https://doi.org/10.26160/2572-4347-2019-8-15-20

К ВОПРОСУ ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ОБЩИХ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ ПОСТРОЕНИИ НЕПРОТИВОРЕЧИВОЙ ТЕОРИИ ИЗГИБА ПЛАСТИН

Кравчук А.С., Кравчук А.И.

Ключевые слова: изгиб пластин, гипотезы Кирхгофа, Упругие деформации, урванения равновесия твердого тела, гармоническая попречная нагрузка.

Аннотация. С использованием стандартных уравнений равновесия построена непротиворечивая теория чистого изгиба пластин. При выводе уравнений изгиба использованы гипотезы Кирхгофа. Установлено, что попоречная нагрузка, действующая на пластину, должна быть ненулевой на всей площади пластины и удовлетворять урванению Лапласа, т.е. быть гаромнической. В этом случае поперечные прогибы будут удовлтворять стнадартному бигармоническому уравнению нулевой правой частью. Решен ряд примеров по изгибу пластин под собтвенным весом.

TO THE ISSUE OF THE APPLICATION OF THE GENERAL EQUATIONS OF SOLID EQUILIBRIUM IN CONSTRUCTING A CONSISTENT THEORY OF BENDING PLATES

Kravchuk A.S., Kravchuk A.I.

Keywords: plate bending, Kirchhoff hypotheses, Elastic deformations, tearing of the equilibrium of a rigid body, harmonic transverse load.

Abstract. Using standard equilibria, a consistent theory of pure plate bending is constructed. Kirchhoff hypotheses were used for deriving the bending equations. It has been established that the transverse load acting on the plate must be nonzero over the entire area of the plate and satisfy Laplace’s equation, i.e. to be harmonious. In this case, the transverse deflections will satisfy the standard biharmonic equation with the zero right-hand side. A number of examples have been solved for bending plates under their own weight.

Введение. Основной проблемой в теории пластин является составление физически и математически оправданной системы уравнений равновесия без превращения нулевых компонент перерезывающих нагрузок в ненулевые [1].

Актуальность данного исследования обостряется тем, что теория прогибов пластин, основанная на недостаточно обоснованных уравнениях равновесия, является частью учебных курсов по теории упругости и фактически обучает студентов делать заключения в угоду ситуации, что не способствует формированию у студентов отношения к методам теории упругости, как адекватному инструменту познания окружающего мира.

Целью данной статьи является применение общеизвестных уравнений равновесия твердого тела при построении теории изгиба пластин в соответствии с гипотезами Кирхгофа [2, 3].

В целом, если смотреть формально, то применение известной системы уравнений равновесия твердого тела (не специальной для пластин) дает положительный результат. Непротиворечивую теорию создать можно.

Проблема состоит в том, что результаты данных теоретических решений, например, полученные для прогибов прямоугольных и круглых пластин, должны быть проверены экспериментально.

Вывод дифференциального уравнения прогиба пластины исходя из общих уравнения твердого тела и гипотез Кирхгофа. Гипотезы Кирхгофа состоят в наборе предположений относительно характера деформаций пластин с учетом действующих в поперечном сечении моментов. Не вдаваясь в известный геометрический смысл [2, 3], эти формулы можно записать в виде:

$$\varepsilon_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z, \quad \varepsilon_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z, \quad \gamma_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0. \quad (1)$$

Дополнительно предполагая, что $\varepsilon_z = 0$ (т.е. пластина находится в состоянии плоской деформации) [4], можно тождественно удовлетворить всем увранениям неразрывности [5, 6].

При построении теории не будем пользоваться известными противоречивыми уравнениями равновесия, известными из теории пластин [2-4], а используем стандартные уравнения равновесия твердого тела в пространственном случае [5]. Учитывая, что на пластину действуют исключительно силы, направленные вдоль оси $0z$ и, исходя из того, что в соответствии с (1) $\tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$, можно получить:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\frac{p(x,y)}{h}, \quad (4)$$

где h - высота пластины, а $p(x,y)$ – внешние нагрузки (в виде давления), приложенные к верхней границе пластины, а вызываемые ими напряжения на верхней границе пластины отрицательные (противоположно направленные нормали к поверхности пластины):

$$\sigma_z = -\frac{p(x,y)}{h} \cdot z. \quad (5)$$

На нижней границе пластины напряжения σ_z положительные – сонаправлены с нормалью к нижней поверхности пластины. Отметим, что $p(x,y)$ - ненулевая нагрузка, действующая на всей поверхности пластины. Ось $0z$ направлена вертикально вверх.

Запишем закон Гука для этого случая с учетом, того что $\varepsilon_z = 0$ - константа:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu \cdot \left(\sigma_y - p(x,y)\frac{z}{h}\right)\right), \quad (6)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu \cdot \left(\sigma_x - p(x,y)\frac{z}{h}\right)\right), \tag{7}$$

$$-\frac{p(x,y)}{h} z = \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y), \tag{8}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2 \cdot (1+\nu)}{E} \tau_{xy}. \tag{9}$$

Складывая первые два уравнения, получаем:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left((\sigma_x + \sigma_y) - \nu \cdot \left((\sigma_x + \sigma_y) - 2 \cdot p(x,y) \cdot \frac{z}{h}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{E}\left((1-\nu) \cdot (\sigma_x + \sigma_y) + 2 \cdot \nu \cdot p(x,y) \cdot \frac{z}{h}\right).$$

Заменяя $\sigma_x + \sigma_y$, исходя из третьего уравнения, получаем:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = -\frac{1}{E}\left(\frac{1-\nu+2\cdot\nu^2}{\nu}\right) \cdot p(x,y) \cdot \frac{z}{h}.$$

Подставляя (1), получаем уравнение чистого изгиба:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{E}\left(\frac{1-\nu+2\cdot\nu^2}{\nu}\right) \cdot \frac{p(x,y)}{h} \tag{10}$$

Достаточные условия непротиворечивости данной теории изгиба. Фактически необходимо получить условия на поведение нагрузки $p(x,y)$ для того, чтобы изложенная выше теория и уравнение (10) не имели внутренних противоречий. Для этого формально повторим вывод уравнений неразрывности в напряжениях для плоской деформации. В соответствии с известной методикой [5] рассмотрим только первое уравнение из полной пространственной системы уравнений, называемых уравнениями неразрывности деформаций:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \tag{11}$$

Из (11), исходя из увранений (6) и (7) закона Гука, получаем:

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x) = \\ = 2(1+\nu)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\tau_{xy} - \nu \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \cdot q(x,y)\frac{z}{h}. \end{gathered} \tag{12}$$

Дифференцируем уравнение равновесия (2) по x, а уравнение (3) по y и сложим результат. После очевидных преобразований несложно получить [5]:

$$2\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}\right).$$

Подставляя полученый результат в (12), после приведения подобных членов, получаем:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=-\nu\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)p(x,y)\frac{z}{h}.$$

Учитывая уравнение (8), можно получить достаточное условие непротиворечивости данной теории $\forall z\neq 0$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)p(x,y)=0. \qquad (13)$$

Таким образом уравнение чистого изгиба прямоугольной пластины с использованием гипотез Кирхгофа (10) верно тогда, когда распределенная нагрузка $p(x,y)$ является гармонической, т.е. удовлетворяет уравнению Лапласа (13). В этом случае непосредственным применением оператора Лапласа к уравнению (10) можно установить, что прогибы w должны удовлетворять бигармоническому уравнению:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)w=0$$

с нулевой правой частью, а не функцией, как в известных исследованиях [2-5].

Более того из уравнения (13) следует, что (10) не может быть примененно к решению задач динамики пластин.

Теория чистого изгиба распределенной нагрузкой стержня, шарнирно опертого по обоим концам. Из уравнения (10) следует, что в случае стержня (для малых поперечных перемещений под действием распределенной нагрузки $p(x)$ в виде давления на верхней границе) верно следующее элементарное уравнение на отрезке $[0,\ell]$, занимаемом стержнем:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{1}{E}\left(\frac{1-\nu+2\cdot\nu^2}{\nu}\right)\cdot\frac{p(x)}{h}. \qquad (14)$$

В частности при изгибе под сосбственным весом $p(x,y)=\rho\cdot g\cdot h$ можно получить решение:

$$w=\frac{1}{E}\left(\frac{1-\nu+2\cdot\nu^2}{\nu}\right)\cdot\rho\cdot g\cdot x\cdot(x-\ell).$$

Необходимо омтетить, что прогибы под сосбвтенным весом стержня не зависят от высоты пластины.

Уравнение прогиба под сосбственным весом пластины, закрепленной в угловых точках. В частности рассмотрим нагрузку от сосбтвенного веса $q(x,y)=\rho\cdot g\cdot h$, в этом случае уравнение чистого изгиба приобретает вид:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{1}{E}\left(\frac{1-\nu+2\cdot\nu^2}{\nu}\right)\cdot\rho\cdot g\ .$$

и допускает точное полиномиальное решение только в случае шарнирного закрепления прямоугольной пластины в угловых точках:

$$w(x,y) = -\frac{1}{E}\left(\frac{1-\nu+2\cdot\nu^2}{\nu}\right)\cdot\rho\cdot g\cdot\left(x\cdot(x-a)+y\cdot(y-b)\right).$$

При этом в соответствии с данной теорией прогиб пластины под собственным весом также не связаны с ее высотой.

Полярная система координат. В случае перехода к полярной системе координат простой заменой оператора Лапласа в декартовой системе координат на оператор Лапласа в полярной [5] можно получить уравнения:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)w(r,\theta) = \frac{1}{E}\left(\frac{1-\nu+2\cdot\nu^2}{\nu}\right)\cdot\frac{p(r,\theta)}{h}, \qquad (15)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)p(r,\theta) = 0. \qquad (16)$$

Например, в случае осесимметричной нагрузки, приложенной к круглой пластине радиуса R, уравнения (15) и (16) преобразуются к виду:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)w(r) = \frac{1}{E\cdot h}\left(\frac{1-\nu+2\cdot\nu^2}{\nu}\right)\cdot\left(C_1+C_2\cdot\ln\left(\frac{r}{R}\right)\right),$$

где C_1 и C_2 - произвольные константы. В частности, в случае нагрузки от собственного веса $C_1=\rho\cdot g\cdot h$, $C_2=0$ можно получить решение:

$$w(r) = \frac{\rho\cdot g}{4\cdot E}\cdot\left(\frac{1-\nu+2\cdot\nu^2}{\nu}\right)\cdot\left(r^2-R^2\right).$$

Выводы. С использованием стандартных уравнений равновесия построена непротиворечивая теория чистого изгиба пластин.

При выводе уравнений изгиба использованы гипотезы Кирхгофа.

Установлено, что поперечная нагрузка, действующая на пластину должна быть ненулевой на всей площади пластины и удовлетворять урванению Лапласа, т.е. быть гаромнической.

В этом случае поперечные прогибы будут удовлтворять стнадартному бигармоническому уравнению нулевой правой частью.

Решен ряд примеров по изгибу пластин под собтвенным весом.

Список литературы

1. Ермоленко А.В. Расчет круглых пластин по уточненным теориям / А.В. Ермоленко // Вестник Сыктывкарского университета, Сер. 1. – 2006. - Вып. 6. – С. 79-86.
2. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1977. – 488 с.
3. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. - М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. - 419 с.

4. Журавков М.А. Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности / М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов. – Минск: БГУ, 2011. - 543 с.
5. Жемочкин Б.Н. Теория упругости. – М.: Гостройиздат, 1957. - 257 с.
6. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 1982. – 264 с.

References

1. Ermolenko A.V. Calculation of round plates according to revised theories // Bulletin of the Syktyvkar University, Ser. 1. – 2006. – Issue 6. – P. 79-86.
2. Biderman V.L. Mechanics of thin-walled structures. – M.: Mechanical Engineering, 1977 . – 488 p.
3. Volmir A.S. Flexible plates and shells. – M .: State publishing house of technical and theoretical literature, 1956. – 419 p.
4. Zhuravkov M.A. Continuum mechanics. Theory of elasticity and plasticity / M.A. Zhuravkov, E.I. Starovoitov. – Minsk: BSU, 2011. – 543 p.
5. Zhemochkin B.N. Theory of elasticity. – M.: Gostroyizdat, 1957. – 257 p.
6. Samul V.I. Fundamentals of the theory of elasticity and plasticity. – M.: Higher School, 1982. – 264 p.

Кравчук Александр Степанович - доктор физ.-мат. наук, доцент, ведущий научный сотрудник, лаборатория «Динамика систем и механика материалов», Научно-исследовательский политехнический институт, филиал Белорусского национального технического университета, г. Минск, Беларусь, ask_belarus@inbox.ru	**Kravchuk Alexander Stepanovich** - doctor of Phys.-Math. Sciences, Associate Professor, Leading Researcher, Laboratory “Dynamics of Systems and Materials Mechanics”, Research Polytechnic Institute, Branch of the Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus, ask_belarus@inbox.ru
Кравчук Анжелика Ивановна - кандидат физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования, Белорусский государственный университет, г. Минск, Беларусь, anzhelika.kravchuk@gmail.com	**Kravchuk Anzhelika Ivanovna** – Candidate of Phys.-Math. Sciences, Associate Professor, Associate Professor, Department of Web Technologies and Computer Modeling, Belarusian State University, Minsk, Belarus, anzhelika.kravchuk@gmail.com

Received 25.10.2019