УДК 621.8 https://doi.org/10.26160/2542-0127-2026-18-33-41

УГЛОВАЯ КИНЕМАТИКА БЕГУЩЕГО ВДОЛЬ УЛИТКИ ПАСКАЛЯ РЕЗЦА МЕХАНИЗМА ПРИ РАВНОМЕРНОМ ВРАЩЕНИИ ЕГО ПРИВОДА

Дубинов А.Е.

Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики, Саров;
Саровский физико-технический институт – филиал Национального исследовательского ядерного университета – Московский инженерно-физический институт, Саров

Ключевые слова: улитка Паскаля, вращение, режущий механизм, угловая скорость, угловое ускорение, угловой рывок.

Аннотация. Рассмотрено плоское движение режущего планетарного механизма, резец которого бежит вдоль улитки Паскаля. Было задано, что ведущее звено механизма вращается равномерно. Выведен угловой закон движения резца относительно центра кривой. Угловой закон движения резца представлен в виде гладкой функции от времени. Для его вывода применен метод компенсирующих добавок, устраняющих разрывы 1-го рода. Были вычислены угловые кинематические характеристики движения резца такие, как угловая скорость, угловое ускорение и угловой рывок, которые несмотря на равномерное вращение привода, оказались ненулевыми и ведут себя во времени нетривиальным образом – имеют форму периодической последовательности коротких импульсов с осцилляциями. В итоге показано, что механизм для вырезания улитки Паскаля, является механическим трансформатором, преобразующим равномерное вращение ведущего звена в импульсно-периодическое угловое движение резца с угловыми ускорениями и рывками.

ANGULAR KINEMATICS OF A MECHANISM'S CUTTING TOOL MOVING ALONG A LIMAÇON OF PASCAL DURING UNIFORM ROTATION OF ITS DRIVER

Dubinov A.E.

Russian Federal Nuclear Center – All-Russia Scientific and Research Institute of Experimental Physics, Sarov;
Sarov Institute of Physics and Technology – Branch of National Research Nuclear University “Moscow Engineering Physics Institute”, Sarov

Keywords: limaçon of Pascal, rotation, cutting mechanism, angular velocity, angular acceleration, angular jerk.

Abstract. The planar motion of a planetary cutting mechanism is analyzed, wherein the cutter moves along the path of a Limaçon of Pascal. The driving link of the mechanism is assumed to rotate at a constant angle speed. An angular motion law for the cutter relative to the curve's center is derived and expressed as a smooth function of time. The derivation employs the method of compensating terms to eliminate first-kind discontinuities. Angular kinematic characteristics specifically angular velocity, angular acceleration, and angular jerk are calculated; despite the driver uniform rotation, these values prove to be non-zero and exhibit non-trivial temporal behavior, manifesting as a periodic sequence of short pulses accompanied by oscillations. Ultimately, the mechanism designed to cut the Limaçon of Pascal is shown to function as a mechanical transformer that converts the uniform rotation of the driving link into a periodic, pulsed angular motion of the cutter characterized by angular acceleration and jerk.

Введение. Улитка Паскаля (Limaçon of Pascal) – замкнутая плоская линия, обладающая уникальными свойствами. Она названа в честь Этьена Паскаля (1588-1651), отца знаменитого физика и математика Блеза Паскаля, который детально исследовал свойства этой кривой. Следует также отметить, что знаменитый немецкий ученый и художник эпохи Возрождения Альбрехт Дюрер в 1525, т.е. более, чем за 60 лет до рождения Э. Паскаля, опубликовал трактат [1], в котором изложил описание способа построения и представил изображение кривой с петлей (рис. 1) [1, 2]. По это причине иногда кривую называют также улиткой Дюрера-Паскаля (Dürer-Pascal Limaçons) [3].

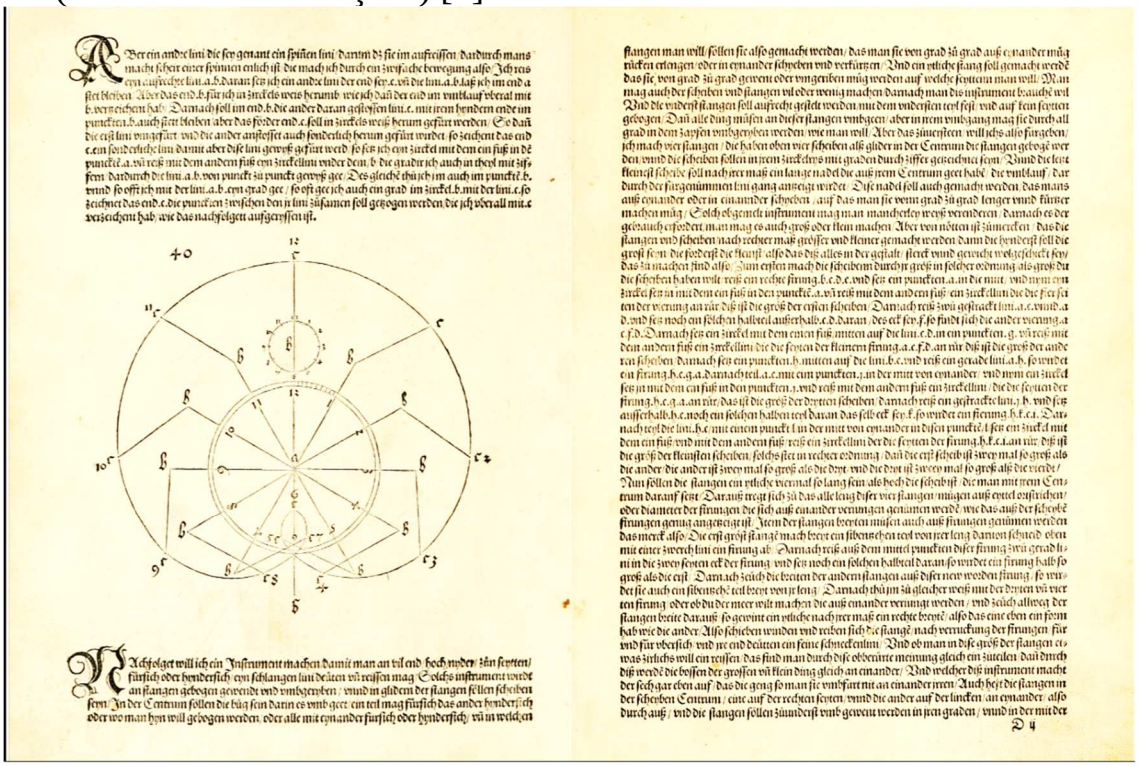


Рис. 1. Фрагмент трактата А. Дюрера [1] (с. 41), показывающий способ построения улитки Паскаля по точкам через 30°

Улитка Паскаля представляет собой частный случай удлиненной эпициклоиды с соотношением радиусов неподвижной и катящейся по ней окружностями 1:1. Она является бициркулярной рациональной кривой 4-го порядка с одной осью симметрии. Для некоторого интервала значений параметра удлинения l кривая может иметь точку самопересечения и петлю. Математические свойства улитки Паскаля даются в [4,5].

Каноническое уравнение улитки Паскаля в декартовых координатах имеет вид

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = l^2(x^2 + y^2), \qquad (1)$$

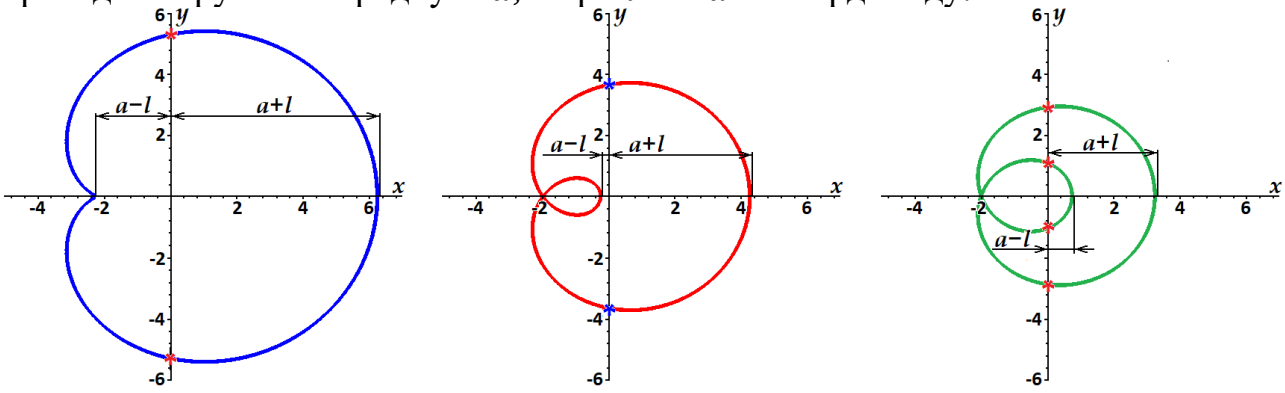
где a – радиусы неподвижной и катящейся окружностей, l – удлинение.

В полярных координатах уравнение кривой (1) запишется, как

$$\rho = 2a\cos\varphi + l. \qquad (2)$$

На рисунке 2 показаны три варианта графиков кривой (1) для выбранных наборов параметров: $a = 2$ см, $l = 4.25$ см (I); $a = 2$ см, $l = 2.25$ см (II); $a = 2$ см, $l = 1.25$ см (III). График не имеет петли, если $l > 2a$ (рис. 2, а), имеет петлю, целиком лежащую в отрицательной полуплоскости $x < 0$, если $a < l < 2a$ (рис.

2, б), и при $l < a$ график имеет петлю, которая заходит в положительную полуплоскость $x > 0$ (рис. 2, в). При отсутствии удлинения ($l = 0$) улитка Паскаля переходит окружность радиуса a, а при $l = 2a$ – в кардиоиду.



а б в

Рис. 2. Графики улиток Паскаля по (1), звездочками помечены сингулярные точки: а – без петли (I); б – с малой петлей (II); в – с большой петлей (III)

Улитка Паскаля имеет важное значение в технике. Например, в кулачковых механизмах: если профиль кулачка вычертить по улитке Паскаля, а центр вращения расположить в полюсе кривой, то движение толкателя будет синусоидальным с плавным ходом (рис. 3) [4]. Или, например, в роторных машинах для перекачки жидкостей: если профиль ротора изготовить по улитке Паскаля (рис. 4), то работа системы будет характеризоваться синусоидальной зависимостью изменения объемов полостей [6, 7].

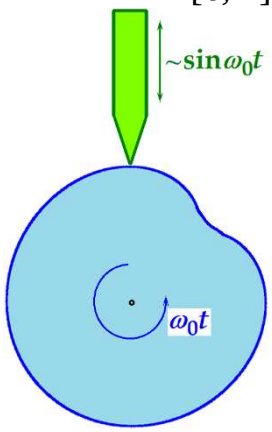


Рис. 3. Схема кулачкового механизма с профилем кулачка в форме улитки Паскаля

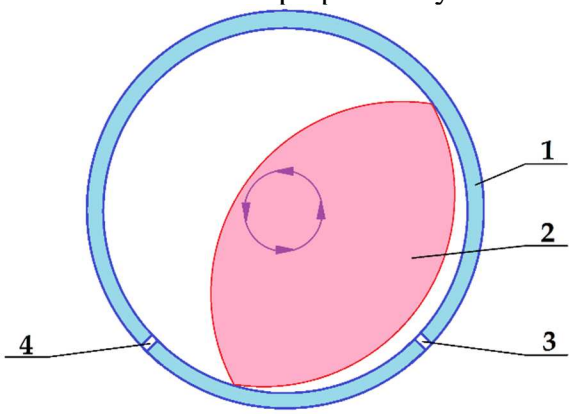


Рис. 4. Схема роторной машины для перекачки жидкостей: 1 – статор; 2 – ротор с профилем, выполненным по улитке Паскаля; 3 – входное отверстие; 4 – выходное отверстие; круговые стрелки показывают траекторию оси вращения ротора

Но как начертить улитку Паскаля? Для указанных и многих других применений необходимы именно ее точные профили. Как указано в [6], за последнее столетие предпринималось много попыток создания роторных компрессионно-расширительных машин, использующих принцип движения по траектории улитки Паскаля, однако они не привели к запуску промышленного производства. Это было обусловлено заменой истинной кривой улитки Паскаля на окружность, а также недостаточным вниманием к профилю ротора.

Вместе с тем, механизмы, которые могут вычерчивать улитки Паскаля, были известны достаточно давно. Например, 4-звенный кулисный механизм [5, 8] или 4-звенный шарнирный механизм [8]. Простейший механизм планетарного типа рассмотрен в [9]. На основе этих механизмов можно создавать роботизированные металлорежущие станки, с помощью которых возможно реализовать поточное производство деталей с профилями на основе улиток Паскаля.

Возникает вопрос о кинематике резца такого механизма, бегущего вдоль улитки Паскаля, при равномерном вращении его привода. Целью данной работы являлось вычисление угловых кинематических характеристик таких, как угловая скорость, угловое ускорение и угловой рывок (угловой рывок – вторая производная угловой скорости по времени $d^2\omega/dt^2$ [10, 11]) в случае равномерного вращения привода механизма. Эти зависимости важны для анализа работы роботизированных станков.

Модель механизма для вычерчивания улиток Паскаля. Представим простейшую модель планетарного механизма, рисующего улитку Паскаля (рис. 5). Модель содержит два внешне зацепленных друг с другом зубчатых колеса с одинаковыми радиусами a, неподвижного опорного колеса с центром O и катящегося по нему колеса-сателлита с центром O’. Центры колес соединены между собой звеном OO’. На сателлите жестко закреплен стержень-держатель CO’ суммарной длиной $a + l$. На его конце закреплен резец (или маркер).

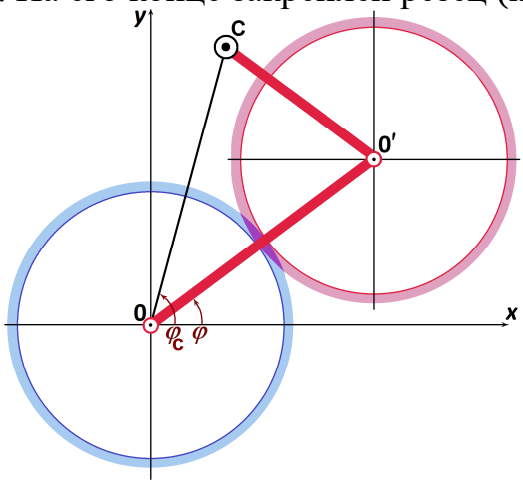


Рис. 5. Схема механизма для вырезания улиток Паскаля: O – центр опорного колеса; O’ – центр колеса-сателлита; C – резец; OO’ – ведущее звено; CO’ – стержень-держатель резца

Наложим на модель прямоугольную систему координат $x0y$ так, чтобы начало координат совпадало с центром O неподвижного колеса. Положительным направлением отсчета углов будем считать общепринятое направление против часовой стрелки.

Будем считать, что в точке О установлен мотор, вращающий звено ОО’ против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью ω_0 так, что $\varphi = \omega_0 t$. Для численного примера зададимся значением частоты вращения $\omega_0 = 3$ рад/с.

Вычислим кинематические угловые характеристики резца С – угла $\varphi_C(t)$ и его высшие производные при движении вдоль улитки Паскаля для двух наборов параметров: $a = 2$ см, $l = 4.25$ см (I, траектория без петли); $a = 2$ см, $l = 2.25$ см (II, траектория с петлей).

Вывод углового закона движения резца. Запишем закон движения резца относительно начала координат в параметрической форме с параметром – время t

$$\begin{cases} x_C(t) = 2a\cos^2(\omega_0 t) + l\cos(\omega_0 t) - a, \\ y_C(t) = 2a\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t) + l\sin(\omega_0 t). \end{cases} \quad (3)$$

Закон движения (3) подразумевает, что в начальный момент времени резец находился в точке с координатами $(a + l, 0)$, т.е. в правой крайней точке на рис. 2а–в. Через пол-оборота резец окажется в точке с координатами $(a - l, 0)$. Тогда для 1-ой четверти оборота звена ОО’ угловое положение резца выразится, как

$$\varphi_C(t) = \arctan\left[\frac{y_C(t)}{x_C(t)}\right] = \\ = \arctan\left[\frac{2a\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t) + l\sin(\omega_0 t)}{2a\cos^2(\omega_0 t) + l\cos(\omega_0 t) - a}\right]. \quad (4)$$

Почему (4) верно только для четверти оборота? Дело в том, что при прохождении резцом через углы $\varphi^*_{C,-} = \pi/2$ и $\varphi^*_{C,+} = 3\pi/2$ тангенс расходится, а арктангенс претерпевает скачки с разрывами. В этих точках многозначная функция арктангенс не может самостоятельно перейти на другую свою ветвь при монотонном росте своего аргумента. И действительно, на рисунке 6, показывающем графики функции (4) в интервале времени $-5\text{ с} < t < 5$ с, видно, что на каждом обороте звена функция имеет по две точки разрыва со скачка́ми величиной π. Такие разрывы со скачка́ми конечной величины в математике называются простыми разрывами или разрывами 1-го рода [12]. Ясно, что дифференцировать такую функции вблизи точек разрыва $\varphi^*_{C,\pm}$ нельзя. На эти проблемы с арктангенсом обращалось внимание в [13].

Кроме того, между графиками рис. 6, а, б имеются заметные различия: на участках непрерывности рис. 6а кривая монотонно возрастает, а на рис. 6б график имеет участки убывания, которые соответствуют прохождению резца по петле улитки Паскаля.

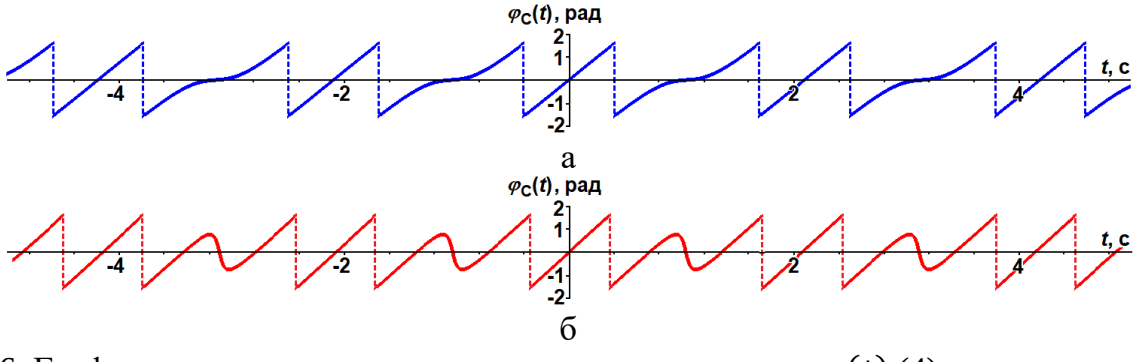


Рис. 6. Графики с разрывами зависимости угла от времени $\varphi_C(t)$ (4): а – при $a = 2$ см, $l = 4.25$ см (I, траектория без петли); б – $a = 2$ см, $l = 2.25$ см (II, траектория с петлей)

Найти моменты времени $t_{\pm}^{*}$, когда происходят скачки, можно, приравняв знаменатель из (4) нулю и решив получившееся при этом тригонометрическое уравнение. Решение дает четыре группы корней:

$$t_{\pm}^{*} = \frac{1}{\omega_0}\left(\pm\arccos\frac{-l+\sqrt{l^2+8a^2}}{2} + 2\pi m\right); \quad (5)$$

$$t_{\pm}^{**} = \frac{1}{\omega_0}\left(\pm\arccos\frac{-l-\sqrt{l^2+8a^2}}{2} + 2\pi m\right), \quad (6)$$

где $m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$. Две группы корней (5) соответствуют пересечению резцом оси ординат на внешнем контуре улитки Паскаля, две другие группы корней (6) соответствуют пересечению резцом оси ординат при движении по петле кривой. При $l > a$ выражение внутри арккосинуса в (6) превышает по модулю единицу. Это соответствует тому, что $t_{\pm}^{**}$ становятся комплексно-значными, а петля улитки Паскаля либо не заходит в положительную полуплоскость x при $a < l < 2a$, либо не существует при $l > 2a$.

Положения на оси ординат точек $y_{\pm}^{*,**}$, в которых происходят скачки, можно вычислить, подставив (5) или (6) во 2-ое уравнение (3). Для выбранных параметров задачи эти ординаты были вычислены (см. табл. 1).

Табл. 1. Значения ординат точек, в которых происходят скачки функции (4)

№	Параметры	Рисунок	y_{+}^{*}	y_{-}^{*}	y_{+}^{**}	y_{-}^{**}
I	$a = 2$ см, $l = 4.25$ см	2, а	5,298	–5,298	комплекс.	комплекс.
II	$a = 2$ см, $l = 2.25$ см	2, б	3,658	–3,658	комплекс.	комплекс.
III	$a = 2$ см, $l = 1.25$ см	2, в	2,899	–2,899	–1,078	1,078

Таким образом, для устранения сингулярностей в функции (4) необходимы добавочные слагаемые, которые скомпенсировали бы скачки в точках (5) и (6): в каждой точке разрыва следует добавлять к $\varphi_{\mathrm{C}}(t)$ (4) значение π при движении драйвера по часовой стрелке, или вычитать π при его движении против часовой стрелки. Эти добавки необходимы для того, чтобы ‘помочь’ арктангенсу перескочить на свою следующую ветвь. Удобнее это сделать с помощью ступенчатой θ-функции Хэвисайда. Модифицированная таким образом функция $\tilde{\varphi}_{\mathrm{C}}(t)$ примет вид (для случаев I и II):

$$\tilde{\varphi}_{\mathrm{C}}(t) = \varphi_{\mathrm{C}}(t) + \sum_{m=-m_0}^{m_0} \pi\theta(\omega_0 t - \omega_0 t_{-}^{*}) +$$

$$+ \sum_{m=-m_0}^{m_0} \pi\theta(\omega_0 t - \omega_0 t_{+}^{*}) - (2m_0+1)\pi =$$

$$= \arctan\left[\frac{2a\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t)+l\sin(\omega_0 t)}{2a\cos^2(\omega_0 t)+l\cos(\omega_0 t)-a}\right] + \quad (7)$$

$$+ \sum_{m=-m_0}^{m_0} \pi\theta\left(\omega_0 t + \arccos\frac{-l+\sqrt{8a^2+l^2}}{4a} + 2\pi m\right) +$$

$$+\sum_{m=-m_0}^{m_0}\pi\theta\left(\omega_0 t-\arccos\frac{-l+\sqrt{8a^2+l^2}}{4a}+2\pi m\right)-(2m_0+1)\pi.$$

В (6) последний постоянный член обеспечивает выполнение начального условия $\tilde{\varphi}_{\mathrm{C}}(t=0)=0$.

Для случая III, в котором резец проходит по петле (рис. 2, в), нужно добавить в (7) еще два аналогичных слагаемых в виде сумм θ-функций со ступеньками в моменты времени $t_{\pm}^{**}$.

Сколько слагаемых необходимо брать при суммировании в (7)? Допустим, требуется построить график $\tilde{\varphi}_{\mathrm{C}}(t)$ в течение несколько периодов на интервале времени $-\tau<t<\tau$. Тогда параметр суммирования m_0, который определяет количество слагаемых в суммах, следует вычислять по формуле

$$m_0=1+\mathrm{floor}\left(\frac{\omega_0\tau}{\pi}\right), \qquad (8)$$

где floor – функция, обозначающая целую часть числа.

На рисунках 7, а, б представлены графики углового закона движения резца (7) для случаев I и II и для выбранного интервала времени $-\tau<t<\tau$ при $\tau=5$ с, дающего значение $m_0=5$. Для этого значения m_0 число слагаемых в каждой сумме в (6) – 11. Как видно, функция (7), описывающая угловой закон движения, является монотонной, непрерывной и гладкой. При этом угол $\tilde{\varphi}_{\mathrm{C}}(t)$ растет с каждым следующим оборотом. После этой процедуры функцию (7) можно дифференцировать необходимое число раз.

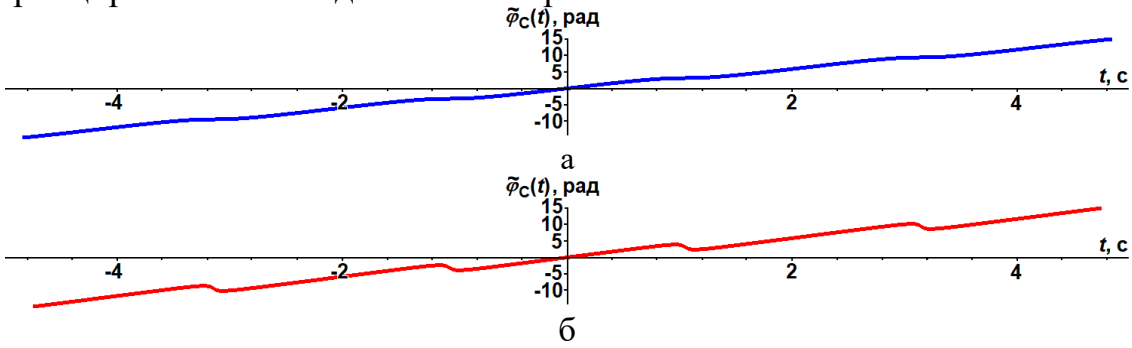


Рис. 7. Гладкие графики зависимости угла от времени $\tilde{\varphi}_{\mathrm{C}}(t)$ (7): а) – при $a=2$ см, $l=4.25$ см (I, траектория без петли); б) – $a=2$ см, $l=2.25$ см (II, траектория с петлей)

Расчет кинематических угловых характеристик движения резца. Продифференцируем функцию $\tilde{\varphi}_{\mathrm{C}}(t)$ (7) три раза раз, получая при этом последовательно угловую скорость $\omega_{\mathrm{C}}(t)$, угловое ускорение $\varepsilon_{\mathrm{C}}(t)$, угловой рывок $j_{\mathrm{C}}(t)$. Все эти угловые характеристики движения частицы на временном интервале от –5 до 5 с были вычислены и представлены, соответственно, на рисунках 8-10.

Все графики угловых характеристик на рисунках 8-10 имеют форму периодической последовательности импульсов. При этом также наблюдается усложнение формы импульсов с возрастанием порядка производной: появляется все больше локальных экстремумов и генерируются осцилляции, аналогично наблюдавшимся в [14] производным высшего порядка гауссовской функции.

Анализ показал, что средние за период вращения $T=2\pi/\omega_0$ угловые скорости, графики которых представлены на рисунках 8, а, б, равны в обоих случаях $\langle\omega(t)\rangle_T=\omega_0=3$ рад/с. При этом все средние за период значения высших

угловых характеристик – ускорения и рывка – равны нулю (рис. 9, а, б и рис. 10, а, б).

Кроме того, график $\omega_C(t)$ для резца, бегущего вдоль улитки Паскаля без петли, целиком лежит в положительной полуплоскости ω_C (рис. 8, а), в то время как $\omega_C(t)$ периодически заходит в отрицательную полуплоскость ω_C, когда резец движется по петле (рис. 8, б).

Обращает на себя внимание также следующая закономерность: при меньших значениях величины l амплитуды импульсов угловых характеристик больше (рис. 8-10). Найденные закономерности необходимо учитывать при выборе режимов резания.

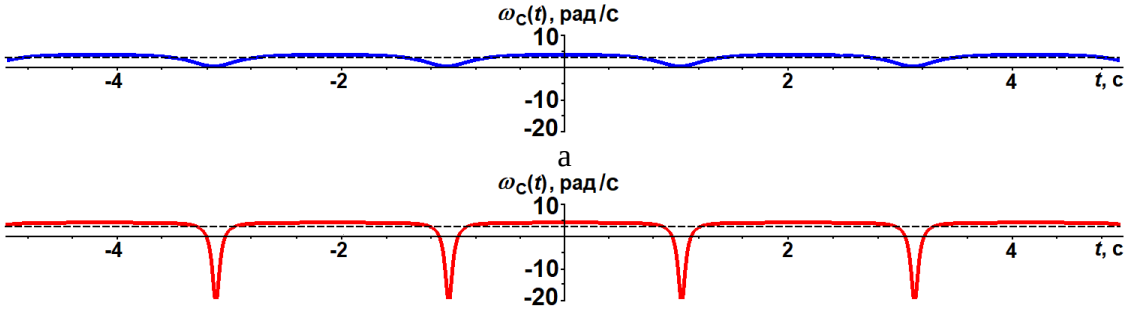


Рис. 8. Графики зависимости угловой скорости от времени $\omega_C(t)$, пунктир – среднее значение, равное ω_0: а – при $a = 2$ см, $l = 4.25$ см (I, траектория без петли); б – $a = 2$ см, $l = 2.25$ см (II, траектория с петлей)

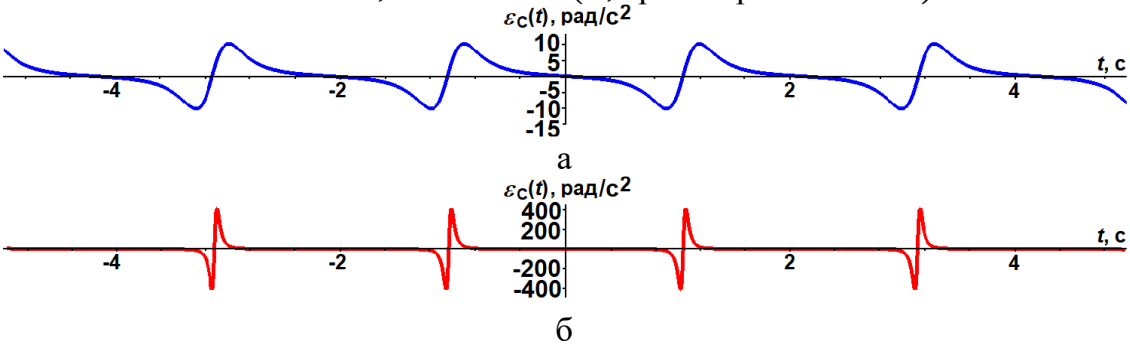


Рис. 9. Графики зависимости углового ускорения от времени $\varepsilon_C(t)$: а – при $a = 2$ см, $l = 4.25$ см (I, траектория без петли); б – $a = 2$ см, $l = 2.25$ см (II, траектория с петлей)

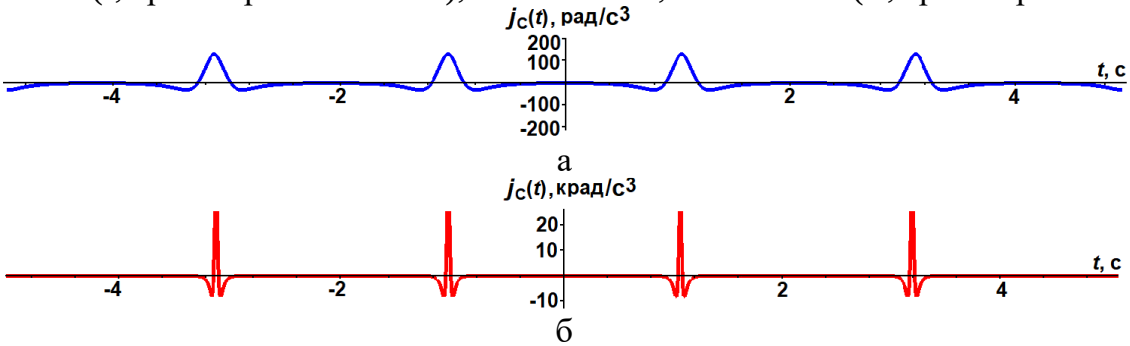


Рис. 10. Графики зависимости углового рывка от времени $j_C(t)$: а – при $a = 2$ см, $l = 4.25$ см (I, траектория без петли); б – $a = 2$ см, $l = 2.25$ см (II, траектория с петлей)

Выводы. Рассмотрено плоское движение режущего механизма планетарного типа, резец которого бежит вдоль замкнутой кривой – улитки Паскаля. Было задано, что ведущее звено механизма вращается равномерно. Выведен угловой закон движения резца с точки зрения наблюдателя, находящегося в центре кривой. Угловой закон движения резца представлен в виде гладкой

функции от времени. Для его вывода применен метод компенсирующих добавок, устраняющих разрывы 1-го рода.

Были вычислены угловые кинематические характеристики движения резца такие, как угловая скорость $\omega_C(t)$, угловое ускорение $\varepsilon_C(t)$ и угловой рывок $j_C(t)$, которые несмотря на равномерное вращение привода, оказались ненулевыми и ведут себя во времени нетривиальным образом – имеют форму периодической последовательности коротких импульсов с осцилляциями.

Таким образом, показано, что механизм для вырезания улитки Паскаля, является механическим трансформатором, преобразующим равномерное вращение ведущего звена в импульсно-периодическое угловое движение резца с угловыми ускорениями и рывками.

Список литературы

1. Dürer A. Underweysung der messung, mit dem zirckel und richtscheyt, in Linien ebnen unnd gantzen corporen. – Gedruckt zu Nüremberg: Hieronymus Andreae, 1525. – 187 p.
2. Luecking S. Albrecht Dürer's celestial geometry // Math Horizons. 2018, vol. 25, no. 3, pp. 5-7. doi.org/10.1080/10724117.2018.1424456.
3. de Vries A. Shadows of rotating black holes approximated by Dürer-Pascal limaçons // Jahresschrift der Bochumer interdisziplinären Gesellschaft. 2003, vol. 1, no. 1, pp. 1-20.
4. Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения. – М.: Физматгиз, 1960. – 296 с.
5. Шикин Е.В., Франк-Каменецкий М.М. Кривые на плоскости и в пространстве. – М.: Фазис, 1997. – 336 с.
6. Sultan I.A. The limaçon of Pascal: mechanical generation and utilization for fluid processing // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2005, vol. 219, no. 8, pp. 813-822. doi.org/10.1243/095440605X31698.
7. Belfiore C., Hossain S., Phung T., Sultan I. Limaçon technology in power generation // Encyclopedia. 2024, vol. 4, no. 4, pp. 1865-1890. https://doi.org/10.3390/encyclopedia4040122.
8. Артоболевский И.И. Теория механизмов для воспроизведения плоских кривых. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 255 с.
9. Березин В. Улитка Паскаля // Квант. – 1977. – №5. – С. 36.
10. Tan A., Edwards M.E. Existence of angular jerk in Keplerian motion // European Journal of Physics. 2011, vol. 32, no. 1, pp. 201-206.
11. Gallardo-Alvarado J., Gallardo-Razo J. Mechanisms. Kinematic analysis and applications in robotics. – London: Academic Press, 2022. – 504 p.
12. Рудин У. Основы математического анализа. – М.: Мир, 1976. – 320 с.
13. Jeffrey D.J. The importance of being continuous // Mathematics Magazine. 1994, vol. 67, no. 4, pp. 294-300. doi.org/10.1080/0025570X.1994.11996235.
14. Berry M.V. Universal oscillations of high derivatives // Proceedings of Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2005, vol. 461, no. 2058, pp. 1735-1751. DOI: 10.1098/rspa.2005.1446.

Сведения об авторе:

Дубинов Александр Евгеньевич – д.ф.-м.н., доцент, главный научный сотрудник; профессор кафедры «Экспериментальная физика».