УДК 621.822.6:621.9.06 https://doi.org/10.26160/2542-0127-2026-18-110-118

МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ КВАЗИСТАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РАДИАЛЬНО-УПОРНЫХ ШАРИКОПОДШИПНИКОВ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ ШПИНДЕЛЬНЫХ УЗЛОВ

Максимов А.В., Молодцов В.В.
Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», Москва

Ключевые слова: радиально-упорный шарикоподшипник, высокоскоростной шпиндельный узел, квазистатическая модель, угол контакта, гироскопический момент, центробежная сила, гипотеза ведущей дорожки, теория Герца, матрица жесткости.
Аннотация. В статье проведен сравнительный анализ методов построения квазистатических моделей радиально-упорных шарикоподшипников высокоскоростных шпиндельных узлов. Рассмотрены геометрические соотношения и деформации колец, кинематика шарика, уравнения равновесия шарика и внутреннего кольца, а также методы расчета матрицы жесткости. Проанализированы подходы к определению угла наклона оси вращения шарика и к распределению гироскопического момента между контактами: гипотеза ведущей дорожки, допущение равных коэффициентов трения и метод, основанный на принципе Даламбера. Показано, что выбор допущений существенно влияет на результаты расчета при высоких скоростях вращения.

METHODS FOR CONSTRUCTING QUASI-STATIC MODELS OF ANGULAR CONTACT BALL BEARINGS OF HIGH-SPEED SPINDLE UNITS

Maksimov A.V., Molodtsov V.V.
Moscow State University of Technology “STANKIN”, Moscow

Keywords: angular contact ball bearing, high-speed spindle unit, quasi-static model, contact angle, gyroscopic moment, centrifugal force, raceway control hypothesis, Hertz theory, stiffness matrix.
Abstract. The paper presents a comparative analysis of methods for constructing quasi-static models of angular contact ball bearings of high-speed spindle units. Geometric relations and ring deformations, ball kinematics, the equilibrium equations of the ball and the inner ring, and methods for calculating the stiffness matrix are considered. Approaches to determining the inclination angle of the ball rotation axis and to distributing the gyroscopic moment between contacts are analyzed: the raceway control hypothesis, the assumption of equal friction coefficients, and the method based on d'Alembert's principle. It is shown that the choice of assumptions significantly affects the calculation results at high rotational speeds.

Введение

Высокоскоростная обработка предъявляет особые требования к конструкции высокоскоростных шпиндельных узлов (ВШУ). Особое внимание уделяется радиально-упорным шарикоподшипникам (РУШП), поскольку они широко используются в шпинделях современных станков благодаря удачному сочетанию надежности, жесткости и быстроходности. Адекватное математическое описание поведения шарикоподшипника необходимо как на стадии проектирования ВШУ, так и для задач диагностики и управления.

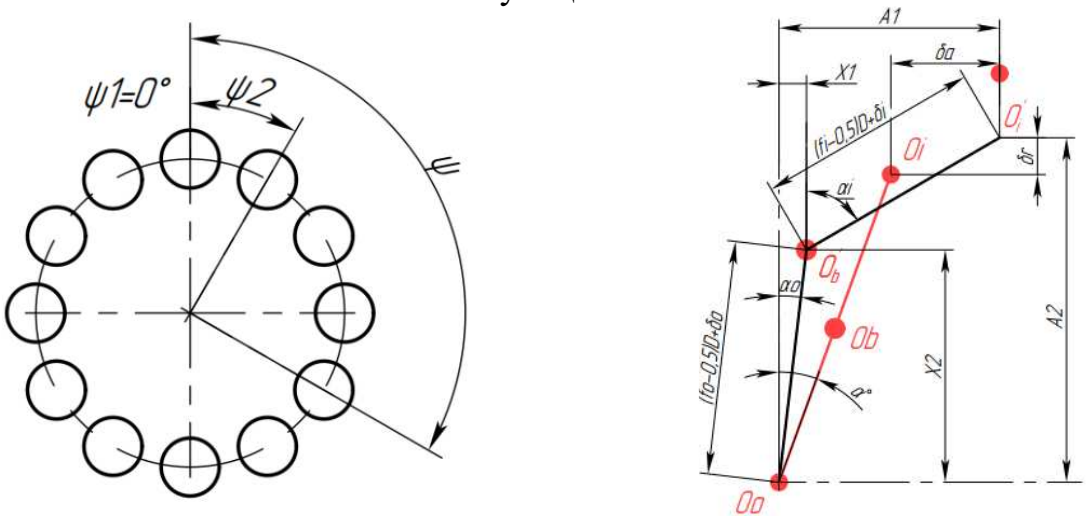
Одним из распространенных способов такого описания служат квазистатические модели. В таких моделях тела качения и кольца рассматриваются

в равновесии, что позволяет рассчитать распределение нагрузки, углы контакта и матрицу жесткости. В установившихся условиях такой подход обеспечивает приемлемую точность [1].

Цель данной работы – сравнить методы построения квазистатических моделей РУШП в современных работах, обобщить используемые подходы и границы их применимости.

Геометрия и деформации колец

Рассматривается подшипник с Z шариками, расположенными равномерно по окружности (рис. 1, а); наружное кольцо неподвижно, внутреннее вращается с угловой скоростью ω. Положение внутреннего кольца задается вектором перемещений $\mathbf{d} = (\delta_x, \delta_y, \delta_z, \theta_y, \theta_z)$, где $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ – линейные перемещения внутреннего кольца вдоль соответствующих осей, θ_y, θ_z – угловые перемещения внутреннего кольца вокруг соответствующих осей; а внешняя нагрузка – вектором $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z, M_y, M_z)$, где F_x, F_y, F_z – внешние силы, действующие на подшипник вдоль соответствующих осей. M_y, M_z – внешние моменты, действующие на подшипник относительно соответствующих осей.



а б

Рис. 1. а) положение шариков в подшипнике; б) позиции центра шарика и центра кривизны дорожек качения

В ненагруженном состоянии угол контакта равен α^0, центры кривизны внутренней O_i, наружной O_o дорожек качения и шарика O_b лежат на одной прямой. Расстояние между центрами кривизны дорожек $BD = (f_i + f_o - 1)D$, где f_i, f_o – коэффициенты кривизны внутренней и наружной дорожек качения соответственно, D – диаметр шарика (рис. 1, б).

При смещении внутреннего кольца под действием внешних сил координаты A_1 и A_2 центра кривизны внутренней дорожки качения O_i' определяются путем сложения начальных координат в ненагруженном состоянии $BD\sin\alpha^0$ и $BD\cos\alpha^0$ с соответствующими осевыми $\delta_a = \delta_x - \theta_z R_i \cos\psi + \theta_y R_i \sin\psi$ и радиальными $\delta_r = \delta_y \cos\psi + \delta_z \sin\psi$ перемещениями:

$$\begin{cases} A_1 = BD\sin\alpha^0 + \delta_x - \theta_z R_i \cos\psi + \theta_y R_i \sin\psi, \\ A_2 = BD\cos\alpha^0 + \delta_y \cos\psi + \delta_z \sin\psi, \end{cases} \quad (1)$$

где ψ – азимутальный угол, определяющий положение шарика в подшипнике; R_i – радиус окружности, на которой лежат центры кривизны дорожки качения внутреннего кольца.

На основе теоремы Пифагора составляется система уравнений, связывающая координаты смещения центра шарика (O_b') X_1 и X_2 с контактными деформациями внутреннего δ_i и наружного δ_o колец (рис. 1, б):

$$\begin{cases} (A_1 - X_1)^2 + (A_2 - X_2)^2 - [(f_i - 0{,}5)D + \delta_i]^2 = 0, \\ X_1^2 + X_2^2 - [(f_o - 0{,}5)D + \delta_o]^2 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Углы контакта на внутреннем α_i и наружном α_o кольцах после приложения нагрузки выражаются из тех же величин:

$$\begin{cases} \sin\alpha_i = \dfrac{A_1 - X_1}{(f_i - 0{,}5)D + \delta_i}, \\ \cos\alpha_i = \dfrac{A_2 - X_2}{(f_i - 0{,}5)D + \delta_i}, \\ \sin\alpha_o = \dfrac{X_1}{(f_o - 0{,}5)D + \delta_o}, \\ \cos\alpha_o = \dfrac{X_2}{(f_o - 0{,}5)D + \delta_o}. \end{cases} \quad (3)$$

Данные геометрические соотношения составляют основу квазистатической модели подшипника с пятью степенями свободы [2, 3].

Следует отметить, что в большинстве традиционных моделей кольца подшипника рассматриваются как абсолютно жесткие тела. В работе [4] геометрическое уравнение (2) дополняется радиальными деформациями колец, вызванными влиянием центробежных сил, нагрева и натяга посадки на вал. Эти факторы влияют на начальный зазор и значение A_2, поэтому при высоких скоростях их учет позволяет более точно рассчитывать углы контакта.

Кинематика шарика

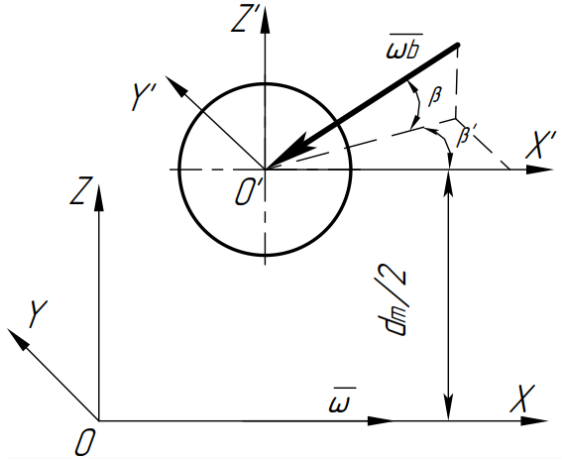


Рис. 2. Результирующий вектор угловой скорости шарика: *XYZ* – система координат подшипника, где ось *X* совпадает с осью вращения внутреннего кольца; *X'Y'Z'* – система координат шарика; d_m – диаметр делительной окружности подшипника

Кинематика шарика носит сложный характер и включает одновременное вращение вокруг оси подшипника с орбитальной угловой скоростью ω_c и верчение

вокруг собственной оси с угловой скоростью ω_b. Направление оси вращения задается углом наклона β в плоскости $X'Z'$ относительно оси вращения внутреннего кольца (рис. 2), углом β´ в плоскости $X'Y'$ под действием гироскопического момента пренебрегают ввиду его малости [5].

Центробежная сила F_c и гироскопический момент M_g для каждого шарика вычисляются по соотношениям:

$$F_c = \frac{d_m}{2} m\omega_c^2,$$

$$M_g = J\omega_b\omega_c \sin\beta,$$

где $m = \frac{1}{6}\rho\pi D^3$ – масса шарика; $J = \frac{1}{10}mD^2$ – момент инерции шарика; ρ – плотность шарика.

Из допущения, что проскальзывание шарика по дорожкам равно нулю в зоне контакта [5, 6], выводятся зависимости для нахождения составляющих скоростей шарика ω_c и ω_b:

$$\omega_c = \omega \frac{(d_m - D\cos\alpha_i)\cos(\alpha_o - \beta)}{d_m\big(\cos(\alpha_i - \beta) + \cos(\alpha_o - \beta)\big) + D\sin(\alpha_i - \alpha_o)\sin\beta},$$

$$\omega_b = \omega_c \frac{d_m + D\cos\alpha_o}{D\cos(\alpha_o - \beta)}.$$

Для полного определения кинематической модели необходимо знать выражение для угла β. Для вычисления этого угла вводятся дополнительные допущения. В литературе используется несколько подходов.

Одним из наиболее простых методов является эмпирическое соотношение, в котором угол β принимается равным полусумме углов контакта $\beta = \frac{\alpha_i + \alpha_o}{2}$ [7]. Такой метод наименее трудоемок, однако является чрезмерно приближенным, так как не учитывает реальное перераспределение сил и моментов трения в контактах.

Наиболее распространенным подходом является гипотеза о ведущей дорожке. Предполагается, что из-за преобладания контактной силы на одной из дорожек качения шарик катится без проскальзывания; такая дорожка называется ведущей. Выбор ведущей дорожки осуществляется путем сравнения моментов сил трения на наружном M_{so} и внутреннем M_{si} контактах по теории Герца [5, 8]. Для расчета значений моментов трения нужны коэффициенты трения и параметры площадок контакта, то есть критерий выбора зависит от величин, определяемых в ходе расчета. Критерии выбора и выражения для определения tgβ представлены в таблице 1.

Табл. 1. Критерий выбора ведущей дорожки

Ведущая дорожка	Наружная	Внутренняя
tgβ	$\frac{\sin\alpha_o}{\cos\alpha_o + \frac{D}{d_m}}$	$\frac{\sin\alpha_i}{\cos\alpha_i - \frac{D}{d_m}}$
Критерий выбора	$M_{so} > M_{si}$	$M_{so} < M_{si}$

Несмотря на то, что гипотезу о ведущей дорожке часто используют в современных исследованиях, она имеет ряд ограничений: умозрительное допущение об отсутствии верчения на одном из колец не всегда согласуется с реальными условиями контакта; гипотеза не описывает зависимость для угла β в переходных областях при $M_{si} \approx M_{so}$ [8, 9]; необходимость проверки критерия выбора дорожки после всех расчетов.

В ряде работ угол β определяется из баланса моментов трения по принципу Даламбера: сумма моментов сил, действующих на движущееся тело, включая гироскопический момент и моменты трения, принимается равной нулю. В итоге получается следующее выражение [2, 3,10]:

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{C(S+1)\sin\alpha_i + 2\sin\alpha_o}{C(S+1)\cos\alpha_i + 2(\cos\alpha_o + D/d_m) + A},$$

где $C = \frac{M_{si}}{M_{so}}$ – отношение моментов сил трения в контактах; A и S – геометрические параметры.

Метод учитывает одновременное верчение шарика в обоих контактах и имеет непрерывный расчет угла наклона β, но требует знания коэффициентов трения для вычисления отношения C.

Выбор метода расчета угла наклона β существенно влияет на результат. По данным [4], на высоких скоростях различие значений M_g для гипотезы ведущей дорожки и теории, основанной на принципе Даламбера, может достигать 30%.

Уравнения равновесия шарика

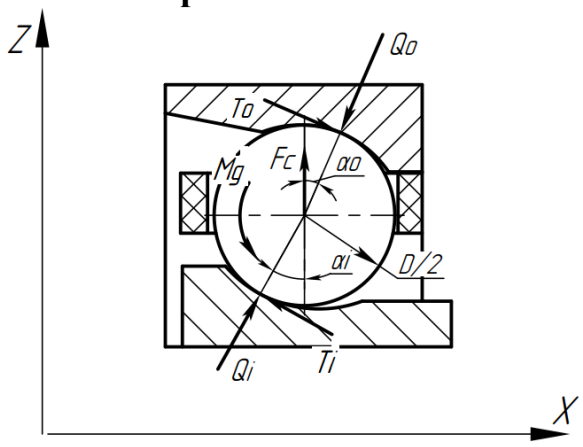


Рис. 3. Силы, приложенные к шарику и кольцам

При высокоскоростных режимах на шарик действуют нормальные контактные силы Q_i, Q_o, касательные силы трения T_i, T_o, центробежная сила F_c и гироскопический момент M_g (рис. 3). Уравнения равновесия шарика в проекциях на оси X и Z выглядят следующим образом [2, 5]:

$$\begin{cases} Q_i\sin\alpha_i - T_i\cos\alpha_i - Q_o\sin\alpha_o + T_o\cos\alpha_o = 0, \\ Q_i\cos\alpha_i + T_i\sin\alpha_i - Q_o\cos\alpha_o - T_o\sin\alpha_o + F_c = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Нормальные контактные силы вычисляются по теории Герца через контактные деформации δ_i и δ_o: $Q_i = K_i\delta_i^{3/2}$, $Q_o = K_o\delta_o^{3/2}$, где K_i, K_o – коэффициенты жесткости упругого контакта Герца с внутренней и наружной дорожками качения соответственно.

Гироскопический момент M_g каждого шарика уравновешивается силами трения в контактах с внутренним и наружным кольцами:

$$T_o \frac{D}{2} + T_i \frac{D}{2} = M_g. \quad (5)$$

Силы трения в контактах выражаются через нормальные контактные силы: $T_o = \mu_o Q_o$, $T_i = \mu_i Q_i$, где μ_o, μ_i – коэффициенты трения в наружном и внутреннем контактах соответственно.

Ввиду статической неопределенности уравнения (5) в литературе используется несколько подходов к распределению гироскопического момента M_g между контактами. Эта задача связана с определением угла β, так как распределение гироскопического момента M_g связано с гипотезой, которая была выбрана при расчете угла наклона оси вращения шарика β.

Используя гипотезу о ведущей дорожке, ряд авторов допускает, что гироскопический момент уравновешивается только силой трения в контакте с ведущей дорожкой. Как уже говорилось выше, такие модели имеют существенные недостатки. Игнорирование влияния контактной силы со стороны противоположного кольца приводит к существенной погрешности [2, 4].

Ряд авторов принимает допущение равных коэффициентов трения в контакте шарика с внутренней и наружной дорожками качения $\mu_i = \mu_o = \mu$ [8-11]. В этом случае касательные силы трения распределяются пропорционально контактным нагрузкам $\frac{T_i}{T_o} = \frac{Q_i}{Q_o}$. В рамках квазистатической модели эта гипотеза позволяет учесть сопротивление обоих контактов. В работах [8, 10] отмечается, что данный метод имеет более высокую точность по сравнению с гипотезой о ведущей дорожке, но степень его обоснованности для конкретных условий смазки требует экспериментальной проверки.

Равновесие внутреннего кольца

Внешние силы, действующие на внутреннее кольцо подшипника, уравновешиваются суммой реакций всех тел качения. Система в общем случае имеет 5 нелинейных уравнений равновесия внутреннего кольца [2, 5]:

$$\begin{cases} F_x = \sum_{k=1}^{Z} (Q_{ik}\sin\alpha_{ik} - T_{ik}\cos\alpha_{ik}), \\ F_y = \sum_{k=1}^{Z} (Q_{ik}\cos\alpha_{ik} + T_{ik}\sin\alpha_{ik})\cos\psi_k, \\ F_z = \sum_{k=1}^{Z} (Q_{ik}\cos\alpha_{ik} + T_{ik}\sin\alpha_{ik})\sin\psi_k, \\ M_y = \sum_{k=1}^{Z} [R_i(Q_{ik}\sin\alpha_{ik} - T_{ik}\cos\alpha_{ik}) + T_i r_i]\sin\psi_k, \\ M_z = \sum_{k=1}^{Z} [-R_i(Q_{ik}\sin\alpha_{ik} - T_{ik}\cos\alpha_{ik}) - T_i r_i]\cos\psi_k, \end{cases} \quad (6)$$

где $k = 1 \ldots Z$ – номер шарика.

Поскольку контактные силы $Q_{i,o}$ и углы контакта $\alpha_{i,o}$ нелинейно зависят от неизвестных контактных деформаций $\delta_{i,o}$ и вектора перемещений **d**, система уравнений не имеет прямого аналитического решения. Для решения выполняется итерационный расчет на двух уровнях.

На локальном уровне при фиксированном векторе **d** решается система геометрических уравнений (2) и система уравнений равновесия шарика (4) для нахождения значений $X1$, $X2$, δ_i, δ_o, Q_i, Q_o, T_i и T_o. Это решение выполняется последовательно для каждого шарика. После этого вычисляются углы контакта из геометрических выражений (2).

На глобальном уровне решается система уравнений равновесия внутреннего кольца (6). Здесь могут выполняться два типа решения: нахождение сил **F** по известным перемещениям **d** либо обратное решение по получению вектора перемещений **d**. В первом случае силы вычисляются непосредственным суммированием реакций шариков по (6), итерация требуется только на локальном уровне; во втором случае система (6) решается итерационно относительно вектора перемещений **d**.

Для итерационного расчета обычно используют метод Ньютона–Рафсона. Однако этот метод при высоких скоростях чувствителен к начальному приближению, поэтому для первой итерации используют результаты, вычисленные для случая чисто осевого нагружения, решение которого можно выполнить аналитически [1].

Матрица жесткости

Для модели РУШП с 5 степенями свободы матрица жесткости **K** имеет размерность 5×5. Это матрица, построенная из частных производных усилий по смещениям $\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{d}}$. Матрица содержит как главные диагональные элементы, показывающие осевую, радиальные и угловые жесткости, так и внедиагональные коэффициенты, отражающие связь между поступательными перемещениями и перекосами колец.

В литературе выделилось несколько основных методов расчета элементов матрицы. Простейшим способом является метод конечных разностей, так как он не требует аналитических уравнений, но для его реализации необходимы достаточно большие вычислительные ресурсы, а результаты зависят от выбора шага разности [8].

Аналитический метод вычисления матрицы жесткости основан на прямом дифференцировании **F** по перемещениям **d**. Вектор **F** выражается суммой локальных сил через уравнения (6). Таким образом, для выражения жесткости рассматриваются переменные A_1 и A_2, которые явно зависят от **d** из выражения (1), а также переменные $\mathbf{u} = (X_1, X_2, \delta_i, \delta_o, F_c, M_g)$, которые зависят неявно. Элементы матрицы жесткости K_{ij} $(i, j = 1 \ldots 5)$ находятся по правилам дифференцирования сложной функции:

$$K_{ij} = \frac{\partial \mathbf{F_i}}{\partial \mathbf{d_j}} = \frac{\partial \mathbf{F_i}}{\partial \mathbf{A_1}} \frac{\partial \mathbf{A_1}}{\partial \mathbf{d_j}} + \frac{\partial \mathbf{F_i}}{\partial \mathbf{A_2}} \frac{\partial \mathbf{A_2}}{\partial \mathbf{d_j}} + \sum_k \frac{\partial \mathbf{F_i}}{\partial \mathbf{u_k}} \frac{\partial \mathbf{u_k}}{\partial \mathbf{d_j}}.$$

При вычислении членов матрицы жесткости получаются сложные аналитические выражения, поэтому в ранних моделях [12] пренебрегали производными F_c и M_g по локальным переменным $X_1, X_2, \delta_i, \delta_o$, что значительно упрощало расчет. В [4] было показано, что при учете этих элементов точность матрицы жесткости повышается на 4-6% на высоких скоростях вращения.

Аналитический подход исключает погрешности аппроксимации и сокращает время расчета по сравнению с численным методом, но вывод производных существенно сложнее.

После расчета матрица жесткости может использоваться для интегрирования в глобальные модели ВШУ для описания динамического поведения всей системы.

Рассмотренные модели нужны для расчета нагрузок, углов контакта и жесткости подшипника при проектировании шпиндельного узла и построении его динамической модели. Однако для практического использования они мало подходят: расчет требует двухуровневого итерационного решения, чувствительного к начальному приближению, результат зависит от допущений о кинематике шарика и о трении, не имеющих надежного обоснования, а вывод производных для матрицы жесткости громоздок. Поэтому на базе этих моделей необходимо строить более простые модели, пригодные для инженерных расчетов при проектировании ВШУ.

Заключение

В данной работе проведен сравнительный анализ теории и методов реализации квазистатических моделей высокоскоростных РУШП. Показано, что все рассмотренные работы опираются на общую основу: геометрические уравнения, контактная теория Герца, уравнения равновесия шарика и внутреннего кольца. Различия между моделями проявляются в следующих аспектах: учете деформации колец; способе определения угла наклона оси вращения шарика β; способе распределения гироскопического момента между контактами и способе вычисления матрицы жесткости подшипника. От выбора допущений заметно зависят результаты расчета, особенно на высоких скоростях.

Квазистатические модели РУШП применяются для расчета углов контакта, нагрузок и жесткости подшипника. Они не учитывают динамику сепаратора, колебания шариков и колец, физику смазочного слоя и переходные режимы. Главным ограничением рассмотренных моделей является сложность их инженерного применения, поэтому на их базе целесообразно строить более простые модели, пригодные для использования при проектировании шпиндельных узлов.

Список литературы

1. Antoine J.-F., Abba G., Molinari A. A new proposal for explicit angle calculation in angular contact ball bearing // Journal of Mechanical Design. 2005, vol. 128, no. 2, pp. 468-478. doi.org/10.1115/1.2168467.
2. Wang W., Hu L., Zhang S., Zhao Z., Ai S. Modeling angular contact ball bearing without raceway control hypothesis // Mechanism and Machine Theory. 2014, vol. 82, pp. 154-172. doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2014.08.006.
3. Zhang J., Fang B., Zhu Y., Hong J. A comparative study and stiffness analysis of angular contact ball bearings under different preload mechanisms // Mechanism and Machine Theory. 2017, vol. 115, pp. 1-17. doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2017.03.012.

4. Noel D. Modélisation et identification du comportement dynamique des broches UGV à montages de roulements préchargés: Thèse de doctorat. – Nantes, 2013. – 236 p.
5. Harris T.A. Rolling bearing analysis. – 3rd ed. – New York: John Wiley & Sons, 1991. – 1013 p.
6. Alberdi P., Arana A., Oyanguren A., Larrañaga J., Ulacia I. Influence of ball bearing contact angle on interface kinematics, load, and sliding power losses // Mechanism and Machine Theory. 2026, vol. 222. doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2026.106396.
7. Foord C.A. High-speed ball bearing analysis // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering. 2006, vol. 220, no. 5, pp. 537-544. doi.org/10.1243/09544100G01805.
8. Noel D., Ritou M., Furet B., Le Loch S. Complete analytical expression of the stiffness matrix of angular contact ball bearings // Journal of Tribology. 2013, vol. 135, no. 4. doi.org/10.1115/1.4024109.
9. Zhao C., Yu X., Huang Q., Ge S., Gao X. Analysis on the load characteristics and coefficient of friction of angular contact ball bearing at high speed // Tribology International. 2015, vol. 87, pp. 50-56. doi.org/10.1016/j.triboint.2015.02.012.
10. Fang B., Zhang J., Yan K., Hong J., Wang M.Y. A comprehensive study on the speed-varying stiffness of ball bearing under different load conditions // Mechanism and Machine Theory. 2019, vol. 136, pp. 1-13. doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2019.02.012.
11. Jiang Y., Zhu T., Deng S. Combined analysis of stiffness and fatigue life of deep groove ball bearings under interference fits, preloads and tilting moments // Journal of Mechanical Science and Technology. 2023, vol. 37, pp. 539-553. doi.org/10.1007/s12206-023-0101-x.
12. Cao Y., Altintas Y. Modeling of spindle-bearing and machine tool systems for virtual simulation of milling operations // International Journal of Machine Tools and Manufacture. 2007, vol. 47, no. 9, pp. 1342-1350. doi.org/10.1016/j.ijmachtools.2006.08.006.

Сведения об авторах:
Максимов Александр Владимирович – аспирант;
Молодцов Владимир Владимирович – д.т.н., доцент, заведующий кафедрой станков.