https://doi.org/10.26160/2572-4347-2024-19-4-10

# КЛАСТЕРНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ МНОЖЕСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА С НЕСКОЛЬКИМИ ДЕПО

***Филимонов А.Б.[1,2], Нгуен Т.К.[1]***
*[1]МИРЭА – Российский технологический университет;*
*[2]Московский авиационный институт (НИУ), Москва, Россия*

**Ключевые слова:** множественная задача коммивояжера, наличие нескольких депо, условия устранения подмаршрутов Миллера-Такера-Землина, целочисленное линейное программирование, геопространственная кластеризация.
**Аннотация.** Рассматривается множественная задача коммивояжера (МЗК). Дается математическая формализация задачи коммивояжера с одним депо. Данная задача формализуется как задача целочисленного линейного программирования. Приводятся условия устранения подмаршрутов Миллера-Такера-Землина. Предлагается метод решения МЗК с несколькими депо. Метод включает два этапа: на первом осуществляется геопространственная кластеризация множества всех городов, которые должны посетить продавцы. Предполагается, что города в каждом кластере объезжаются продавцами из одного депо. На втором этапе для каждого кластера осуществляется выбор депо и решается соответствующая МЗК с этим (т.е. единственным) депо.

# METHOD FOR SOLVING THE MULTIPLE TRAVELING SALESMAN PROBLEM WITH SEVERAL DEPOTS

***Filimonov A.B.[1,2], Nguyen T.K.[1]***
*[1]MIREA – Russian Technological University;*
*[2]Moscow Aviation Institute (NRU), Moscow, Russia*

**Keywords:** the multiple traveling salesman problem, a multiple depot, Miller-Tucker-Zemlin subtour elimination constraints, integer programming formulation, spatial clustering, K-means algorithm.
**Abstract.** We consider the multiple traveling salesman problem (MTSP). A mathematical formalization of the traveling salesman problem with one depot is given. This problem is formalized as an integer linear programming problem. Conditions for eliminating Miller-Tucker-Zemlin subroutes are reduced. A method for solving the MTSP with several depots is proposed. The method includes two stages: the first one involves geospatial clustering of the set of all cities that sellers must visit. It is assumed that the cities of each cluster are served by sellers from one depot. At the second stage, a depot is selected for each cluster and the corresponding MTSP with this (that's the only one) depot is solved.

Задача коммивояжера (англ. Traveling Salesman Problem, TSP), является задачей комбинаторной оптимизации и находит применение в различных сферах деятельности человека. Суть задачи сводится к поиску оптимального маршрута (тура) для продавца, проходящего через все указанные города по одному разу. Критерием оптимальности маршрута является минимум некоторого показателя – длительности поездки, расходов на дорогу или общей длины пути.

В замкнутой задаче коммивояжера предполагается замкнутый маршрут, т.е. возврат в исходный пункт (далее – депо). Решение задачи коммивояжёра в терминах теории графов состоит в нахождении гамильтонова цикла минимального веса в полном взвешенном графе.

***Множественная задача коммивояжера*** (англ. Multiple Traveling Salesman Problem, MTSP) является обобщением классической задачи коммивояжера (TSP), в которой допускается более одного коммивояжера и более одного депо. Современное состояние MTSP отражают публикации [1-7].

**MTSP с одним депо**

Содержательная постановка множественной задачи коммивояжера с одним депо состоит в следующем. Имеется $N$ городов, в одном из них находится депо (склад), в котором базируются $m$ продавцов. Цель продавцов – проехать по всем городам. Задана стоимость переездов между городами. Задача состоит в том, чтобы определить тур для каждого продавца таким образом, чтобы:

– все маршруты должны начинаться и заканчиваться в депо;

– каждый город должен посетить ровно один раз только один продавец;

– общая стоимость туров была сведена к минимуму.

Дадим математическую формализацию задачи.

Задан полный граф $G(V,E)$, где $V=\{1,...,N\}$ – множество узлов, причем узел $d$ соответствует депо а $E$ – множество ребер. Узлы представляют города, а ребра графа $(i,j)\in E$ – пути сообщения между ними.

Задана *матрица стоимостей* $C=\|c_{ij}\|$, где $c_{ij}>0$ – стоимость пути $(i,j)\in E$, которая трактуется как время, расходы или расстояние.

Асимметричная задача коммивояжёра моделируется ориентированным графом, т.е. следует учитывать ориентацию ребер. Симметричная задача коммивояжёра моделируется неориентированным графом.

Симметричную задачу коммивояжёра называют *метрической*, если относительно длин ребер выполняется неравенство треугольника:

$$c_{ik}+c_{kj}\geq c_{ij} \quad \forall i,j,k\in V.$$

Далее полагаем, что решается симметричная метрическая задача коммивояжера.

В качестве искомых неизвестных переменных выбираются элементы *матрицы переездов* $X=\|x_{ij}\|$, где $x_{ij}$ – двоичная переменная, связанная с каждым ребром $(i,j)\in E$, которая принимает значение 1, если ребро $(i,j)$ принадлежит оптимальному маршруту, и принимает значение 0 в противном случае.

Далее полагаем $V'=V\setminus\{d\}$, так что это подмножество $V$, которое содержит все узлы графа $G$ кроме депо.

Модель MTSP может быть определена следующим образом:

$$\sum_{i \neq j} c_{ij} x_{ij} \to \min, \tag{1}$$

$$\sum_{i \in V'} x_{ij} = 1, \ \forall j \in V', \tag{2}$$

$$\sum_{j \in V'} x_{ij} = 1, \ \forall i \in V', \tag{3}$$

$$\sum_{i \in V'} x_{id} = m, \tag{4}$$

$$\sum_{j \in V'} x_{dj} = m, \tag{5}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \ \forall i, j \in V'. \tag{6}$$

Таким образом, мы имеем двухиндексную формализацию решаемой оптимизационной задачи.

Ограничения на степени вершин графа (2) и (3) требуют, чтобы ровно одно ребро входило и выходило из вершины, связанной с каждым городом, не являющимся депо. Ограничения (4) и (5) гарантируют, что ровно $m$ продавцов покидают склад и возвращаются на него.

Чтобы исключить эффект возникновения циклов, не проходящих через депо, должны выполняться условия устранения подмаршрутов, сформулированные Данцигом, Фалкерсоном и Джонсоном [8]. Количество неравенств устранения циклов равняется $2^N - 2(N-1)$.

MTSP является NP-сложной задачей. Приведенная выше математическая модель (1)-(6) может быть реализована для получения точных решений MTSP только для малой размерности (примерно менее 100 городов). Из-за высокой вычислительной сложности решение даже MTSP средней размерности требует неприемлемо много вычислительного времени. Практический интерес представляют подходы, которые не гарантируют получение оптимального решения, но обеспечивают квазиоптимальное решение за приемлемое время вычислений.

Миллер, Такер и Землин предложили альтернативные условия устранения подмаршрутов (подконтуров) [9] путём введения $n$ новых переменных $u_i \, (\forall i \in V')$, определяющих порядок посещенных городов, причем требуется только $N^2 - N$ дополнительных неравенств:

$$u_i - u_j + p x_{ij} \le p - 1 \ \ \forall i, j \in V', i \neq j.$$

Здесь $u_i$ – дополнительная целочисленная переменная, представляющая количество городов, которые продавец $i$ еще не посетил, а $p$ – максимальное количество городов (узлов), которые может посетить любой продавец. Можно положить $p = N - m$.

### MTSP с несколькими депо

Об особенностях МЗК с множеством депо (multi-depot TSP, MDTSP) дает представление работа [10]. Наличие нескольких депо существенно усложняет МЗК. Один из подходов к решению данной задачи заключается в сведении исходной задачи к набору МЗК с одним депо посредством пространственной кластеризации всех городов, которые планируют посетить продавцы.

Кластеризация пространственных данных – это процесс объединения схожих объектов на основе их географического расположения и других свойств. Естественно, методы пространственной кластеризации не могут не найти применения в задачах оптимальной маршрутизации мобильных агентов.

Далее в исходных условиях MDTSP параметры $N$, $m$ имеют тот же смысл, что и выше – соответственно общее число городов и продавцов, а $n$ – количество депо. Маршруты поездок продавцов описываются полным графом $G(V,E)$, где $V=\{1,...,N\}$ – множество узлов, представляющих города, а $E$ – множество ребер, представляющих сообщения между городами. Задана матрица стоимостей $C=\|c_{ij}\|$, где $c_{ij}>0$, $(i,j)\in E$.

Пусть множество $V$ разбито на кластеры:

$$V=V_1\cup V_2\cup\ldots\cup V_n \tag{7}$$

так, что

$$V_i\neq\varnothing,\, V_i\cup V_j=\varnothing,\, i,j=\overline{1,n},\, i\neq j, \tag{8}$$

причем каждый кластер включает одно депо и маршруты движения продавцов, базирующихся в этом депо, локализованы только в этом кластере. Тогда исходная задача MDTSP естественным образом распадается на $n$ MTSP-задач с одним депо. Пространственная кластеризация городов (7), (8) позволяет выполнять их группировку исходя из соображений территориальной близости.

Обозначим через $G_k(V_k,E_k)$ подграф графа $G$, порожденный множеством вершин $V_k$ $(k=\overline{1,n})$. Выделим в матрице стоимостей $C$ подматрицу, соответствующую множеству вершин $V_k$: $C_k=\|c_{ij}\|$, где $i,j\in V_k$. Для каждого подграфа $G_k(V_k,E_k)$ с учетом матрицы стоимостей $C_k$ можно решать задачу MTSP с одним депо. Допустимые решения описываются матрицей переездов $X_k=\|x_{ij}\|$, где $i,j\in V_k$.

Положим, что для каждого кластера $V_k\,(k=\overline{1,n})$ определено депо $d_k\in V_k$ и $V_k'=V_k\setminus\{d_k\}$. Введем обозначения: $N_k$ – число городов в кластере: $N_k=|V_k|$, $m_k\geq 1$ – число продавцов, базирующихся в депо $d_k$. Очевидно, должны выполняться следующие соотношения:

$$\sum_{k=1}^{n}N_k=N,\ \sum_{k=1}^{n}m_k=m.$$

Задачу оптимальной маршрутизации передвижений продавцов в $V_k$ кластере сформулируем в виде экстремальной задачи

$$\sum_{\substack{i,j\in V_k \\ i\neq j}} c_{ij}x_{ij} \to \min, \tag{9}$$

$$\sum_{i\in V_k'} x_{ij} = 1,\ \ \forall j \in V_k'; \tag{10}$$

$$\sum_{j\in V_k'} x_{ij} = 1,\ \ \forall i \in V_k'; \tag{11}$$

$$\sum_{i\in V_k'} x_{id_k} = m_k, \tag{12}$$

$$\sum_{j\in V_k'} x_{d_k j} = m_k, \tag{13}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}\ \ \forall i, j \in V_k', \tag{14}$$

причем для устранения подмаршрутов их следует дополнить условиями Миллера-Такера-Землина:

$$u_i - u_j + px_{ij} \le p - 1\ \ \forall i, j \in V_k', i \neq j. \tag{15}$$

Возможны различные вариации в постановке и решения MDTSP с применением концепции пространственной кластеризации. Один из таких вариантов представляет следующая алгоритмическая схема.

1. Множество городов $V$ разбивается на кластеры (7), (8).

2. В каждом кластере находится ближайший к центру кластера город $d_k \in V_k$, в котором размещается депо.

3. Исходя из размера кластера и числа городов $N_k$ задается число продавцов $m_k$.

4. Для каждого кластера решается задача целочисленного программирования (9)-(15).

Одним из наиболее популярных методов кластеризации является метод K-средних (K-means). Это итеративный алгоритм кластеризации, основанный на минимизации суммарного отклонения точек кластеров от центров этих кластеров. Алгоритм разбивает множество объектов на заранее заданное число кластеров $K$.

Начальный шаг алгоритма заключается в случайном выборе центров кластеров в пространстве признаков. На каждой итерации некластеризованный объект выборки присоединяется к тому кластеру, к центру которого он оказался ближе. Далее центры кластеров пересчитывают как среднее арифметическое векторов признаков всех вошедших в этот кластер объектов. После обновления центров кластеров объекты заново перераспределяются по ним, а затем снова уточняется положение центров. Процесс продолжается до тех пор, пока центры кластеров не перестанут меняться.

**Замечание 1.** В существующих вариантах формулировок TSP известна так называемая кластерная задача коммивояжера (The Clustered Traveling Salesman Problem, CTSP), поставленная в работе [11] – она является обобщением классической TSP, когда города сгруппированы в кластеры, и города одного кластера необходимо посещать непрерывно друг за другом. Данная задача обсуждается в работе [12]. Отметим, что, несмотря на использование термина «кластер», в CTSP не используется процесс кластеризации в традиционной трактовке задач кластерного анализа.

**Замечание 2.** Решение задачи кластеризации является неоднозначным и во многом определяется выбором алгоритма кластеризации. Для кластеризации гeораспределенных данных кроме алгоритма K-средних могут быть использованы и другие алгоритмы (см. их обсуждение, например, в [13]). В частности, интерес представляют алгоритмы иерархической кластеризации – они имеют преимущество перед неиерархическими методами, заключающееся в том, что количество кластеров не нужно определять заранее, оно может быть увеличено или уменьшено простым перемещением вверх и вниз по дереву иерархии. Здесь следует отметить алгоритм (BIRCH, англ. Balanced Iterative Reducing and Clustering Using Hierarchies), позволяющий пользователю указать либо желаемое число кластеров, либо желаемый порог диаметра кластеров [14].

**Список литературы / References**


1. Bellmore M., Nemhauser G.L. Traveling Salesman Problem // Operation Research. 1968, vol. 16, no. 3, pp. 538-558.
2. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The Traveling Salesman Problem. Issues in Theory // Autom. Remote Control. 1989. vol. 50, no. 9, pp. 1147-1173.
3. Laporte G. The Traveling Salesman Problem: An overview of exact and approximate algorithms// European Journal of Operational Research. 1992, vol. 59, iss. 2, pp. 231-247.
4. Johnson D.S., McGeoch L.A. The Traveling Salesman Problem: a Case Study in Local Optimization, Local Search in Combinatorial Optimization. Wiley, 1997, pp. 215-310. The Traveling Salesman Problem and Its Variations / Ed. by G. Gutin and A.P. Punnen. – New York: Springer, 2007. – 850 p.
5. Traveling salesman problem, theory and applications / Ed. By D. Davendra. – Intech Open, 2010. – 338 p.
6. Rego C., Gamboa D., Glover F., Osterman C. Traveling salesman problem heuristics: Leading methods, implementations and latest advances // European Journal of Operational Research. 2011, vol. 211, iss. 3, pp. 427-441.
7. Cheikhrouhou O., Khoufi I. A comprehensive survey on the MTSP: Applications, Approaches and Taxonomy // Computer Science Reviw. 2021, vol. 40, 76 p.
8. Dantzig G.B., Fulkerson D.R., Johnson S.M. Solution of a Large-scale Traveling Salesman Problem // Operation Research. 1954, vol. 2, pp. 393-410.
9. Miller C.E., Tucker A.W., Zemlin R.A. Integer Programming Formulation of Traveling Salesman Problems // Journal of the ACM. 1960, vol. 7, no. 4, pp. 326-329.
10. Ho W. A multi-depot Travelling Salesman Problem and its Iterative and Integrated Approaches // International Journal of Operational Research. 2006, vol. 1, no. 4, pp. 382-396.
11. Chisman J.A. The clustered traveling salesman problem // Computers & Operations Research. 1975, no. 2, pp. 115-119.

12. Lu Y., Hao J.-K., Wu Q. Solving the Clustered Traveling Salesman Problem via Traveling Salesman Problem Methods // PeerJ Computer Science. 2022, vol. 8, 24 p.
13. Neethu C.V., Surendran S. Review of Spatial Clustering Methods // International Journal of Information Technology Infrastructure. 2013, vol. 2, no. 3, pp. 15-24.
14. Zhang T., Ramakrishnan R., Livny M. BIRCH: a New Data Clustering Algorithm and its Applications // Data Mining and Knowledge Discovery. 1997, vol. 1, iss. 2, pp. 141-182.

| | |
|---|---|
| **Филимонов Александр Борисович –** доктор технических наук, профессор | **Filimonov Alexandr Borisovich –** doctor of technical sciences, professor |
| **Нгуен Тхань Конг** – аспирант | **Nquyen Thanh Cong** – postgraduate student |
| filimon_ab@mail.ru | |

*Received 11.03.2024*