УДК 539.3 https://doi.org/10.26160/2542-0127-2026-18-148-150

ОБ ИЗНОСЕ УПРУГОЙ ТРУБЫ С ПОКРЫТИЕМ

Казаков К.Е.
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

Ключевые слова: износ, контакт, труба, втулка, покрытие, неоднородность, собственные функции.
Аннотация. В работе рассмотрен процесс изнашивания упругой трубы с тонким неоднородным покрытием при вращении жёсткой втулки, установленной с натягом. Сформулированы физические предположения и безразмерная интегральная модель. Приведено аналитическое решение, полученное при помощи специального подхода, учитывающего входящие в уравнение сложные функции и операторы различного типа. Выделение функции, характеризующей неоднородность покрытия, отдельным множителем позволяет эффективно вычислять контактное давление даже при быстро меняющихся или разрывных зависимостях свойств.

ON THE WEAR OF AN ELASTIC TUBE WITH A COATING

Kazakov K.E.
Ishlinsky Institute for Problems in mechanics RAS, Moscow

Keywords: wear, contact, tube, bush, coating, nonuniformity, eigenfunctions.
Abstract. The wear of an elastic tube with a thin nonuniform coating caused by the rotation of a rigid bush fitted with interference is considered. The physical assumptions and a dimensionless integral model of the problem are formulated. An analytical solution is presented using a special approach that accounts for the complex spatial variation of the coating properties and the presence of different types of operators in the governing equation. Isolating the function characterizing the coating nonuniformity as a separate factor enables efficient computation of the contact pressure even when the material properties vary rapidly or discontinuously with the axial coordinate.

Аналитические решения контактных задач служат основой для проверки численных алгоритмов. В работе [1] исследовано взаимодействие цилиндрической втулки и трубы с неоднородным покрытием. Целью данного исследования является получение аналитического представления контактного давления, пригодного для расчётов процесса изнашивания с учетом быстро меняющихся свойств покрытия.

Рассматривается однородная упругая труба с внутренним радиусом r_0 и наружным радиусом r_1, покрытая тонким упругим неоднородным слоем толщины h. Жёсткая втулка длиной $2a$ установлена на рассматриваемую трубу с натягом δ. Осевая координата z отсчитывается от середины втулки. Считается, что толщина покрытия мала по сравнению с внутренним радиусом трубы и длиной втулки, а контакт как между слоями, так и между втулкой и покрытием является гладким вдоль оси z. Вращение втулки вызывает окружное скольжение и изнашивание покрытия. Принципиальная схема взаимодействия изображена на рисунке 1.

Так как труба однородная, то её модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν постоянны. Покрытие считается неоднородным по осевой координате, то есть его упругие характеристики $E_c(z)$ и $\nu_c(z)$ зависят от z. Предполагается, что контактная жёсткость покрытия $R(z)$ и его твёрдость $H(z)$ пропорциональны:

$$H(z) \sim R(z), \quad R(z) = \frac{E_c(z)}{1-\nu_c^2(z)}. \tag{1}$$

Начиная с момента времени t_0 втулка вращается с постоянной угловой скоростью ω. Тогда линейная скорость скольжения по поверхности трубы с покрытием $V = \omega(r_1 + h)$.

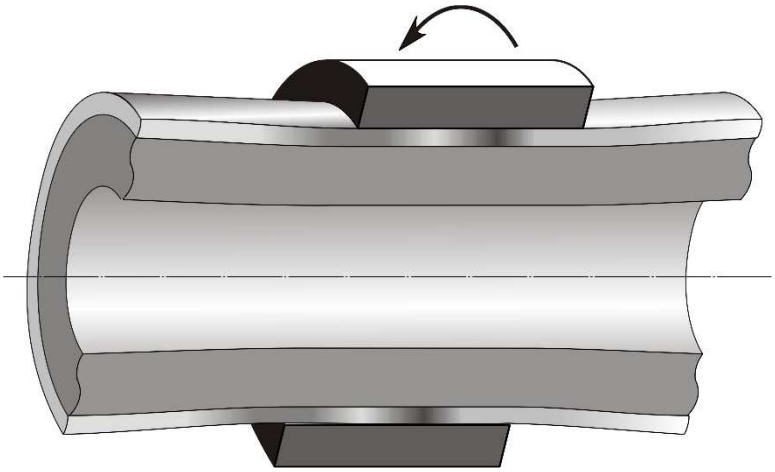


Рис. 1. Схема контактного взаимодействия

В данной работе предполагается, что происходит линейный износ, то есть скорость изнашивания пропорциональна контактному давлению $q(z,t)$ и линейной скорости скольжения V и обратно пропорциональна твёрдости $H(z)$ [2]. Рассматривается период взаимодействия, в течение которого износ мал по сравнению с начальной толщиной покрытия, поэтому изменением его толщины в выражении для упругой податливости пренебрегается.

После обезразмеривания [1] математическая модель задачи принимает вид смешанного интегрального уравнения, содержащего как операторы Фредгольма, так и операторы Вольтерра:

$$m(z)\left(q(z,t) + \int_1^t Kq(z,\tau)d\tau\right) + \int_{-1}^{1} k(z,\zeta)q(\zeta,t)d\zeta = \delta, \quad z \in [-1,1], \quad t \geq 1, \tag{2}$$

где $q(z,t)$ – безразмерное контактное давление; $m(z)$ – известная положительная функция, пропорциональная начальной толщине слоя и обратно пропорциональная жесткости и, в соответствии с (1), твердости покрытия; K – постоянное ядро оператора Вольтерра, пропорциональное линейной скорости скольжения V и обратно пропорциональное толщине покрытия; $k(z,z)$ – известное разностное ядро Гильберта–Шмидта, обладающее свойствами положительной определенности и симметричности; d – безразмерная величина начального натяга. Далее для безразмерных переменных и функций сохраняются прежние обозначения.

Для решения такого уравнения применяется подход, основанный на поиске неизвестной функции $q(z,t)$ в виде

$$q(z,t) = \frac{Q(z,t)}{\sqrt{m(z)}}. \tag{3}$$

Здесь новая неизвестная функция $Q(z,t)$ ищется в виде разложения по ортонормированной системе собственных функций $\{\phi_k(z)\}_{k=0,1,2,\ldots}$ оператора Фредгольма, входящего в состав нового смешанного уравнения относительно

$Q(z,t)$, получаемого подстановкой (3) в уравнение (2) и последующим делением на $\sqrt{m(z)}$, то есть

$$Q(z,t)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)\phi_k(z),$$

где $f_k(t)$ — функциональные коэффициенты разложения, подлежащие определению. Собственные функции строятся на основании базисных функций $\{w_k(z)\}_{k=0,1,2,\ldots}$, полученных при помощи ортонормирования системы линейно независимых функций

$$\frac{1}{\sqrt{m(z)}},\frac{z}{\sqrt{m(z)}},\frac{z^2}{\sqrt{m(z)}},\ldots$$

Получаемая система независимых уравнений Вольтерра решается методом резольвент [3].

Окончательное решение уравнения (2) имеет вид:

$$q(z,t)=\frac{1}{m(z)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{1+\lambda_k}\Phi_k(z)\exp\left(-\frac{K(t-1)}{1+\lambda_k}\right),$$

где l_k – собственные значения преобразованного оператора Фредгольма,

$$\Phi_k(z)=\sqrt{m(z)}\phi_k(z),\quad c_k=\delta\int_{-1}^{1}\frac{\phi_k(z)}{\sqrt{m(z)}}dz.$$

Таким образом, зависимость решения от неоднородность явно учтена множителем $1/m(z)$, что позволяет находить контактное давление с высокой точностью при сравнительно небольшом количестве удерживаемых слагаемых.

Финансирование. Исследование выполнено в рамках государственного задания (номер госрегистрации *124012500437-9*).

Список литературы

1. Kazakov K.E. Wear of elastic tube with nonuniform coating by rigid bush // E3S Web of Conferences. 2020, vol. 162, p. 02002.
2. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи в трибологии. – М.: Машиностроение, 1988. – 253 с.
3. Polyanin A.D., Manzhirov A.V. Handbook of Integral Equations. 2nd ed. – Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2008.

Сведения об авторе:
Казаков Кирилл Евгеньевич – к.ф.-м.н., доцент, старший научный сотрудник.