

<https://doi.org/10.26160/2572-4347-2022-15-36-43>

ДИНАМИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ В ОЦЕНКЕ ОСОБЕННОСТЕЙ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ СВЯЗНОСТИ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Елисеев А.В., Миронов А.С.

Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск, Россия

Ключевые слова: механическая колебательная система, структурная математическая модель, передаточная функция, динамическая жесткость, динамическое гашение колебаний, динамические состояния, формы динамических взаимодействий.

Аннотация. Рассматриваются вопросы оценки, контроля и формирования динамических состояний технических объектов, транспортного и технологического назначения, находящихся в условиях вибрационных нагружений. В рамках единого методологического подхода развивается технология структурного математического моделирования динамических особенностей механических колебательных систем, включающих в свой состав настроечные параметры. Для механической колебательной системы, находящейся под действием вибрационного нагружения, реализованного связными силовыми возмущениями, разработан метод интерпретации динамических особенностей взаимодействий элементов с помощью ориентированных графов. Предложен способ построения семейства ориентированных графов, рассматриваемых в качестве динамических инвариантов, в зависимости от коэффициента связности внешних силовых возмущений.

DYNAMIC INVARIANTS IN THE EVALUATION OF THE FEATURES OF MECHANICAL OSCILLATORY SYSTEMS TAKING INTO ACCOUNT THE CONNECTIVITY OF EXTERNAL EXCITATIONS

Eliseev A.V., Mironov A.S.

Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia

Keywords: mechanical oscillatory system, structural mathematical model, transfer function, dynamic rigidity, dynamic damping of vibrations, dynamic states, forms of dynamic interactions.

Abstract. The issues of assessment, control and formation of dynamic states of technical objects, transport and technological purposes are considered. The technology of structural mathematical modeling of dynamic features of mechanical oscillatory systems is being developed. For a mechanical oscillatory system under the influence of vibration loading, a method has been developed for interpreting the dynamic features of the interactions of elements using oriented graphs. A method is proposed for constructing a family of oriented graphs depending on the connectivity coefficient of external force disturbances.

Введение. Вопросам безопасности работы технических объектов транспортного и технологического назначения уделяется значительное внимание [1]. Требования к динамическому качеству работы технических объектов, находящихся в условиях вибрационных нагружений, предопределяют внимание к развитию методологической базы для решения широкого круга задач динамики технических объектов [2]. Расчетными схемами широкого круга задач динамики служат механические колебательные системы с сосредоточенными параметрами. Существенное

значения для решения задач динамики имеют методы структурного математического моделирования, в рамках которых, механическим колебательным системам сопоставляются структурные схемы эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления [3]. Методы структурного математического моделирования получили распространение в решении задач вибрационной защиты и виброизоляции [4], динамики сочленений [5], моделирования взаимодействий технических объектов с учетом неударяющих связей [6,7]. Развитие получила методология структурного математического моделирования в направлении задач оценки динамических состояний и форм взаимодействий элементов технических объектов [8]. Вместе с тем, методология оценки динамических состояний и форм взаимодействий элементов механических колебательных систем, находящихся под воздействием внешних возмущений, недостаточно детализирована для учета условий, отображающих связность амплитуд внешних синфазных силовых возмущений.

Статья посвящена развитию представлений о динамических формах взаимодействий элементов механических колебательных систем с двумя степенями свободы, находящихся под воздействием связанных внешних возмущений силовой природы.

I. Основные положения. Постановка задачи. Рассматривается цепная механическая колебательная система с двумя степенями свободы. Массоинерционные элементы m_1 , m_2 крепятся друг к другу и к опорным поверхностям с помощью упругих элементов с жесткостями k_1 , k_2 , k_3 (рис. 1а).

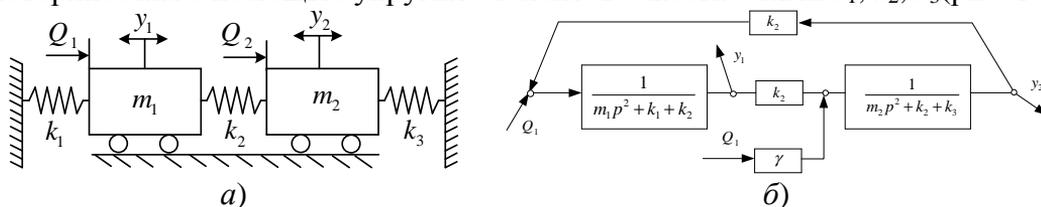


Рис. 1. Механическая колебательная система: а – расчетная схема, б – структурная схема с учетом коэффициента связности внешних воздействий γ

Система совершает малые вынужденные установившиеся колебания относительно положения статического равновесия под воздействием внешних гармонических синфазных силовых возмущений Q_1 и Q_2 . Смещения y_1 , y_2 массоинерционных элементов m_1 , m_2 относительно положения статического равновесия служат обобщенными координатами. На основе использования известных методов может быть построена структурная схема (рис. 1б) [4].

Предполагается, что между внешними силовыми возмущениями Q_1 и Q_2 , приложенными к массоинерционным элементам m_1 и m_2 механической колебательной системы, реализуется функциональная связь вида:

$$Q_2 = \gamma Q_1, \quad (1)$$

где параметр $\gamma \in (-\infty, \infty)$ отображает зависимость силовых возмущений и называется коэффициентом связности.

Задача заключается в разработке методологического подхода к оценке совокупности динамических состояний и форм взаимодействий элементов механической колебательной системы, находящейся под воздействием двух связанных внешних гармонических синфазных возмущений силовой природы, в зависимости от коэффициента связности.

II. Математическая модель. На основе структурной схемы (рис. 1б) с помощью известных методов [9-11] может быть определено передаточное отношение с учетом коэффициента связности внешних возмущений:

$$W_{11}(\gamma, p) \Big|_{p=j\omega} = \frac{\bar{y}_1}{Q_1} = \frac{-m_2(\omega^2 - (n_2^2 + \gamma\Delta_2^2))}{m_1 m_2 (\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}, \quad (2)$$

где характерные частоты системы: $n_1^2 = \frac{k_1 + k_2}{m_1}$, $n_2^2 = \frac{k_2 + k_3}{m_2}$, $\Delta_1^2 = \frac{k_2}{m_1}$,

$$\Delta_2^2 = \frac{k_2}{m_2}, \quad \omega_1^2 = \frac{n_1^2 + n_2^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{2}\right)^2 + \Delta_1^2 \Delta_2^2}, \quad \omega_2^2 = \frac{n_1^2 + n_2^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{2}\right)^2 + \Delta_1^2 \Delta_2^2}.$$

Передаточное отношение (2) позволяет для фиксированного коэффициента связности γ построить амплитудно-частотную характеристику. Фиксированная амплитудно-частотная характеристика отображает режимы обнуления амплитуды колебания координаты массоинерционного элемента в виде нулевого значения для частоты обнуления, а состояния резонанса на собственных частотах на графики амплитудно-частотной характеристики отображены в виде разрывов второго рода. В частотных интервалах, ограниченных частотами обнуления амплитуд колебаний и собственными частотами, график амплитудно-частотной характеристики представляет собой положительные или отрицательные непрерывные ветви. Положительные ветви амплитудно-частотной характеристики отображают сонаправленные формы движений массоинерционного элемента по отношению к внешнему гармоническому силовому возмущению, а отрицательные ветви отображают формы движений противоположных направленностей массоинерционного элемента.

В обобщенной форме динамические состояния и формы динамических взаимодействий могут быть представлены графами динамических состояний G_{14} (рис. 4а) и графами динамических форм взаимодействий G_{15} (рис. 4б) [12-13].

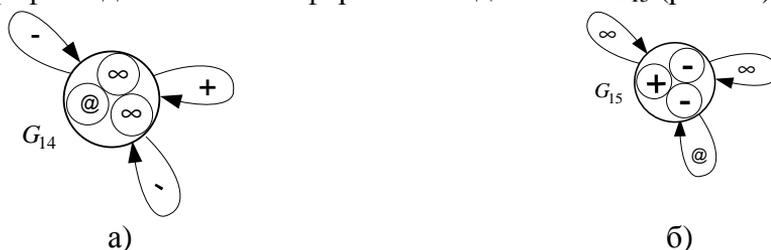


Рис. 2. Модели механических колебательных систем в виде ориентированных графов: а) граф динамических состояний для $\gamma < \gamma_0$, б) граф динамических форм взаимодействий для $\gamma < \gamma_0$

Изменение коэффициента связности γ на всей числовой оси позволяет рассмотреть различные совокупности динамических особенностей.

III. Варианты динамических состояний и форм динамических взаимодействий элемента системы с учетом связности внешних силовых возмущений. Множество возможных коэффициентов связности γ может быть представлено в виде объединения интервалов, границы которых определяются совпадением частоты обнуления амплитуды колебания массоинерционного элемента m_1 с нулевым значением и с частотами собственных колебаний. Таким образом, множество значений коэффициента связности может быть разбито на интервалы $(-\infty, \gamma_0)$, (γ_0, γ_1) , (γ_1, γ_2) , (γ_2, ∞) и критические точки $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$, для каждого из которых, включая критические точки, совокупность динамических особенностей может быть отображена графами, представляющими собой своеобразные динамические инварианты (табл. 1).

Для семейств механических колебательных систем процедура построения динамических инвариантов, отображающих специфичные для задачи динамические особенности, может быть реализована программными средствами [14-16]. Вычислительная трудоёмкость построения динамических инвариантов связана с определением собственных чисел.

В обобщенном виде динамические особенности механической колебательной системы могут быть представлены выражением $S_i^j F_k^l$, где i – количество состояний обнуления амплитуд колебаний, j – количество резонансов, k – количество отрицательных динамических форм взаимодействий, l – количество положительных форм взаимодействий. В данном случае совокупность динамических особенностей может быть представлена инвариантами: $S_0^2 F_2^1, S_1^2 F_1^2, S_1^2 F_2^2, S_0^1 F_1^1$ (табл. 1, II, IV, VI).

Табл. 1. Динамические инварианты механической колебательной системы

	1	2	3	4	5	6	7
I	$\gamma < \gamma_0$	$\gamma = \gamma_0$	$\gamma_0 < \gamma < \gamma_1$	$\gamma = \gamma_1$	$\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$	$\gamma = \gamma_2$	$\gamma_2 < \gamma$
II	S_0^2	S_1^2	S_1^2	S_0^1	S_1^2	S_0^1	S_1^2
III							
IV	F_2^1	F_1^2	F_2^2	F_1^1	F_2^2	F_1^1	F_2^2
V							
VI	$S_0^2 F_2^1$	$S_1^2 F_1^2$	$S_1^2 F_2^2$	$S_0^1 F_1^1$	$S_1^2 F_2^2$	$S_0^1 F_1^1$	$S_1^2 F_2^2$

Таким образом, совокупности динамических инвариантов (табл. 1) отражают тот факт, что варьирование коэффициента связности позволяет изменять ряд существенных динамических свойств механической

колебательной системы. В частности, рассмотрение коэффициента связности в качестве варьируемого настроечного параметра механической колебательной системы позволяет исключать и добавлять состояния резонанса или обнуления амплитуды колебания элемента системы, что влечет изменение количества положительных или отрицательных форм взаимодействий элементов.

Заключение. В рамках структурного-математического моделирования разработан методологический подход для оценки совокупности состояний и форм динамических взаимодействий элементов системы, находящейся в условиях вибрационного нагружения. Основой подхода служит интерпретация динамических особенностей, отображаемых амплитудно-частотными характеристиками системы, в помощью ориентированных графов, допускающих различные виды преобразований в зависимости от выбора объекта, динамическое состояние которого оценивается. Построенные ориентированные графы могут рассматриваться как своеобразные динамические инварианты механических колебательных систем, отображающие существенные особенности.

На основе разработанного подхода показано, что коэффициент связности внешних возмущений, выступающий в качестве настроечного параметра, определяет возможность изменения динамических состояний и динамических форм взаимодействий элементов механической колебательной системы, в частности, позволяет определять возможность проявления режима динамического гашения колебаний.

Разработанный подход может быть распространен на механические колебательные системы, включающие в свой состав устройства для преобразования движения.

Список литературы

1. Махутов Н.А. Безопасность и риски: системные исследования и разработки. Новосибирск: Наука, 2017. 724 с.
2. Clarence W. de Silva. Vibration. Fundamentals and Practice. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2000. 957 p.
3. Елисеев С.В., Артюнин А.И. Прикладная теория колебаний в задачах динамики линейных механических систем. Новосибирск: Наука, 2016. 459с.
4. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П., Засядко А.А. Динамический синтез в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов. Иркутск: Изд-во ИГУ, 2008. 523 с.
5. Елисеев С.В., Ермошенко Ю.В. Сочленения звеньев в динамике механических колебательных систем. Иркутск: Изд-во ИрГУПС, 2012. 156с.
6. Елисеев А.В. Особенности взаимодействия материальной частицы с вибрирующей поверхностью в зависимости от дополнительной силы с

- неудерживающей связью // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2013. № 3. С. 9-15.
7. Елисеев А.В. Особенности реализации режима кратного подбрасывания в модельной задаче с неудерживающей связью при наличии вязкого трения // Наука в центральной России. 2013. № 2. С. 42-47.
 8. Елисеев А.В. Системный подход в оценке динамических состояний технических объектов на основе методов структурного математического моделирования / А.В. Елисеев, Н.К. Кузнецов, А.С. Миронов // Труды ИСА РАН. Том 72. 1/2022. С. 93-104.
 9. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control, Vol. 252, Springer International Publishing, Cham, 2020, 521 p.
 10. Елисеев А.В., Кузнецов Н.К., Московских А.О. Динамика машин. Системные представления, структурные схемы и связи элементов. М.: Инновационное машиностроение, 2019. 381 с.
 11. Елисеев С.В., Елисеев А.В., Большаков Р.С., Хоменко А.П. Методология системного анализа в задачах оценки, формирования и управления динамическим состоянием технологических и транспортных машин. Новосибирск: Наука, 2021. 679 с.
 12. Елисеев А.В., Миронов А.С. Новые подходы к оценке режимов динамического гашения колебаний вибрационных машин транспортного и технологического назначения: графы динамических состояний и форм взаимодействия элементов // Мехатроника, автоматика и робототехника. 2022. №9. С. 23-29. doi.org/10.26160/2474-5901-2022-28-22-25.
 13. Eliseev A.V., Mironov A.S. Methodological approaches to the assessment of the totality of dynamic states and forms of interactions of elements of vibrating machines for transport and technological purposes // Journal of Advanced Research in Technical Science. 2022. № 28. P. 22-25. doi.org/10.26160/2474-5901-2022-28-22-25
 14. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ 2022610619. Программа для системного анализа динамических взаимодействий элементов технических систем с расчетной схемой в виде механической колебательной структуры с твердым телом / Елисеев А.В. – 13.01.2022. Заявка № 2021682457 от 27.12.2021.
 15. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ 2022611399. Программа для системного анализа механических колебательных систем с двумя степенями свободы на основе методов структурного математического моделирования / Елисеев А.В. – 25.01.2022. Заявка № 2022610613 от 19.01.2022.
 16. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ 2022613176. Программа для исследования и моделирования форм динамических взаимодействий элементов механических колебательных систем при оценке режимов динамического гашения колебаний объекта в виде

твёрдого тела / Большаков Р.С., Елисеев А.В. – 25.02.2022. Заявка № 2022612060 от 01.03.2022.

References

1. Makhutov N.A. Safety and risks: system research and development. Novosibirsk: Science, 2017. 724 p.
2. Clarence W. de Silva. Vibration. Fundamentals and Practice. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2000. 957 p.
3. Eliseev S.V., Artyunin A.I. Applied theory of oscillations in problems of dynamics of linear mechanical systems. Novosibirsk: Science, 2016. 459 p.
4. Eliseev S.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P., Zasyadko A.A. Dynamic synthesis in generalized problems of vibration protection and vibration isolation of technical objects. Irkutsk: Publ. house of the ISU, 2008. 523 p.
5. Eliseev S.V., Ermoshenko Yu.V. Articulations of links in the dynamics of mechanical oscillatory systems. Irkutsk: Publ. house of IrGUPS, 2012. 156 p.
6. Eliseev A.V. Features of the interaction of a material particle with a vibrating surface depending on the additional force with an unilateral ties // International Journal of Applied and Fundamental Research. 2013. No. 3. P. 9-15.
7. Eliseev A.V. Features of the implementation of the multiple toss mode in a model problem with an unstoppable bond in the presence of viscous friction // Science in Central Russia. 2013. No. 2. P. 42-47.
8. Eliseev A.V. A systematic approach in assessing the dynamic states of technical objects based on structural mathematical modeling methods / A.V. Eliseev, N.K. Kuznetsov, A.S. Mironov // Proceedings of the ISA RAS. Vol. 72. 1/2022. P. 93-104.
9. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control, Vol.252, Springer International Publishing, Cham, 2020, 521 p.
10. Eliseev A.V., Kuznetsov N.K., Moskovskikh A.O. Dynamics of machines. System representations, block diagrams and connections of elements. M.: Innovative Mechanical engineering, 2019. 381 p.
11. Eliseev S.V., Eliseev A.V., Bolshakov R.S., Khomenko A.P. Methodology of system analysis in the tasks of evaluation, formation and management of the dynamic state of technological and transport machines. Novosibirsk: Science, 2021. 679 p.
12. Eliseev A.V., Mironov A.S. New approaches to the evaluation of modes of dynamic damping of vibrations of vibrating machines of transport and technological purpose: graphs of dynamic states and forms of interaction of elements // Mechatronics, automation and robotics. 2022. No. 9. P. 23-29. doi.org/10.26160/2474-5901-2022-28-22-25
13. Eliseev A.V., Mironov A.S. Methodological approaches to the assessment of the totality of dynamic states and forms of interactions of elements of vibrating machines for transport and technological purposes // Journal of Advanced

Research in Technical Science. 2022. Iss. 28. P. 22-25. doi.org/10.26160/2474-5901-2022-28-22-25

14. Certificate of registration of the computer program 2022610619. Program for system analysis of dynamic interactions of elements of technical systems with a design scheme in the form of a mechanical oscillatory structure with a solid / Eliseev A.V. – 13.01.2022. Application No. 2021682457 dated 27.12.2021.
15. Certificate of registration of the computer program 2022611399. Program for system analysis of mechanical oscillatory systems with two degrees of freedom based on structural mathematical modeling methods / Eliseev A.V. – 25.01.2022. Application No. 2022610613 dated 19.01.2022.
16. Certificate of registration of the computer program 2022613176. Program for the study and modeling of the forms of dynamic interactions of elements of mechanical oscillatory systems when evaluating the modes of dynamic damping of vibrations of an object in the form of a solid / Bolshakov R.S., Eliseev A.V. – 25.02.2022. Application No. 2022612060 dated 01.03.2022.

Елисеев Андрей Владимирович – кандидат технических наук, доцент кафедры математики	Eliseev Andrey Vladimirovich – candidate of technical sciences, associate professor of Department of Mathematics
Миронов Артем Сергеевич – соискатель eavsh@ya.ru	Mironov Artem Sergeevich – applicant

Received 29.03.2022