УДК 621.865.8:531.3 https://doi.org/10.26160/2542-0127-2026-18-46-50

ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ДВУХЗВЕННОГО МАНИПУЛЯТОРА ПРИ ПЕРЕМЕННОЙ ПОЛЕЗНОЙ НАГРУЗКЕ

Волков Е.Б., Ситдикова С.В., Кочнева Л.В., Гильфанов Т.З.
Уральский государственный горный университет, Екатеринбург

Ключевые слова: мехатроника, робототехника, манипулятор, динамика, уравнения Лагранжа, полезная нагрузка, движущий момент, редуктор, выбор двигателя.
Аннотация. Рассмотрены особенности динамического расчета двухзвенного плоского манипулятора с вращательными сочленениями при переменной полезной нагрузке. Методом Лагранжа получены уравнения движения. Выполнено численное моделирование при гармонических законах изменения углов сочленений. Проанализировано влияние массы полезной нагрузки на требуемые движущие моменты. Получены линейные зависимости моментов от массы груза. Показано, что определяющими являются гравитационные составляющие. Сформулированы рекомендации по выбору двигателей и редукторов. Результаты могут быть использованы при проектировании мехатронных и робототехнических систем.

FEATURES OF DYNAMIC CALCULATION OF A TWO-LINK MANIPULATOR WITH VARIABLE PAYLOAD

Volkov E.B., Sitdikova S.V., Kochneva L.V., Gilfanov T.Z.
Ural State Mining University, Yekaterinburg

Keywords: mechatronics, robotics, manipulator, dynamics, Lagrange equations, payload, driving torque, reducer, motor selection.
Abstract. The paper considers features of dynamic calculation of a two-link planar manipulator with rotational joints under variable payload. The Lagrange method is used to derive equations of motion. Numerical simulation for harmonic laws of joint angles is performed. The influence of payload mass on required driving torques is analyzed. Linear dependencies of torques on payload mass are obtained. It is shown that gravitational components are dominant. Recommendations for motor and reducer selection are formulated. The results can be used in design of mechatronic and robotic systems.

Введение. Динамический расчет манипулятора является обязательным этапом проектирования мехатронного модуля. Он позволяет обоснованно выбрать двигатели, редукторы и систему управления, а также оценить нагрузки в сочленениях. В отличие от кинематики, динамика отвечает на вопрос, какими силами и моментами обеспечивается заданное движение. Особую актуальность имеет учет переменной полезной нагрузки, поскольку при захвате объектов различной массы динамические свойства манипулятора существенно изменяются.

Постановка задачи. Рассмотрим плоский двухзвенный манипулятор с вращательными сочленениями (рис. 1). Исходные параметры: длины звеньев $l_1 = 0{,}4$ м, $l_2 = 0{,}3$ м; массы звеньев $m_1 = 5$ кг, $m_2 = 3$ кг; расстояния до центров масс $r_1 = 0{,}2$ м, $r_2 = 0{,}15$ м; ускорение свободного падения $g = 9{,}81$ м/с^2. Полезная нагрузка $m_г$ принимает значения 0, 1 и 2 кг. Законы движения сочленений заданы в виде:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{6}\sin(0{,}5t),\ \theta_2 = \frac{\pi}{4}\sin(0{,}5t), \qquad (1)$$

где θ_1, θ_2 – углы поворота первого и второго сочленений соответственно, рад; t – время, с.

Кинематические соотношения. Положения центров масс звеньев и схвата определяются выражениями (рис. 1):

$$x_{c1} = r_1 \cos\theta_1,\ y_{c1} = r_1 \sin\theta_1,$$
$$x_{c2} = l_1 \cos\theta_1 + r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2);\ y_{c2} = l_1 \sin\theta_1 + r_2 \sin(\theta_1 + \theta_2),$$
$$x_r = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2);\ y_r = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2),$$

где x_{c1}, y_{c1} – координаты центра масс первого звена, м; x_{c2}, y_{c2} – координаты центра масс второго звена, м; x_r, y_r – координаты схвата, м.

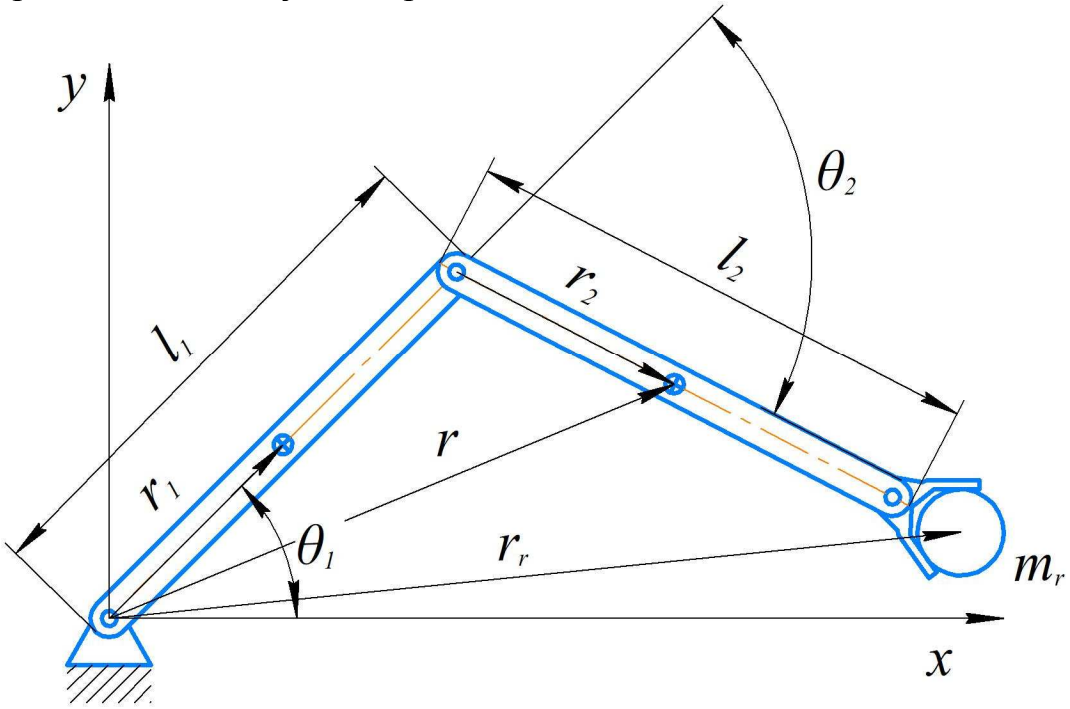


Рис. 1. Расчетная схема плоского двухзвенного манипулятора

Дифференцирование по времени и суммирование квадратов скоростей дает:

$$\dot{x}_{c1}^2 + \dot{y}_{c1}^2 = r_1^2 \dot{\theta}_1^2,$$
$$\dot{x}_{c2}^2 + \dot{y}_{c2}^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + r_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2 l_1 r_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos\theta_2,$$

где $\dot{x}_{c1}, \dot{y}_{c1}$ – проекции скорости центра масс первого звена, м/с; $\dot{x}_{c2}, \dot{y}_{c2}$ – проекции скорости центра масс второго звена, м/с; $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ – угловые скорости сочленений, рад/с.

Кинетическая энергия. Кинетическая энергия системы складывается из энергий звеньев и полезной нагрузки:

$$T = T_1 + T_2 + T_r, \qquad (2)$$

где T – полная кинетическая энергия системы, Дж; T_1, T_2, T_r – кинетические энергии первого звена, второго звена и полезной нагрузки соответственно, Дж.

С учетом моментов инерции $J_1 = \frac{1}{12} m_1 l_1^2$, $J_2 = \frac{1}{12} m_2 l_2^2$, где J_1, J_2 – моменты инерции звеньев относительно их центров масс, кг·м^2:

$$T_1 = \frac{1}{2}(m_1 r_1^2 + J_1)\dot{\theta}_1^2,$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \left[l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + r_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2 l_1 r_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos\theta_2 \right] + \frac{1}{2} J_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2,$$

$$T_r = \frac{1}{2} m_r \left[l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos\theta_2 \right].$$

После подстановки численных значений в (2) получаем:

$$T = (0,41835 + 0,18\cos\theta_2)\dot{\theta}_1^2 + \\ +(0,09 + 0,18\cos\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + 0,045\dot{\theta}_2^2 \quad (3)$$

Потенциальная энергия. Нулевой уровень принят на высоте оси O_1:

$$\Pi = m_1 g y_{c1} + m_2 g y_{c2} + m_r g y_r, \quad (4)$$

где П – потенциальная энергия системы, Дж. После подстановки координат выражение (4) принимает вид:

$$\Pi = 21,582\sin\theta_1 + 4,4145\sin(\theta_1 + \theta_2) + \\ +m_r 9,81\left[0,4\sin\theta_1 + 0,3\sin(\theta_1 + \theta_2)\right]. \quad (5)$$

Уравнения Лагранжа. Функция Лагранжа $L = T - \Pi$, где L – функция Лагранжа, Дж. Уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = \tau_i, \; i = 1,2. \quad (6)$$

где τ_1, τ_2 – обобщенные движущие моменты в первом и втором сочленениях, Н·м. Введем элементы матрицы инерции:

$$M_{11} = 0,8367 + 0,36\cos\theta_2, \; M_{12} = 0,09 + 0,18\cos\theta_2, \quad (7)$$

где M_{11}, M_{12} – элементы матрицы инерции системы, кг·м^2.

Подставляя (3), (5) в (6) и выполняя дифференцирование, получаем уравнения движения:

$$\tau_1 = M_{11}\ddot{\theta}_1 + M_{12}\ddot{\theta}_2 - 0,18(2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2)\sin\theta_2 + \\ +21,582\cos\theta_1 + 4,4145\cos(\theta_1 + \theta_2), \quad (8)$$

$$\tau_2 = M_{12}\ddot{\theta}_1 + 0,09\ddot{\theta}_2 + 0,18\dot{\theta}_1^2\sin\theta_2 + 4,4145\cos(\theta_1 + \theta_2). \quad (9)$$

где $\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2$ – угловые ускорения сочленений, рад/с^2.

Учет полезной нагрузки. При добавлении нагрузки m_r элементы матрицы инерции и гравитационные моменты получают приращения:

$$\Delta M_{11} = m_r(l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2\cos\theta_2) = m_r(0,25 + 0,24\cos\theta_2), \quad (10)$$

$$\Delta M_{12} = m_r(l_2^2 + l_1 l_2\cos\theta_2) = m_r(0,09 + 0,12\cos\theta_2), \quad (11)$$

$$\Delta M_{22} = m_r l_2^2 = 0,09 m_r, \quad (12)$$

$$\Delta G_1 = m_r g\left[l_1\cos\theta_1 + l_2\cos(\theta_1 + \theta_2)\right] = \\ = 9,81 m_r\left[0,4\cos\theta_1 + 0,3\cos(\theta_1 + \theta_2)\right], \quad (13)$$

$$\Delta G_2 = m_r g l_2\cos(\theta_1 + \theta_2) = 2,943 m_r\cos(\theta_1 + \theta_2), \quad (14)$$

где ΔM_{11}, ΔM_{12}, ΔM_{22} – приращения элементов матрицы инерции, кг·м^2; ΔG_1, ΔG_2 – приращения гравитационных моментов, Н·м.

С учетом (10)-(14) полные элементы матрицы инерции принимают вид:

$$M_{11} = 0,8367 + 0,36\cos\theta_2 + m_r(0,25 + 0,24\cos\theta_2), \quad (15)$$

$$M_{12} = 0,09 + 0,18\cos\theta_2 + m_r(0,09 + 0,12\cos\theta_2), \quad (16)$$

$$M_{22} = 0,09(1 + m_r). \quad (17)$$

Численный расчет. Подставляя t = 1 с в (1), получаем:

$$\theta_1 = 0,251 \text{ рад}, \ \theta_2 = 0,376 \text{ рад}, \ \dot{\theta}_1 = 0,23 \text{ рад/с}, \ \dot{\theta}_2 = 0,345 \text{ рад/с},$$

$$\ddot{\theta}_1 = -0,0628 \text{ рад/с}^2, \ \ddot{\theta}_2 = -0,0942 \text{ рад/с}^2,$$

$$\cos\theta_1 = 0,969, \cos\theta_2 = 0,93, \ \sin\theta_2 = 0,368, \ \cos(\theta_1 + \theta_2) = 0,811. \quad (18)$$

Далее подставим (18) в (15)-(17), получим:

$$M_{11} = 1,1715 + 0,4732m_r, \ M_{12} = 0,2574 + 0,2016m_r,$$

$$M_{22} = 0,09(1 + m_r). \quad (19)$$

Аналогично для дополнительных слагаемых (13), (14): $\Delta G_1 = 6,188m_r$, $\Delta G_2 = 2,386m_r$.

Подставляя (18), (19) в (8), (9), получаем линейные зависимости моментов от массы полезной нагрузки:

$$\begin{cases} \tau_1 = 24,38 + 6,14m_r, \\ \tau_2 = 3,56 + 2,37m_r. \end{cases} \quad (20)$$

Эта система позволяет быстро оценить требуемые моменты для любой массы полезной нагрузки, исследуемого в нашем примере манипулятора ($0 \le m_r \le 2$ кг.).

Для первого сочленения: при $m_r = 0$, $\tau_1 = 24,38$ Н·м; при $m_r = 1$ кг, $\tau_1 = 30,52$ Н·м; при $m_r = 2$ кг $\tau_1 = 36,67$ Н·м. Каждый килограмм нагрузки увеличивает момент в первом сочленении на 6,14 Н·м, во втором – на 2,37 Н·м.

Анализ полученных зависимостей. Зависимости (20) показывают, что в рассмотренном режиме движения ($\omega = 0,5$ рад/с) определяющими являются статические (гравитационные) составляющие. Динамическая составляющая при пуске не превышает 4-5% от статического момента и не оказывает решающего влияния на выбор двигателя. Наиболее нагруженным является первое сочленение: при $m_r = 2$ кг требуемый момент достигает 36,67 Н·м, что более чем в 3,5 раза превышает момент во втором сочленении. Найденные зависимости являются основой для выбора двигателей и редукторов. По ним определяются требуемая мощность привода, момент на валу двигателя с учетом передаточного числа и КПД редуктора, а также выполняется проверка по пиковому моменту и нагреву.

Выводы. 1. Метод Лагранжа позволяет получить компактные аналитические зависимости движущих моментов от массы полезной нагрузки, удобные для инженерных расчетов. 2. Увеличение массы груза приводит к линейному росту требуемых моментов, что необходимо учитывать при проектировании привода и системы управления. 3. Для тихоходных режимов движения определяющими являются гравитационные нагрузки; при повышении быстродействия возрастает роль Кориолисовых и центробежных составляющих, поэтому для быстроходных манипуляторов необходим полный динамический расчет. 4. Полученные зависимости (20), являются исходными данными для выбора двигателей и редукторов мехатронного модуля движения.

Дальнейшим развитием работы является синтез системы управления с компенсацией динамических возмущений и анализ влияния переменной нагрузки на устойчивость и точность отработки траекторий.

Список литературы

1. Волков Е.Б. Основы мехатроники и робототехники: учебное пособие. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2026. – 275 с.
2. Лесков А.Г., Бажинова К.В., Селиверстова Е.В. Кинематика и динамика исполнительных механизмов манипуляционных роботов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. – 102 с.
3. Захаров Д.Н., Куровский Д.М., Ракшин Е.А., Борисов О.И., Громов В.С., Колюбин С.А. Моделирование и управление движением роботов: учебно-методическое пособие. – СПб.: Университет ИТМО, 2023. – 84 с.
4. Siciliano B., Sciavicco L., Villani L., Oriolo G. Robotics: Modelling, Planning and Control. – Springer, 2009.
5. Corke P. Robotics, Vision and Control. – Springer, 2017.

Сведения об авторах:

Волков Евгений Борисович – к.т.н., доцент, заведующий кафедрой технической механики;

Ситдикова Светлана Валерьевна – старший преподаватель кафедры автоматики и компьютерных технологий;

Кочнева Людмила Викторовна – старший преподаватель кафедры безопасности горного производства;

Гильфанов Тимур Зафарджонович – студент.