

Здесь $a_{2j}\ (j=1,2,...,6)$ в (1.3) определяются из соотношений

$$a_{21}=\frac{1}{\Delta}(-1)^{1+2}\Delta_{\sigma_{xx}},a_{22}=\frac{1}{\Delta}(-1)^{2+2}\Delta_{\sigma_{yy}},a_{23}=\frac{1}{\Delta}(-1)^{3+2}\Delta_{\sigma_{zz}};$$
$$a_{24}=\frac{1}{\Delta}(-1)^{4+2}\Delta_{\sigma_{xy}},a_{25}=\frac{1}{\Delta}(-1)^{5+2}\Delta_{\sigma_{yz}},a_{26}=\frac{1}{\Delta}(-1)^{6+2}\Delta_{\sigma_{zx}};\tag{1.8}$$

($\Delta_{\sigma_{xx}}, \Delta_{\sigma_{yy}}, \Delta_{\sigma_{zz}}, \Delta_{\sigma_{xy}}, \Delta_{\sigma_{yz}}, \Delta_{\sigma_{zx}}$ – вспомогательные определители (1.7)).

Остальные коэффициенты $a_{3j}, ..., a_{6j}$ $(j = 1, 2, ..., 6)$ определяются из выражений $\varepsilon_{zz} = \frac{1}{\Delta}\Delta_{\varepsilon_{zz}}, ..., \varepsilon_{zx} = \frac{1}{\Delta}\Delta_{\varepsilon_{zx}}$, соответственно. Известно, что коэффициенты a_{ij} $(i, j = 1, 2, ..., 6)$ также удовлетворяют условиям $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, 2, ..., 6)$.

Для различных свойств упругих тел количества независимых коэффициентов, входящих в (1.1) и (1.3), являются разными. Например, число упругих постоянных сокращается, если механические свойства материала симметричны относительно одной или нескольких (двух, трех) взаимно ортогональных плоскостей. Для ортотропного тела, через каждую точку которого проходят три взаимно ортогональных плоскости упругой симметрии, число независимых упругих постоянных уменьшается до девяти [1-8]. Для однородного изотропного тела, у которого упругие свойства во всех точках и направлениях одинаковы, число упругих постоянных в обобщенном законе Гука сокращается до двух.

Приведем эти соотношения, следуя работам [1, 2]

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \nu\left(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right)\right), \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{yy} - \nu\left(\sigma_{zz} + \sigma_{xx}\right)\right),$$
$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{zz} - \nu\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right)\right), \varepsilon_{xy} = \frac{2}{E}(1+\nu)\sigma_{xy}, \tag{1.9}$$
$$\varepsilon_{yz} = \frac{2}{E}(1+\nu)\sigma_{yz}, \varepsilon_{zx} = \frac{2}{E}(1+\nu)\sigma_{zx}.$$

где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, $G = E/2(1+\nu)$ – модуль сдвига. Практически для всех конструкционных материалов численные значения E и ν известны из экспериментов.

В формулах (1.9) компоненты деформации выражены через компоненты напряжения. Определим обратную зависимость, то есть $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}$ как функции от $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}$

$$\sigma_{xx} = 2G\left(\varepsilon_{xx} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right), \sigma_{yy} = 2G\left(\varepsilon_{yy} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right), \sigma_{zz} = 2G\left(\varepsilon_{zz} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right); \tag{1.10}$$
$$\sigma_{xy} = G\varepsilon_{xy}, \sigma_{yz} = G\varepsilon_{yz}, \sigma_{zx} = G\varepsilon_{zx}.$$

Здесь через θ обозначена сумма трех линейных деформаций

$$\theta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}.$$

Как видно из (1.9), между суммой трех линейных деформаций $\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$ и суммой трех нормальных напряжений $\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$ существует зависимость

$$\theta = \frac{1-2\nu}{E}\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}\right), \quad (1.11)$$

где величину $E/(1-2\nu)$ называют модулем объемного расширения [2, 4, 12].

Ламе представил (1.10) в виде [1,2]

$$\begin{gathered}\sigma_{xx}=\lambda\theta+2\mu\varepsilon_{xx},\sigma_{yy}=\lambda\theta+2\mu\varepsilon_{yy},\sigma_{zz}=\lambda\theta+2\mu\varepsilon_{zz}\\ \sigma_{xy}=\mu\varepsilon_{xy},\sigma_{yz}=\mu\varepsilon_{yz},\sigma_{zx}=\mu\varepsilon_{zx}\end{gathered} \quad (1.12)$$

Постоянные λ и μ называются постоянными Ламе, и имеют следующие виды

$$\lambda=\frac{2G\nu}{1-2\nu}=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},\mu=G=\frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.13)$$

Связь между компонентами напряжения и деформации (1.1), (1.3) для упругого манипулятора [9-12], где компоненты деформации удовлетворяют соотношениям

$$\varepsilon_{xx}=0,\varepsilon_{yy}=\frac{\partial u_2(y,t)}{\partial y},\varepsilon_{zz}=0,\varepsilon_{xy}=\frac{\partial u_1(y,t)}{\partial y},\varepsilon_{xz}=0,\varepsilon_{yz}=\frac{\partial u_3(y,t)}{\partial y} \quad (1.14)$$

в частности, для однородного и изотропного материала упругого звена манипулятора определяется следующим образом

$$\varepsilon_{yy}=\frac{1}{E}\sigma_{yy},\varepsilon_{xy}=\frac{2}{E}(1+\nu)\sigma_{xy},\varepsilon_{yz}=\frac{2}{E}(1+\nu)\sigma_{yz}. \quad (1.15)$$

Количество чисел упругих постоянных при различных случаях симметрии упругих тел исследованы в работах [5-7].

2. Случай нелинейного напряженно-деформированного состояния упругого тела. Применение обобщенного закона Гука ограничивается только при малых деформациях. При превышении предела пропорциональности связь между напряжением и деформацией становится нелинейной. Пределы применения закона ограничиваются и в случае неоднородности материалов, где коэффициенты упругости в (1.1) и (1.3) становятся функциями от координат точек. В общем случае нелинейность при исследовании напряженно-деформированного состояния упругих тел в основном обусловлена двумя факторами: нелинейностью соотношений между компонентами деформации и перемещениями (геометрическая нелинейность) и нелинейностью уравнений, связывающих компоненты напряжений с компонентами деформации, обусловленными физическими свойствами материала (физическая нелинейность) [7].

Для расширения области применения закона Гука может быть целесообразно при разложении функции $f_i\left(\varepsilon_{xx},\varepsilon_{yy},\varepsilon_{zz},\varepsilon_{xy},\varepsilon_{yz},\varepsilon_{zx},\right)(i=1,2,...,6)$ в ряд Тейлора учитывать члены более высокого порядка малости, то есть

$$\sigma_{xx}=f_1^{(1)}\left(\varepsilon_{xx},\varepsilon_{yy},\varepsilon_{zz},\varepsilon_{xy},\varepsilon_{yz},\varepsilon_{zx}\right)+f_1^{(2)}\left(\varepsilon_{xx},\varepsilon_{yy},\varepsilon_{zz},\varepsilon_{xy},\varepsilon_{yz},\varepsilon_{zx}\right)+O\left(\varepsilon^3\right);$$

$$\sigma_{yy}=f_2^{(1)}\left(\varepsilon_{xx},\varepsilon_{yy},\varepsilon_{zz},\varepsilon_{xy},\varepsilon_{yz},\varepsilon_{zx}\right)+f_2^{(2)}\left(\varepsilon_{xx},\varepsilon_{yy},\varepsilon_{zz},\varepsilon_{xy},\varepsilon_{yz},\varepsilon_{zx}\right)+O\left(\varepsilon^3\right);$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{zz} &= f_3^{(1)}\left(\varepsilon_{xx},\varepsilon_{yy},\varepsilon_{zz},\varepsilon_{xy},\varepsilon_{yz},\varepsilon_{zx}\right)+ f_3^{(2)}\left(\varepsilon_{xx},\varepsilon_{yy},\varepsilon_{zz},\varepsilon_{xy},\varepsilon_{yz},\varepsilon_{zx}\right)+O\left(\varepsilon^3\right);\\
\sigma_{xy} &= f_4^{(1)}\left(\varepsilon_{xx},\varepsilon_{yy},\varepsilon_{zz},\varepsilon_{xy},\varepsilon_{yz},\varepsilon_{zx}\right)+ f_4^{(2)}\left(\varepsilon_{xx},\varepsilon_{yy},\varepsilon_{zz},\varepsilon_{xy},\varepsilon_{yz},\varepsilon_{zx}\right)+O\left(\varepsilon^3\right); \qquad (2.1)\\
\sigma_{yz} &= f_5^{(1)}\left(\varepsilon_{xx},\varepsilon_{yy},\varepsilon_{zz},\varepsilon_{xy},\varepsilon_{yz},\varepsilon_{zx}\right)+ f_5^{(2)}\left(\varepsilon_{xx},\varepsilon_{yy},\varepsilon_{zz},\varepsilon_{xy},\varepsilon_{yz},\varepsilon_{zx}\right)+O\left(\varepsilon^3\right);\\
\sigma_{zx} &= f_6^{(1)}\left(\varepsilon_{xx},\varepsilon_{yy},\varepsilon_{zz},\varepsilon_{xy},\varepsilon_{yz},\varepsilon_{zx}\right)+ f_6^{(2)}\left(\varepsilon_{xx},\varepsilon_{yy},\varepsilon_{zz},\varepsilon_{xy},\varepsilon_{yz},\varepsilon_{zx}\right)+O\left(\varepsilon^3\right).
\end{aligned}
$$

Функции $f_i^{(1)}\left(\varepsilon_{xx},\varepsilon_{yy},\varepsilon_{zz},\varepsilon_{xy},\varepsilon_{yz},\varepsilon_{zx}\right)\left(i=1,2,...,6\right)$ линейно зависят от компонентов деформации и в первом приближении выражение (2.1) представляет собой обобщенный закон Гука (1.1). Функции $f_i^{(2)}\left(\varepsilon_{xx},\varepsilon_{yy},\varepsilon_{zz},\varepsilon_{xy},\varepsilon_{yz},\varepsilon_{zx}\right)\left(i=1,2,...,6\right)$ в (2.1) являются квадратичными функциями относительно компонентов деформации и имеют вид

$$
\begin{aligned}
&f_i^{(2)}\left(\varepsilon_{xx},\varepsilon_{yy},\varepsilon_{zz},\varepsilon_{xy},\varepsilon_{yz},\varepsilon_{zx}\right)=\frac{1}{2}\left(C_{i1}^{(2)}\varepsilon_{xx}^2+C_{i2}^{(2)}\varepsilon_{yy}^2+C_{i3}^{(2)}\varepsilon_{zz}^2+C_{i4}^{(2)}\varepsilon_{xy}^2+C_{i5}^{(2)}\varepsilon_{yz}^2+C_{i6}^{(2)}\varepsilon_{zx}^2\right)+\\
&+C_{i7}^{(2)}\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}+C_{i8}^{(2)}\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}+C_{i9}^{(2)}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz}+C_{i10}^{(2)}\varepsilon_{xx}\varepsilon_{xy}+C_{i11}^{(2)}\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yz}+C_{i12}^{(2)}\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zx}+ \qquad (2.2)\\
&+C_{i13}^{(2)}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{xy}+C_{i14}^{(2)}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{yz}+C_{i15}^{(2)}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zx}+C_{i16}^{(2)}\varepsilon_{zz}\varepsilon_{xy}+C_{i17}^{(2)}\varepsilon_{zz}\varepsilon_{yz}+C_{i18}^{(2)}\varepsilon_{zz}\varepsilon_{zx}+\\
&+C_{i19}^{(2)}\varepsilon_{xy}\varepsilon_{yz}+C_{i20}^{(2)}\varepsilon_{xy}\varepsilon_{zx}+C_{i21}^{(2)}\varepsilon_{yz}\varepsilon_{zx}\left(i=1,2,...,6\right)
\end{aligned}
$$

Число дополнительных коэффициентов $C_{ij}^{(2)}\left(i=1,2,...,6;\ j=1,2,...,21\right)$ в (2.2) равно 126 (21x6)

$$
\begin{aligned}
&C_{i1}^{(2)}=\frac{\partial^2 f_i(0)}{\partial\varepsilon_{xx}^2},C_{i2}^{(2)}=\frac{\partial^2 f_i(0)}{\partial\varepsilon_{yy}^2},C_{i3}^{(2)}=\frac{\partial^2 f_i(0)}{\partial\varepsilon_{zz}^2},C_{i4}^{(2)}=\frac{\partial^2 f_i(0)}{\partial\varepsilon_{xy}^2},C_{i5}^{(2)}=\frac{\partial^2 f_i(0)}{\partial\varepsilon_{yz}^2},\\
&C_{i6}^{(2)}=\frac{\partial^2 f_i(0)}{\partial\varepsilon_{zx}^2},C_{i7}^{(2)}=\frac{\partial^2 f_i(0)}{\partial\varepsilon_{xx}\partial\varepsilon_{yy}},C_{i8}^{(2)}=\frac{\partial^2 f_i(0)}{\partial\varepsilon_{xx}\partial\varepsilon_{zz}},C_{i9}^{(2)}=\frac{\partial^2 f_i(0)}{\partial\varepsilon_{yy}\partial\varepsilon_{zz}},C_{i10}^{(2)}=\frac{\partial^2 f_i(0)}{\partial\varepsilon_{xx}\partial\varepsilon_{xy}}, \qquad (2.3)\\
&C_{i11}^{(2)}=\frac{\partial^2 f_i(0)}{\partial\varepsilon_{xx}\partial\varepsilon_{yz}},C_{i2}^{(2)}=\frac{\partial^2 f_i(0)}{\partial\varepsilon_{xx}\partial\varepsilon_{zx}},C_{i13}^{(2)}=\frac{\partial^2 f_i(0)}{\partial\varepsilon_{yy}\partial\varepsilon_{xy}},C_{i14}^{(2)}=\frac{\partial^2 f_i(0)}{\partial\varepsilon_{yy}\partial\varepsilon_{yz}},C_{i15}^{(2)}=\frac{\partial^2 f_i(0)}{\partial\varepsilon_{yy}\partial\varepsilon_{zx}},\\
&C_{i16}^{(2)}=\frac{\partial^2 f_i(0)}{\partial\varepsilon_{zz}\partial\varepsilon_{xy}},C_{i17}^{(2)}=\frac{\partial^2 f_i(0)}{\partial\varepsilon_{zz}\partial\varepsilon_{yz}},C_{i18}^{(2)}=\frac{\partial^2 f_i(0)}{\partial\varepsilon_{zz}\partial\varepsilon_{zx}},C_{i19}^{(2)}=\frac{\partial^2 f_i(0)}{\partial\varepsilon_{xy}\partial\varepsilon_{yz}},C_{i20}^{(2)}=\frac{\partial^2 f_i(0)}{\partial\varepsilon_{xy}\partial\varepsilon_{zx}},\\
&C_{i21}^{(2)}=\frac{\partial^2 f_i(0)}{\partial\varepsilon_{yz}\partial\varepsilon_{zx}}\left(i=1,2,...,6\right)
\end{aligned}
$$

(в (2.2) учтены условия перестановочности производной от функции $f_i\left(\varepsilon_{xx},\varepsilon_{yy},\varepsilon_{zz},\varepsilon_{xy},\varepsilon_{yz},\varepsilon_{zx},\right)\left(i=1,2,...,6\right)$).

Если при деформации тела сдвигами можно пренебречь, то есть деформация тела характеризуется только удлинениями тех линейных элементов, которые до деформации параллельны координатным осям Ox,Oy,Oz (углы между линейными элементами dx,dy,dz остаются прямыми и после деформации), то число коэффициентов в (2.2) сразу уменьшается до

36. Закон (или уточненный закон) Гука в этом случае можно представить в виде

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= C_{11}\varepsilon_{xx} + C_{12}\varepsilon_{yy} + C_{13}\varepsilon_{zz} + C_{11}^{(2)}\varepsilon_{xx}^{2} + C_{12}^{(2)}\varepsilon_{yy}^{(2)} + C_{13}^{(2)}\varepsilon_{zz}^{(2)} + \\
&\quad + 2C_{17}^{(2)}\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + 2C_{18}^{(2)}\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz} + 2C_{19}^{(2)}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz}; \\
\sigma_{yy} &= C_{21}\varepsilon_{xx} + C_{22}\varepsilon_{yy} + C_{23}\varepsilon_{zz} + C_{21}^{(2)}\varepsilon_{xx}^{(2)} + C_{22}^{(2)}\varepsilon_{yy}^{(2)} + C_{23}^{(2)}\varepsilon_{zz}^{(2)} + \\
&\quad + 2C_{27}^{(2)}\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + 2C_{28}^{(2)}\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz} + 2C_{29}^{(2)}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz}; \\
\sigma_{zz} &= C_{31}\varepsilon_{xx} + C_{32}\varepsilon_{yy} + C_{33}\varepsilon_{zz} + C_{31}^{(2)}\varepsilon_{xx}^{2} + C_{32}^{(2)}\varepsilon_{yy}^{(2)} + C_{33}^{(2)}\varepsilon_{zz}^{(2)} + \\
&\quad + 2C_{37}^{(2)}\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + 2C_{38}^{(2)}\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz} + 2C_{39}^{(2)}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz}; \\
\sigma_{xy} &= C_{41}\varepsilon_{xx} + C_{42}\varepsilon_{yy} + C_{43}\varepsilon_{zz} + C_{41}^{(2)}\varepsilon_{xx}^{2} + C_{42}^{(2)}\varepsilon_{yy}^{(2)} + C_{43}^{(2)}\varepsilon_{zz}^{(2)} + \\
&\quad + 2C_{47}^{(2)}\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + 2C_{48}^{(2)}\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz} + 2C_{49}^{(2)}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz}; \\
\sigma_{yz} &= C_{51}\varepsilon_{xx} + C_{52}\varepsilon_{yy} + C_{53}\varepsilon_{zz} + C_{51}^{(2)}\varepsilon_{xx}^{2} + C_{52}^{(2)}\varepsilon_{yy}^{(2)} + C_{53}^{(2)}\varepsilon_{zz}^{(2)} + \\
&\quad + 2C_{57}^{(2)}\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + 2C_{58}^{(2)}\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz} + 2C_{59}^{(2)}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz}; \\
\sigma_{zx} &= C_{61}\varepsilon_{xx} + C_{62}\varepsilon_{yy} + C_{63}\varepsilon_{zz} + C_{61}^{(2)}\varepsilon_{xx}^{2} + C_{62}^{(2)}\varepsilon_{yy}^{(2)} + C_{63}^{(2)}\varepsilon_{zz}^{(2)} + \\
&\quad + 2C_{67}^{(2)}\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + 2C_{68}^{(2)}\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz} + 2C_{69}^{(2)}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Для различных свойств материалов в зависимости от характера деформации, от применения гипотез относительно деформации и перемещений точек упругого тела, можно еще снизить число упругих коэффициентов.

В дальнейшем, для новых гибких конструкционных материалов, которые обладают большой упругой податливостью и широко применяются в новой технике, применение уточненного закона Гука (2.1) может иметь смысл. При этом для каждого нелинейного упругого материала необходимо аналитическими, численными или экспериментальными методами определить функции $f_i\left(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx},\right)$ $\left(i = 1, 2, ..., 6\right)$ или некоторые другие функции, в зависимости от напряжений.

Заключение. Аналитическая связь между напряжением и деформацией в каждой точке упругого тела при определенных условиях дает возможность исследовать напряженно – деформированное состояние как в линейной, так и в нелинейной постановке. Предполагая, что связь допускает разложение в ряд Тейлора относительно компонентов деформации, ограничиваясь членами первого порядка малости, имеем линейную связь между напряжениями и деформацией, которая подтверждается также опытными данными и описывается как обобщенный закон Гука. Системы линейных уравнений исследуются известными методами линейной алгебры и приведены частные случаи прикладного характера. Для гибких конструкционных материалов предлагается учитывать члены второго порядка малости относительно компонентов деформации. Это даст возможность расширить область применения закона Гука. Приведен закон (или уточненный закон) Гука, когда при деформации нелинейного тела сдвигами можно пренебречь.

Список литературы

1. Папкович П.Ф. Теория упругости. – М.: Оборонгиз, 1939. – 641 с.
2. Лейбензон Л.С. Курс теории упругости. – М.-Л.: Тех.-теор. лит. 1947. – 465 с.
3. Новожилов В.В. Теория упругости. – М.: Судпромгиз, 1958. – 370 с.
4. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1970. – 939 с.
5. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
6. Агаловян Л.А. Об основных соотношениях обобщенной плоской деформации анизотропных тел // Доклады НАН РА. – 2021. – Т. 121, №1. – С. 54-60.
7. Машиностроение, энциклопедия в сорока томах / Председатель редакционного совета и главный редактор Фролов К.В. Том 1-3, книга 1, Динамика и прочность машин. Теория механизмов и машин. – М.: Машиностроение, 1994. – 535 с.
8. Пронина Ю.Г. Лекции по теории упругости. – СПб.: СПбГУ, 2004. – 120 с.
9. Гукасян А.А. Движение деформированного твердого тела. – Ереван: Изд-во НАН РА, Гитутюн, 2024. – 190 с.
10. Гукасян А.А. О кинематике движения деформированного твердого тела по аналогии с кинематикой абсолютно твердого тела // Мехатроника, автоматика и робототехника. – 2023. – № 12. – С. 14-18.
11. Гукасян А.А. О моделях многозвенных манипуляторов // Мехатроника, автоматика и робототехника. – 2023. – № 12. – С. 9-13.
12. Гукасян А.А. О пространственном положении и деформации упругих звеньев манипулятора // Известия НАН Армении. Механика. – 2014. – Т. 67, №4. – С. 53-64.

References

1. Papkovich P.F. Theory of elasticity. – M.: Oborongiz, 1939. – 641 p.
2. Leibenzon L.S. Course of the theory of elasticity. – M.-L.: Tech-theor. lit. 1947. – 465 p.
3. Novozhilov V.V. Theory of elasticity. – M.: Sudpromgiz, 1958. – 370 p.
4. Lurie A.I. Theory of elasticity. – M.: Publ. house of Phys. and Math. Lit., 1970. – 939p.
5. Lehnitsky S.G. Theory of elasticity of an anisotropic body. – M.: Science, 1977. – 416 p.
6. Agalovyan L.A. On the basic relations of generalized plane deformation of anisotropic bodies // Reports of the National Academy of Sciences of the Republic of Armenia. 2021, vol. 121, no. 1, pp. 54-60.
7. Mechanical engineering, encyclopedia in forty volumes / Chairman of the Editorial Board and editor-in-chief Frolov K.V. Volume 1-3, book 1, Dynamics and strength of machines. Theory of mechanisms and machines. – M.: Mechanical Engineering, 1994. – 535 p.
8. Pronina Yu.G. Lectures on the theory of elasticity. – SPb.: Saint-Petersburg State University, 2004. – 120 p.
9. Ghukasyan A.A. Motion of a deformed solid. – Yerevan: Publ. house of the National Academy of Sciences, Gitutyun, 2024. – 190 p.

10. Ghukasyan A.A. On the kinematics of motion of a deformed solid body by analogy with the kinematics of an absolutely solid body // Mechatronics, automation and robotics. 2023, no. 12, pp. 14-18.
11. Gukasyan A.A. On models of multi-link manipulators // Mechatronics, automation and robotics. 2023, no. 12, pp. 9-13.
12. Ghukasyan A.A. On the spatial position and deformation of elastic links of the manipulator // News of NAS of Armenia. Mechanics. 2014, vol. 67, no. 4, pp. 53-64.

Гукасян Артуш Апресович – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник	**Ghukasyan Artush Apresovich –** doctor of physical and mathematical sciences, professor, leading researcher
ghukasyan10@yandex.com	

Received 07.10.2024