

<https://doi.org/10.26160/2572-4347-2022-16-4-14>

МНОГОМЕТОДНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ

Тятюшкин А.И.

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск, Россия

Ключевые слова: численные методы, задача оптимального управления с параметрами, метод приведенного градиента, модифицированная функция Лагранжа, многометодная оптимизация.

Аннотация. Рассматривается задача оптимального управления с фазовыми ограничениями, содержащая управляющие параметры как в правых частях управляемой системы, так и в начальных условиях. Для решения этой сложной задачи предлагается сначала редукция к задаче математического программирования, а затем для поиска оптимальных значений параметров и управляющих функций - применение многометодного алгоритма, состоящего из методов линеаризации, метода приведенного градиента и метода спроектированного лагранжиана. Иллюстрируется схема работы многометодного алгоритма, включающего 3 метода оптимизации.

MULTIMETHOD CONTROL OPTIMIZATION

Tyatyushkin A.I.

Institute of System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, Russia

Keywords: numerical methods, optimal control problem with parameters, reduced gradient method, modified Lagrange function, multi-method optimization.

Abstract. An optimal control problem with phase constraints is considered, which contains control parameters both in the right parts of the controlled system and in the initial conditions. To solve this complex problem, we first propose a reduction to a mathematical programming problem, and then, to find the optimal values of parameters and control functions, use a multi-method algorithm consisting of linearization methods, the reduced gradient method, and the projected Lagrangian method. The scheme of operation of a multi-method algorithm including 3 optimization methods is illustrated

1. Введение

Многометодная технология решения задач оптимального управления заключается в параллельном использовании сразу нескольких итерационных методов оптимизации для поиска решения одной и той же задачи. Основной проблемой применения многометодной технологии при численном решении задач оптимального управления является выбор метода для эффективного продолжения процесса оптимизации с того момента, когда ухудшилась сходимость текущего метода. Современные операционные системы позволяют обеспечить решение задачи путем организации параллельных вычислительных потоков для одновременного проведения расчетов несколькими методами. В каждом таком потоке можно реализовывать итерационный процесс одного из методов оптимизации и решение одной задачи вести несколькими методами одновременно. На многопроцессорных компьютерах для реализации каждого метода удобнее использовать отдельный процессор. После нахождения очередного приближения все

методы оцениваются, например, по полученному приращению функционала, и из них выбирается наиболее эффективный метод для продолжения оптимизации, а полученное этим методом приближение передается остальным методам в качестве начального для выполнения следующей итерации.

Продолжая итерационный процесс до получения приближения, на котором с заданной точностью будет выполнен критерий оптимальности, найдем приближенное решение задачи. При этом решение будет найдено многометодным алгоритмом, состоящим из последовательности шагов разных методов, подключаемых к процессу оптимизации с целью ускорения его сходимости. Например, в случае параллельного использования трех методов (см. рис. 1) лучшее приближение будет определяться по максимуму приращения функционала, полученного на данной итерации каждым из трех методов: $u_{i_0} = \arg \max_{i \in \{1, 2, 3\}} (I(u_i^k) - I(u_i^{k-1}))$. Затем это приближение передается всем трем методам для выполнения следующей итерации: $u_i^{k+1} = u_{i_0}$, $i = 1, 2, 3$.

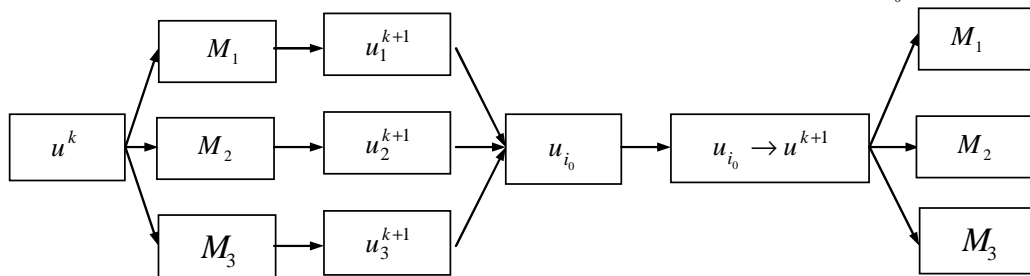


Рис. 1. Схема выполнения $(k+1)$ -й итерации многометодным алгоритмом для группы из трех методов: M_1, M_2, M_3

Многометодные алгоритмы итерационного поиска оптимального управления строятся на основе численных методов оптимизации и программных средств, достаточно эффективно зарекомендовавших себя при решении сложных прикладных задач [1-10].

2. Постановка задачи оптимального управления. линеаризация ограничений и применение градиентных методов

При построении математической модели сложного динамического процесса, а также при создании систем с желаемыми свойствами и поведением нередко используется параметрический синтез управления в виде функции известной структуры от фазовых координат, но с неизвестными значениями параметров. Тогда проблема синтеза управления сводится к задаче оптимизации процесса с параметрами.

Пусть задан управляемый процесс с управляющими параметрами, как в правых частях, так и в начальных условиях

$$\dot{x} = f(x, u, w, t), \quad x(t) \in E^n, \quad u(t) \in E^r, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (2.1)$$

$$x(t_0) = \Theta(v), \quad w \in R^p, \quad v \in R^n$$

с терминальными условиями

$$I_i(u) = h_i(x(t_1)) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.2)$$

и фазовыми ограничениями

$$J_i(u, v) = g_i(x(t), t) = 0, \quad t \in T, \quad i = \overline{1, s}. \quad (2.3)$$

Управление и параметры стеснены следующими ограничениями:

$$c_i(u, t) = 0, \quad t \in T, \quad i = \overline{1, l}, \quad (2.4)$$

$$u^H(t) \leq u(t) \leq u^B(t), \quad t \in T, \quad v^H \leq v \leq v^B, \quad w^H \leq w \leq w^B. \quad (2.5)$$

Требуется среди управлений и параметров, удовлетворяющих ограничениям (2.4)-(2.6), найти такие, которые обеспечивают выполнение условий (2.3) для управляемого процесса (2.1) и приводят его в точку фазового пространства, где с заданной точностью будут выполнены условия (2.2), а функционал

$$I_0(u) = \varphi(x(t_1)) \quad (2.6)$$

достигнет наименьшего значения.

Градиенты функционалов $I_j(u)$, $j = \overline{0, m}$, с помощью функций $H^j(\psi_j, x, u, t) = \psi_j'(t) f(x, u, t)$ и сопряженной системы

$$\dot{\psi}_j = -f_x(x, u, t)' \psi_j(t), \quad \psi_j(t_1) = -\varphi_x^j(x(t_1))$$

традиционно определяются по формулам:

$$\nabla I_j(u) = -H_u^j(\psi_j, x, u, t), \quad j = \overline{0, m}.$$

Для каждого $t \in T$ можно аналогично вычислить градиенты $J_j(u, t)$, $j = \overline{1, s}$:

$$\nabla I_j(u, t) = -\bar{H}_u^j(\Phi_j, x, u, t, \tau), \quad t_0 \leq \tau \leq t \leq t_1,$$

где $\bar{H}^j(\Phi_j, x, u, t, \tau) = \Phi_j'(t, \tau) f(x, u, \tau)$, $\Phi_j(t, \tau)$, $j = \overline{1, s}$ – решения сопряженной системы

$$\frac{\partial \Phi_j(t, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial f(x, u, \tau)}{\partial x} \Phi_j(t, \tau), \quad \tau \in [t_0, t]$$

с краевыми условиями

$$\Phi_j(t, t) = -\frac{\partial g^j(x(t))}{\partial x}, \quad j = \overline{1, s}.$$

Матрица-якобиан линеаризованных ограничений составляется из градиентов ∇I_i , $i = \overline{1, m}$, и $\nabla J_j(t)$, $j = \overline{1, s}$, $t \in T$, и так как правые части и начальные условия системы (2.1) зависят еще и от параметров, то необходимо иметь также градиенты функционалов I_i , $i = \overline{1, m}$, и $J_j(t)$, $j = \overline{1, s}$, $t \in T$, по этим параметрам [1]:

$$\nabla_v I_i(u^k, w^k, v^k) = -\psi_i(t_0)' \Theta(v^k), \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.7)$$

$$\nabla_w I_i(u^k, w^k, v^k) = -\int_{t_0}^{t_1} \psi_i(t)' f_w(x^k, u^k, w^k, t) dt,$$

$$\nabla_w J_i(u^k, w^k, v^k, t^j) = -\int_{t_0}^{t^j} \Phi_i(t)' f_w(x^k, u^k, w^k, t) dt, \quad (2.8)$$

$$\nabla_v J_i(u^k, w^k, v^k, t^j) = -\Phi_i(t_0)' \Theta(v^k), \quad i = \overline{1, s}, \quad j = \overline{1, N}. \quad (2.9)$$

На каждой итерации внешнего метода спроектированного лагранжиана решается вспомогательная задача минимизации модифицированного функционала Лагранжа при линейризованных на k -м приближении ограничениях.

2.1. Алгоритм метода приведенного градиента

Вводя векторные обозначения для равенств (2.2)-(2.4), построим модифицированную функцию Лагранжа для задачи (2.1)-(2.7):

$$L = \varphi(x(t_1)) - \lambda^{k'} [h(x(t_1)) - \bar{h}^L] + \frac{\rho}{2} [h(x(t_1)) - \bar{h}^L]' [h(x(t_1)) - \bar{h}^L] -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \mu^{k'}(t) [g(x(t), t) - \bar{g}^L] dt + \frac{\rho}{2} \int_{t_0}^{t_1} [g(x(t), t) - \bar{g}^L]' [g(x(t), t) - \bar{g}^L] dt - (2.10)$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \gamma^k(t) [c(u, t) - \bar{c}^L] dt + \frac{\rho}{2} \int_{t_0}^{t_1} [c(u, t) - \bar{c}^L]' [c(u, t) - \bar{c}^L] dt,$$

где $\bar{h}^L = h(x^k(t_1)) + h_x(x^k(t_1)) \delta x(t_1)$, $\bar{g}^L = g(x^k(t), t) + g_x(x^k(t), t) \delta x(t)$,
 $\bar{c}^L = c(u^k(t), t) + c_u(u^k(t), t) \delta u(t)$, $\delta u = u - u^k$, $\delta x = x - x^k$.

Далее линейризуем ограничения (2.2), (2.3) на k -м приближении:

$$I^k + \sum_{j=0}^N \nabla_u I^k(t^j)' (u_j - u_j^k) + \nabla_w I^k(w - w^k) + \nabla_v I^k(v - v^k) = 0, \quad (2.11)$$

$$J_j^k + \sum_{i=0}^j [\nabla_u J^k(t^i)' (u_i - u_i^k) + \nabla_w J^k(t^i)' (w - w^k) + \nabla_v J^k(t^i)' (v - v^k)] = 0, \quad (2.12)$$

$$j = \overline{0, N}.$$

Здесь $I = (I_1, I_2, \dots, I_m)$, $J = (J_1, J_2, \dots, J_s)$. Следовательно, имеем m ограничений (2.11) и $(N+1)s$ ограничений (2.12), которые представляют собой явную форму (через u, w, v) линейризованных (h^L, g_j^L) ограничений (2.2), (2.3), причем вместо равенств (2.3), заданных для каждого момента $t \in T$, имеем N равенств, определенных в узлах сетки.

Линеаризуем также условия (2.4):

$$c(u^k, t^j) + \nabla_u c(u^k, t^j)' (u_j - u_j^k) = 0, \quad j = \overline{0, N}, \quad (2.13)$$

где $c = (c_1, c_2, \dots, c_l)$. Прямые ограничения на управление и параметры оставим без изменений:

$$u_j^H \leq u_j \leq u_j^B, \quad j = \overline{1, N}, \quad (2.14)$$

$$v_j^H \leq v_j \leq v_j^B, \quad j = \overline{1, n}, \quad w_i^H \leq w_i \leq w_i^B, \quad i = \overline{1, p}. \quad (2.15)$$

Конечномерная аппроксимация функционала (2.10), в котором переменные $x(t)$ определены через систему (2.1) по заданному управлению $u(t)$, $t \in T$, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} L = & \varphi(x^N) - \lambda^{k'} [h(x(t^N)) - \bar{h}^L] + \frac{\rho}{2} [h(x(t^N)) - \bar{h}^L]' [h(x(t^N)) - \bar{h}^L] - \\ & - \sum_{j=0}^N \mu_j^{k'} [g(x(t^j), t^j) - \bar{g}^L] + \frac{\rho}{2} \sum_{j=0}^N [g(x(t^j), t^j) - \bar{g}^L]' [g(x(t^j), t^j) - \bar{g}^L] - \\ & - \sum_{j=0}^N \gamma_j^{k'} [c(u_j, t^j) - \bar{c}^L] + \frac{\rho}{2} \sum_{j=0}^N [c(u_j, t^j) - \bar{c}^L]' [c(u_j, t^j) - \bar{c}^L], \quad (2.16) \end{aligned}$$

где $\bar{h}^L = h(x^k(t^N)) + h_x(x^k(t^N))(x(t^N) - x^k(t^N))$,

$$\bar{g}^L = g(x^k(t^j), t^j) + g_x(x^k(t^j), t^j)(x(t^j) - x^k(t^j)),$$

$$\bar{c}^L = c(u^k(t^j), t^j) + c_u(u^k(t^j), t^j)(u_j - u_j^k), \quad j = \overline{0, N}.$$

Для минимизации функционала (2.16), который теперь по сути является функцией многих переменных, при линейных ограничениях (2.11)-(2.15) применяется метод приведенного градиента [7]. Заметим, что функционал (2.16) предполагает использование исходной системы (2.1) для расчета траектории $\{x(t^1), x(t^2), \dots, x(t^N)\}$ по заданным параметрам v , w и управлению $u(t^0)$, $u(t^1)$, \dots , $u(t^N)$, т.е. полная модель вспомогательной задачи описывается соотношениями (2.1), (2.11)-(2.16).

Обозначив через $A[m + (l+s)(N+1)] \times [r(N+1) + p + n]$ матрицу коэффициентов линейных равенств (2.11)-(2.13), через b – вектор их свободных членов размерности $m + (l+s)(N+1)$ и через z – вектор искомых переменных $(u_j, j = \overline{0, N}; v; w)$ размерности $r(N+1) + p + n$, соответственно, поставленную задачу запишем так:

$$\begin{aligned} L(z) & \rightarrow \min, \\ Az & = b, \\ z^H & \leq z \leq z^B. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Для удобства изложения алгоритма будем, как принято в линейном программировании, считать размеры задачи (2.17) равными m, n . Для вектора z и матрицы A введем разбиение $z = (z_B, z_S, z_N)$, $A = (B, S, N)$, соответствующее базисным, супербазисным и небазисным переменным. Такое разбиение отличается от традиционного наличием супербазисных переменных, которые не достигают граничных значений из-за нелинейности целевой функции, но и не являются базисными.

В соответствии с таким разбиением система уравнений (2.17) переписывается в следующем виде:

$$Bz_B = -Sz_S - Nz_N + b. \quad (2.18)$$

Опишем итерацию метода приведенного градиента.

1. *Вычисление градиента целевой функции.* Чтобы применить традиционную схему для расчета градиента, используем непрерывное представление функционала (2.10):

$$H(\psi, x, u, w, t) = \psi'(t) f(x, u, w, t) + \mu^k(t)' [g(x, t) - \bar{g}^L] - \frac{\rho}{2} [g(x, t) - \bar{g}^L]' \times \\ \times [g(x, t) - \bar{g}^L] + \gamma^k(t)' [c(u, t) - \bar{c}^L] - \frac{\rho}{2} [c(u, t) - \bar{c}^L]' [c(u, t) - \bar{c}^L],$$

$$\dot{\psi}(t) = -f_x(x, u, w, t)' \psi(t) - \mu^k(t)' [g_x(x, t) - g_x(x^k, t)] + \\ + \rho [g(x, t) - \bar{g}^L]' [g_x(x, t) - g_x(x^k, t)], \quad (2.19)$$

$$\psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)) + \lambda^{k'} [h_x(x(t_1)) - h_x(x^k(t_1))] - \\ - \rho [h(x(t_1)) - \bar{h}^L]' [h_x(x(t_1)) - h_x(x^k(t_1))], \quad (2.20)$$

тогда

$$\nabla_u L = -f_u(x, u, w, t)' \psi(t) + [c_u(u, t) - c_u(u^k, t)]' \times \\ \times [-\gamma^k(t) + \rho(c(u, t) - \bar{c}^L)]. \quad (2.21)$$

Здесь для $\bar{h}^L, \bar{g}^L, \bar{c}^L$ использованы те же обозначения, что и в (2.16). Интегрируя в обратном времени систему (2.19), (2.20), будем запоминать их значения в узлах сетки. Одновременно на решении (2.19) вычисляются градиенты по параметрам $\nabla_w L$ и $\nabla_v L$.

Таким образом, будет найден градиент $L(z)$:

$$\nabla L(z) = (\nabla_u L, \nabla_v L, \nabla_w L),$$

который обозначим через g и выполним соответствующее разбиение $g = (g_B, g_S, g_N)$.

Из решения системы $B'\pi = g_B$, где B – базисная матрица, найдем вектор двойственных переменных (потенциалов) π и вычислим $\Delta = g - A'\pi$ — вектор оценок.

Выполним разбиение $\Delta = (\Delta_B, \Delta_S, \Delta_N)$, в котором Δ_S называется вектором приведенного градиента.

При $\|\Delta_S\| \leq \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – заданная погрешность, имеем локальный оптимум по супербазисным переменным и проверим следующий критерий оптимальности (п. 2). В противном случае перейдем к п. 3.

2. Проверка критерия оптимальности:

$$\Delta_i \geq 0 \text{ при } z_i = z^H_i; \Delta_i \leq 0 \text{ при } z_i = z^B_i, i \in I_N,$$

и расширение множества супербазисных переменных. При выполнении этих условий процесс прекращается. В противном случае среди небазисных компонент в Δ_N , нарушающих эти условия, находится максимальная по модулю компонента Δ_{j_0} , $j_0 \in I_N$, к матрице S добавляется столбец A_{j_0} , к вектору Δ_S – компонента Δ_{j_0} . Здесь можно выполнить также перенос и других столбцов матрицы N , оценки Δ_j которых близки по значениям к Δ_{j_0} , в матрицу S , чтобы сократить число дальнейших итераций.

3. Построение направления спуска. Оно строится по супербазисным переменным

$$p_S = \Delta_S, \quad Bp_B = S\Delta_S, \quad p_N = 0,$$

т.е., решив линейную систему, найдем p_B и получим $p = (p_B, p_S, p_N)'$.

4. Определение максимально возможного шага вдоль направления p . Находим максимальное значение α , при котором $z + \alpha p$ остается допустимым: $\alpha_{\max} = \alpha_{i_0} = \min \alpha_i$,

$$\alpha_i = \begin{cases} (z_i^B - z_i) / p_i, & \text{если } p_i > 0, \\ (z_i^H - z_i) / p_i, & \text{если } p_i < 0, \\ \infty, & \text{если } p_i = 0. \end{cases}$$

Если $\alpha_{\max} = 0$, то перейти на шаг 6.

5. Определение оптимального шага:

$$\alpha^* = \arg \min_{0 \leq \alpha \leq \alpha_{\max}} L(z + \alpha p).$$

Полагаем $z = z + \alpha^* p$. Если $\alpha^* < \alpha_{\max}$, то переходим в п. 1. В этом случае ни одна из компонент z_B и z_S не достигла своей границы.

6. Изменение базиса. При $\alpha^* = \alpha_{\max}$ одна из базисных или супербазисных переменных z_{i_0} достигает своей границы. Тогда она переводится в небазисные, а вместо нее вводим в базис одну из

супербазисных переменных. При этом выбирается наиболее удаленная от своих границ переменная, чтобы обеспечить хорошую обусловленность новой базисной матрицы.

Здесь можно также присвоить граничные значения супербазисным переменным, близким к своим границам, чтобы избежать лишних итераций, переводящих их на границы. Однако нужно следить за тем, чтобы вектор z_B , найденный из соотношения (2.18), удовлетворял заданным ограничениям. В противном случае нужно сделать более жесткий отбор близких к границе переменных (уменьшив ε , по которому определяются близкие элементы). Это сокращает поиск управлений, например релейного типа, которые состоят в основном из граничных, т.е. небазисных переменных вектора z .

Далее, изменив разбиение z и A , переходим в п. 1 на повторение итерации метода приведенного градиента.

Наиболее трудоемкой операцией алгоритма является расчет приведенного градиента (п. 1), где необходимо интегрировать сопряженную систему (2.19), (2.20) и считать компоненты градиента по квадратурным формулам.

2.2. Алгоритм метода спроектированного лагранжиана

Рассмотрим теперь полный алгоритм решения исходной задачи (2.1)-(2.6).

1. С заданным управлением u_j^k , $j = \overline{0, N}$, интегрируется система (2.1), и в узлах сетки запоминаются точки фазовой траектории x_j^k , $j = \overline{0, N}$. Здесь k – номер итерации (первый раз $k = 0$).

На полученном решении линеаризуются ограничения исходной задачи и строится вспомогательная задача (2.11)-(2.16).

2. Методом приведенного градиента решается вспомогательная задача минимизации модифицированной функции Лагранжа (2.16) при линейных ограничениях (2.11)-(2.15).

В результате будут найдены новые приближения для управления u_j^{k+1} , $j = \overline{0, N}$, параметров w^{k+1} и v^{k+1} , а также для двойственных переменных λ^{k+1} и μ_j^{k+1} , $j = \overline{0, N}$.

3. Проверяется критерий окончания итерационного процесса как по прямым, так и по двойственным переменным:

$$\left| I_i(u^{k+1}, w^{k+1}, v^{k+1}) \right| / (1 + \alpha^{k+1}) \leq \varepsilon, \quad i = \overline{1, m},$$

$$\left| J_i(u^{k+1}, w^{k+1}, v^{k+1}) \right| / (1 + \alpha^{k+1}) \leq \varepsilon, \quad i = \overline{1, s},$$

где $\alpha^{k+1} = \max \left\{ \|u_j^{k+1}\|, \quad j = \overline{0, N}; \quad |w_i|, \quad i = \overline{1, p}; \quad |v_l|, \quad l = \overline{1, n} \right\};$

$$\left| \lambda_j^k - \lambda_j^{k+1} \right| / (1 + \Theta^{k+1}) \leq \varepsilon, \quad j = \overline{1, m};$$

$$\begin{aligned} & \left| \mu_{ij}^k - \mu_{ij}^{k+1} \right| / (1 + \Theta^{k+1}) \leq \varepsilon, \quad i = \overline{1, s}, \quad j = \overline{0, N}; \\ & \Theta^{k+1} = \max \left\{ \left| \lambda_j^{k+1} \right|, \quad j = \overline{1, m}; \quad \left| \mu_{ij}^{k+1} \right|, \quad i = \overline{1, s}, \quad j = \overline{0, N} \right\}. \end{aligned}$$

При нарушении хотя бы одного из этих условий выполняется новая $k+1$ -я итерация с п. 1. Если же эти неравенства выполняются для заданного $\varepsilon > 0$, то итерационный процесс прекращается, а найденные u_j^{k+1} , $j = \overline{0, N}$, w^{k+1} и v^{k+1} выдаются в качестве приближенного решения задачи оптимального управления.

Заключение

Изложенные в статье численные методы оптимизации параметров и управляющих функций конструктивно учитывают фазовые ограничения путем применения эффективных алгоритмов линейного и нелинейного программирования для решения вспомогательных задач большой размерности. На внешних итерациях этого метода решаются задачи минимизации специально сконструированного нелинейного функционала – модифицированного лагранжиана при линеаризованных на полученном приближении фазовых ограничениях. Приближенное решение этих задач находится итерационным методом приведенного градиента с использованием сопряженной системы для расчета градиентов. Высокая трудоемкость внешней итерации этого алгоритма окупается тем, что наряду с улучшением управления здесь одновременно уточняются и значения двойственных переменных, через которые формируются необходимые условия оптимальности и вычисляется оптимальное управление в задаче с фазовыми ограничениями. Вместе с тем следует отметить, что современные информационные технологии и многопроцессорная вычислительная техника допускают достаточно эффективную реализацию сложных алгоритмов, например, путем применения параллельных вычислений. Программное обеспечение, разработанное на основе данного подхода и реализующее многометодную технологию расчета оптимального управления и оптимальных параметров, успешно применяется для решения сложных прикладных задач оптимального управления из различных областей науки и техники. Применение эффективной технологии расчета управления особенно актуально в управляемых системах реального времени, например, в системах управления летательными аппаратами, обладающих высокой маневренностью. Например, при проектировании СУ-57 (мирового лидера по маневренности) для решения серии задач оптимального маневрирования использовалось данное программное обеспечение [4, 5]. Известно также, что наличие программы выбора оптимального начального приближения в бортовом компьютере беспилотного космического аппарата Буран позволило ему выбрать наименее зависимую от бокового ветра стартовую точку для начала посадки на аэродром и успешно завершить свой беспрецедентный полет, реализовав программу оптимальной посадки (глиссаду) с высокой точностью.

Список литературы

1. Васильев О.В., Тятюшкин А.И. Об одном методе решения задач оптимального управления, основанном на принципе максимума // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1981. Т. 21. № 6. С. 1376-1384.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Качественная теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1971. – 507 с.
3. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Тятюшкин А.И. Конструктивные методы оптимизации. Ч. 1: Линейные задачи. – Минск: Университетское, 1984. – 214с.
4. Тятюшкин А.И., Федунев Б.Е. Численное исследование свойств оптимального управления в одной задаче преследования // Известия РАН. Теория и системы управления. 2005. № 3. С. 104-113.
5. Тятюшкин А.И., Федунев Б.Е. Возможности защиты от атакующей ракеты задней полусферы самолета вертикальным маневром // Известия РАН. Теория и системы управления. 2006. № 1. С. 111-125.
6. Тятюшкин А.И. Многометодная технология оптимизации управляемых систем. – Новосибирск: Наука, 2006. – 341 с.
7. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. – М.: Наука, 1982. – 432 с.
8. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. – М.: Наука, 1978. – 487 с.
9. Тятюшкин А.И. Численные методы решения задач оптимального управления с параметрами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57, №10. С. 1615-1630.
10. Тятюшкин А.И. Многометодные алгоритмы для решения сложных задач оптимального управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2021. Т. 61, №2. С. 189-205.

References

1. Vasiliev O.V., Tyatyushkin A.I. On a Method for Solving Optimal Control Problems Based on the Maximum Principle // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1981. Vol. 21. No. 6. P. 1376-1384.
2. Gabasov R., Kirillova F.M. Qualitative theory of optimal processes. – M.: Science, 1971. – 507 p.
3. Gabasov R., Kirillova F.M., Tyatyushkin A.I. Constructive optimization methods. P. 1: Linear problems. – Minsk: University, 1984. – 214 p.
4. Tyatyushkin A.I., Fedunov B.E. Numerical study of the properties of optimal control in one problem of pursuit // Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Teoriya i Sistemy Upravleniya. 2005. No. 3. P. 104-113.
5. Tyatyushkin A.I., Fedunov B.E. Possibilities of defense against attacking missiles of the rear hemisphere of the aircraft by vertical maneuver // Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Teoriya i Sistemy Upravleniya. 2006. No. 1. P.111-125.

6. Tyatyushkin A.I. Multimethod technology for optimization of controlled systems. – Novosibirsk: Science, 2006. – 341 p.
7. Yevtushenko Yu.G. Methods for solving extreme problems and their application in optimization systems. – M.: Science, 1982. – 432 p.
8. Fedorenko R.P. Approximate solution of optimal control problems. – M.: Science, 1978. – 487 p.
9. Tyatyushkin A.I. Numerical Methods for Solving Optimal Control Problems with Parameters // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2017. Vol. 57, No. 10. P. 1615-1630.
10. Tyatyushkin A.I. Multi-method algorithms for solving complex optimal control problems // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2021. Vol. 61. No. 2. P. 189-205.

Тятюшкин Александр Иванович – доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник tjat@icc.ru	Tyatyushkin Alexander Ivanovich – doctor of technical sciences, professor, leading researcher
---	--

Received 22.04.2022