УДК 539.3 https://doi.org/10.26160/2542-0127-2026-18-141-144

УЧЕТ КРАЕВОГО ЭФФЕКТА В СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧЕ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ КОНСОЛЬНО ЗАКРЕПЛЕННОГО ЦИЛИНДРА

Раков Д.В.
Самарский государственный технический университет, Самара

Ключевые слова: термоупругость, консольный цилиндр, связная задача термоупругости, толстостенный цилиндр, консольное закрепление, краевой эффект.
Аннотация. В работе рассмотрены вопросы учета краевого эффекта в консольном закреплении при использовании математической модели задачи термоупругости для консольно закрепленного однослойного толстостенного цилиндра. Было произведено сравнение результатов численного и аналитического расчетов, рассмотрены особенности результатов расчета в зависимости от типов нагрузки и параметров конструкции.

ACCOUNTING FOR THE BOUNDARY EFFECT IN A COUPLED THERMOELASTICITY PROBLEM FOR A CANTILEVER CYLINDER

Rakov D.V.
Samara State Technical University, Samara

Keywords: thermoelasticity, cantilever cylinder, coupled thermoelasticity problem, thick-walled cylinder, cantilever support, boundary effect.
Abstract. This paper examines issues related to accounting for boundary effects in cantilever clamping when using a mathematical model of a thermoelasticity problem for a cantilever single-walled thick-walled cylinder. A comparison was made of the results of numerical and analytical calculations, and the characteristics of the calculation results were examined depending on the types of loads and structural parameters.

Введение

Метод конечных элементов (МКЭ) является наиболее универсальным для проведения численных экспериментов и решения большинства задач теории упругости, однако его универсальности сопутствует определенные ограничения, такие как зависимость результатов от конфигурации конечных элементов, расхождения результатов в области закрепления конструкций, невозможность решения задач с комплексными воздействиями в связной постановке и т.д. В связи с этим, даже при наличии таких методов представляется нужным разрабатывать аналитические теории расчета конструкций для оценки погрешности, создаваемой применением численных расчетных комплексов, а также выявления эффектов, который МКЭ в силу своих особенностей не может отобразить.

Особый интерес представляет анализ краевых эффектов, возникающих в зонах жесткого закрепления упругих тел при термомеханическом нагружении. Настоящая работа посвящена сравнительному анализу численного и аналитического решения связанной осесимметричной задачи термоупругости для консольно закрепленного толстостенного цилиндра с акцентом на выявление и оценку краевого эффекта в зоне закрепления.

Постановка задачи

Пусть полый консольно закрепленный цилиндр, выполненный из бетона, занимает в цилиндрической системе координат (r, θ, z) область Ω: $\{a \le r \le b, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le z \le h\}$. Консольно закреплен цилиндр по всей нижней плоскости ($z = 0$). На внешней поверхности цилиндра задана синусоидально возрастающая по времени температурная нагрузка, которая также линейно увеличивается от вершины цилиндра в точке закрепления $z = 0$ до температуры $T_{max} = 373$ K; на внутренней поверхности задан конвективный теплообмен со средой. Высота цилиндра составляет 1,5 м, внешний радиус цилиндра $R = 0{,}1$ м, внутренний радиус цилиндра $r = 0{,}05$ м.

Аналитическое решение такой задачи было построено в работе [1] при помощи последовательного разделения переменных с последовательным применением преобразований Фурье и метода конечных интегральных преобразований [2, 3]. Численный расчет в программном комплексе ANSYS производился в модулях Transient Structural (для нестационарной термоупругой задачи) с импортированием решения из модуля Transient Thermal, в котором были получены решения для температурного поля в различные моменты времени. Для геометрической модели цилиндра сетка конечных элементов была создана с размером элемента 0,01 м с общим количеством элементов 4368, что обеспечивало сходимость результатов численного решения с более мелкой сеткой разбиения.

Результаты

Расчеты по аналитической и численной моделям показали, что за счет характера изменения температурного воздействия и условий закрепления упругой системы в радиальной плоскости наибольшие радиальные перемещения образуются именно в области жесткого закрепления ($z = 0{,}1…0{,}3$ м), что свидетельствует о развитии выраженного краевого эффекта. Это приводит к заметным расхождениям результатов по ряду параметров в процессе прогрева конструкции, однако вместе с увеличением времени воздействия эти результаты начинают сходиться с малой погрешностью (рис. 1). Особенно этот эффект заметен на результатах расчета температурных полей: на рисунке 1, в пунктирная линия, обозначенная цифрой 1 наиболее расходится с численными результатами именно в начальный момент времени и в области консольного закрепления.

Численный метод при установившемся температурном режиме позволяет получить результаты, достаточно точно совпадающие с аналитическим решением. Однако при исследовании нестационарных процессов использование МКЭ приводит к существенной ошибке, особенно в зоне краевого эффекта [4, 5]. Это объясняется тем, что стандартные конечно-элементные аппроксимации не могут адекватно описать поведение напряжений и перемещений вблизи линии жесткого закрепления, где градиенты полей достигают максимальных значений.

Аналитическое решение, напротив, позволяет точно учесть краевой эффект благодаря точному удовлетворению граничных условий жесткого закрепления. Суммирование рядов в аналитическом решении заканчивается, когда вклад последнего члена составляет менее 1% от суммы предыдущих составляющих ряда. В рассматриваемом примере, как правило, при получении аналитического решения

удерживалось 6-10 членов ряда, что обеспечивало высокую точность решения при разумных вычислительных затратах.

Также важно учесть тот факт, что аналитическое решение получено в связной постановке, то есть при учете совместного действия полей температур и перемещений, в то время как численный метод сначала решает задачу по получению температурного поля, затем импортируя ее в другой расчетный модуль для решения задачи термоупругости.

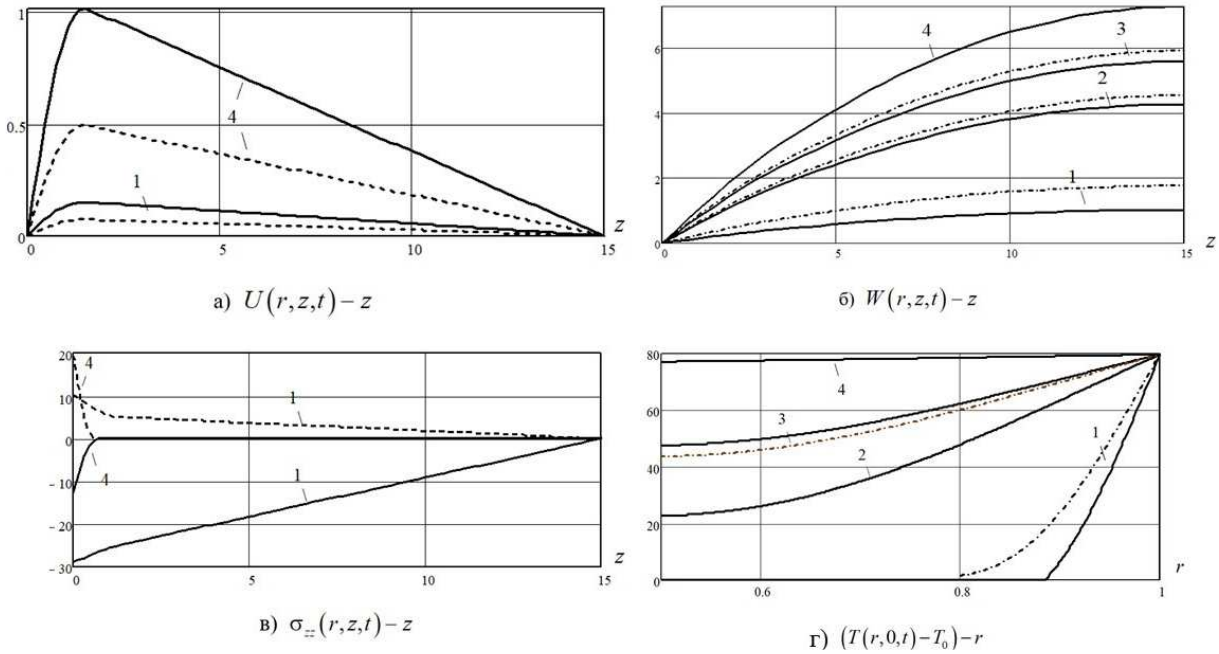


Рис. 1. Сравнение результатов численного и аналитического расчетов (сплошная линия – аналитический расчет, пунктир – численный): а) радиальные перемещения $U(r, z, t)$, мм; б) аксиальные перемещения $W(r, z, t)$, мм; в) нормальные напряжения $\sigma_{zz}(r, z, t)$, МПа·10^{-2}; г) разность температур тела и среды $T(r, z, t) - T_0$, °С; цифры на графиках соответствуют времени прогрева: 1) t = 10 с, 2) t = 100 с; 3) t = 200 с; 4) t = 800 с

При варьировании временных параметров самого температурного воздействия было выявлено, что расхождение в расчетах возрастает по мере увеличения скорости воздействия. Это связано с динамическим эффектом распространения волн в конструкции: связная постановка учитывает воздействие температур и напряжений одновременно, в то время как численный расчет отклоняется от аналитических значений по мере приближения временного периода воздействия к периоду собственных колебаний всей конструкции. При жесткости цилиндра, близкой к параметрам реальных конструкционных материалов (бетон/сталь) динамический эффект от изменения объема тела, который обуславливал бы необходимость учета инерционных составляющих, нивелируется и не оказывает значимого влияния на расчет в целом.

Выводы

Проведенный сравнительный анализ аналитического и численного решений связанной осесимметричной задачи термоупругости для консольно закрепленного цилиндра позволяет сделать следующие выводы:

1. В зоне жесткого закрепления цилиндра развивается выраженный краевой эффект, характеризующийся значительными градиентами перемещений и

концентрацией касательных напряжений σ_{rz}, которые локализуются исключительно в области закрепления.

2. Численный метод конечных элементов обеспечивает удовлетворительную точность при расчете установившихся температурных режимов, однако при моделировании нестационарных процессов, особенно в зонах краевого эффекта, погрешность МКЭ существенно возрастает.

3. Аналитическое решение позволяет точно описать краевой эффект и получить достоверные результаты для напряженно-деформированного состояния в зоне закрепления, что недостижимо при использовании стандартных конечно-элементных моделей.

4. Для конструкций, обладающих достаточно большой жесткостью, при определении температурного поля можно пренебречь параметром, учитывающим скорость изменения объема тела, и решать задачу теплопроводности, исключая инерционные составляющие.

Список литературы

1. Шляхин Д.А., Раков Д.В. Нестационарная связанная осесимметричная задача теории термоупругости для консольно закрепленного цилиндра // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2021. – Т. 25, №2. – С. 320-342.
2. Сеницкий Ю.Э. Биортогональное многокомпонентное конечное интегральное преобразование и его приложение к краевым задачам механики // Известия вузов. Математика. – 1996. – №8. – С. 71-81.
3. Снеддон И.Н. Преобразования Фурье. – М.: Изд-во иностр. лит., 1955. – 668 с.
4. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
5. Басистов А.Е., Лукин С.И. Численные методы решения задач термоупругости. – М.: Наука, 2018. – 245 с.

Сведения об авторе:

Раков Даниил Васильевич – аспирант, ассистент кафедры «Строительная механика, фундаменты, металлические конструкции».