УДК 539.6:378.147 https://doi.org/10.26160/2542-0127-2026-18-7-10

# АНАЛИЗ ОСОБЕННОСТЕЙ РАСЧЕТА НА УСТОЙЧИВОСТЬ РЕАЛЬНОГО СТЕРЖНЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ДИСЦИПЛИНЫ «СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ»

***Петров Ю.В., Медведева Н.Н., Семакова М.В.***
*Московский государственный технический университет гражданской авиации, Москва*

**Ключевые слова:** стержень, устойчивость, критическая сила потери устойчивости, эксцентриситет, допускаемые нормальные напряжения, предел текучести, коэффициент запаса устойчивости.

**Аннотация.** Статья посвящена анализу методических особенностей изучения явления устойчивости сжатых стержней в дисциплине «Сопротивление материалов» технического авиационного вуза. Известно, что целый ряд конструктивных элементов летательного аппарата приводится к расчетной схеме сжатого стержня и обычно в классическом курсе ограничиваются решением задачи в постановке Эйлера. Вместе с тем, для реального стержня актуален случай, когда продольная ось стержня не совпадает с линией действия сжимающей силы. В этом случае принципиально изменяется подход к оценке устойчивости стержней, так как само понятие критической силы в классической постановке к ним неприменимо и прогибы имеют место уже при незначительной внешней нагрузке. Кроме того, показано, что расчет на устойчивость необходимо вести не по допускаемым напряжениям, а по допускаемой нагрузке.

# ANALYSIS OF THE STABILITY CALCULATION FEATURES OF A REAL ROD WHEN STUDYING THE DISCIPLINE "STRENGTH OF MATERIALS"

***Petrov Yu.V., Medvedeva N.N., Semakova M.V.***
*Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow*

**Keywords:** rod, stability, critical loss of stability force, eccentricity, allowable normal stresses, yield strength, stability factor.

**Abstract.** The article is devoted to the analysis of methodological features of studying the phenomenon of stability of compressed rods in the discipline of "Strength of Materials" of a technical aviation university. It is known that a number of structural elements of an aircraft are reduced to the design scheme of a compressed rod and usually in the classical course are limited to solving the problem in the formulation of Euler. At the same time, for a real rod, the case when the longitudinal axis of the rod does not coincide with the line of action of the compressing force is relevant. In this case, the approach to assessing the stability of rods is fundamentally changed, as the concept of critical force in the classical formulation does not apply to them, and deflections occur even under slight external loads. Additionally, it is shown that stability calculations should be based on the allowable load rather than the allowable stress.

В авиационном инженерном вузе исторически сложилось так, что отдельные вопросы ряда обобщенных тем рассматриваются в различных учебных дисциплинах. Так, проблемы устойчивости конструктивных элементов летательного аппарата рассматриваются в следующей последовательности: устойчивость стержней в «Сопротивлении материалов», устойчивость пластин и оболочек в «Строительной механике», а устойчивость подкрепленных панелей (обшивка, подкрепленная стрингерами) в «Конструкции летательных аппаратов». При этом в условиях ограниченного времени опускаются «тонкие моменты»

теории устойчивости, без понимания которых невозможно в полном объеме удовлетворить требованиям рабочей программы.

В частности, при изучении задач устойчивости стержневых систем ограничиваются рассмотрением «идеальных стержней» при центральном сжатии в постановке Эйлера [1-3]. Очевидно, что такой подход может сформировать у студентов недостаточно полное представление о расчете на устойчивость реальных стержней. В настоящей работе предлагается методический подход к оценке устойчивости стержня, когда внешние сжимающие усилия не совпадают с его продольной осью (рис. 1).

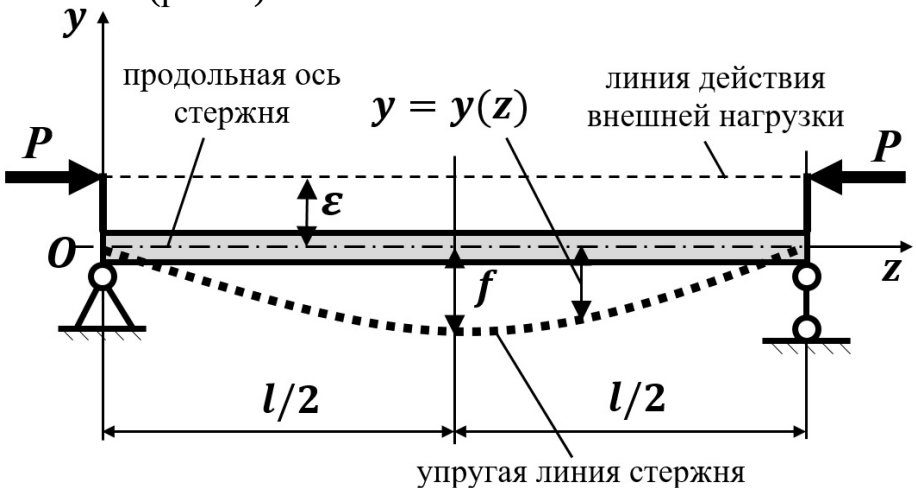



Рис. 1. Расчетная схема

Рассматривается актуальный практический случай: линия действия внешней нагрузки не совпадает с продольной осью стержня ($\varepsilon$ – эксцентриситет). Дифференциальное уравнение упругой линии балки (с учетом знака координаты $y(z)$) имеет стандартный вид:

$$EJ_x \frac{d^2y}{dz^2} + P(y - \varepsilon) = 0, \qquad (1)$$

где $E$– модуль Юнга, $J_x$ – осевой момент инерции сечения, $P$ – внешняя сила,

$\varepsilon$ – эксцентриситет приложения внешней силы $P$.

Интегрирование уравнения (1) проведем с использованием метода Бубнова – Галеркина, когда приближенное решение ищем в виде

$$\bar{y} = -f \sin\frac{\pi z}{l}.$$

где $f$ – максимальный прогиб стержня, $l$ – длина стержня.

Значение максимальный прогиба стержня можно получить, интегрируя уравнение упругой линии балки при внецентренном сжатии [4]:

$$f = \frac{4\,\varepsilon\,P}{\pi\,(P_{\text{кр}}^{\text{Э}} - P)}, \qquad (2)$$

где $P_{\text{кр}}^{\text{Э}} = \frac{\pi^2 E J_x}{l^2}$ – критическая сила потери устойчивости стержня по Эйлеру при шарнирном закреплении. Анализ полученных соотношений позволяет сделать несколько практически значимых выводов:

– при оценке устойчивости реальных стержней нужно понимать, что понятие *критической силы* в классической постановке к ним неприменимо, так прогибы имеют место уже при незначительной внешней нагрузке $P$;

– увеличение эксцентриситета $\varepsilon$ приводит к увеличению прогибов стержня, причем за критическое значение следует принимать силу $P_1$, при которой резко возрастает прогиб стержня (рис. 2).

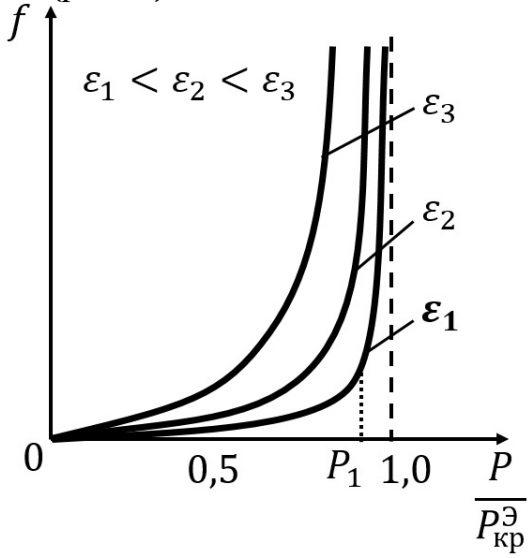



Рис. 2. График изменения прогиба стержня

Однако на приведенной выше информации особенности расчета на устойчивость реальных стержней не ограничиваются. Если перейти к напряжениям, то очевидны следующие соотношения:

$$\sigma_{max} = -\left(\frac{P}{F} + \frac{M_{xmax}}{W_x}\right),\ M_{xmax} = P(\varepsilon + f), \qquad (3)$$

где $\sigma_{max}$ – максимальные нормальные напряжения; $F$ – площадь поперечного сечения стержня; $M_{xmax}$ – максимальный изгибающий момент; $W_x$ – осевой момент сопротивления.

Если учесть соотношение (2), то окончательно получим:

$$\sigma_{max} = -\sigma_0\left(1 + \frac{F\ \varepsilon}{W_x}\left(1 + \frac{4\ P}{\pi\ (P_{\text{кр}}^{\text{Э}} - P)}\right)\right), \qquad (4)$$

где $\sigma_0 = \frac{P}{F}$ – нормальные напряжения в стержне при нулевом эксцентриситете. В качестве примера рассмотрим шарнирно опертый стержень квадратного поперечного сечения со стороной $a$ = 0,01 м, $\varepsilon$ = 0,002 м, $l$ = 1 м, $E = 2\cdot10^{11}$ Па. В этом случае $P_{\text{кр}}^{\text{Э}} = \frac{\pi^2 E J_x}{l^2}$=1,63 кН. Используя приведенные данные, по соотношению (4) построим зависимость $\sigma_{max}$ от отношения $P/P_{\text{кр}}^{\text{Э}}$ (рис. 3).

Анализ полученных результатов показывает, что если положить допускаемый коэффициент запаса по устойчивости $[n_{\text{у}}]$=1,5, то допускаемые нормальные напряжения потери устойчивости при расчете по методу допускаемых напряжений равны $[\sigma_\sigma]$ и соответствующая этим напряжениям «критическая сила» равна $P_{[\sigma]}$. Однако даже при незначительном повышении внешней нагрузки возможно достижение значения предела текучести $\sigma_{\text{Т}}$, что недопустимо. Поэтому расчет необходимо вести по допускаемой нагрузке $P_{[P]} = \frac{P_{\text{Т}}}{[n_{\text{у}}]}$. В таком случае допускаемые напряжения $[\sigma_P]$, как видно из рисунка 3, существенно ниже.

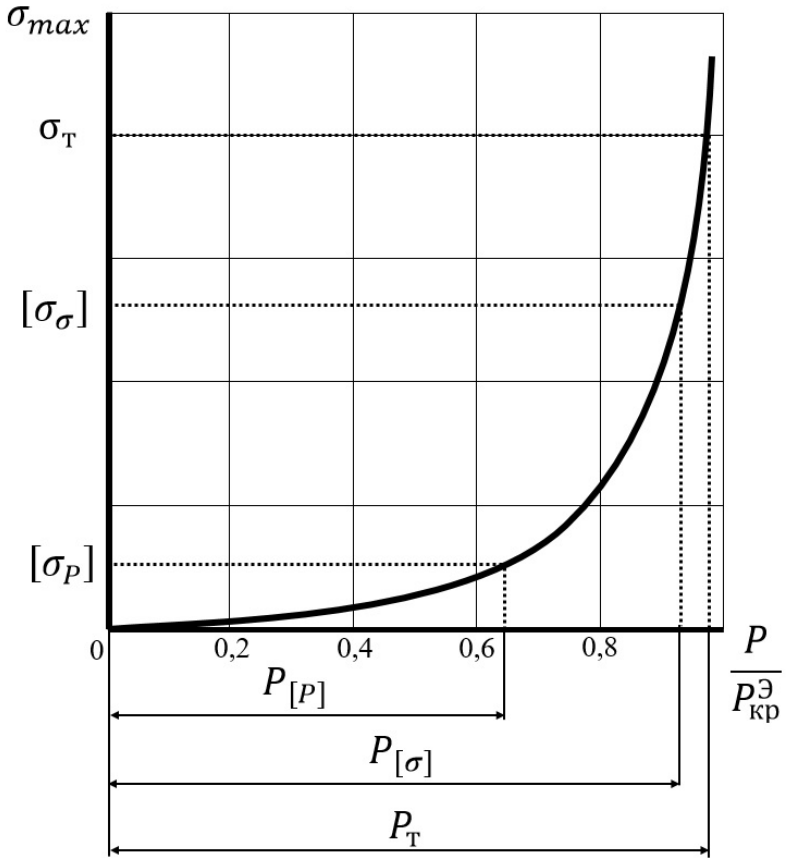



Рис. 3. График изменения напряжений

Таким образом, при изучении вопросов устойчивости стержней в рамках дисциплины «Сопротивление материалов» необходимо знакомить студентов с особенностями расчета на устойчивость реальных стержней при наличии эксцентриситете внешней нагрузки.

**Список литературы**

1. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. – 544 с.
2. Орешко Е.И., Ерасов В.С., Луценко А.Н. Особенности расчета устойчивости стержней и пластин // Авиационные материалы и технологии. – 2016. – №4. – С. 74-79. – doi.org/10.18577/2071-9140-2016-0-4-74-79/.
3. Постнов В.А., Ростовцев Д.М., Суслов В.П., Кочанов Ю.П. Строительная механика корабля и теории упругости. Том.2. Изгиб и устойчивость стержней, стержневых систем, пластин и оболочек. – М.: Изд-во «Судостроение», 1987. – 416 с.
4. Морозов В.И., Новицкий В.В. Сопротивление материалов. – М.: Издательство ВВИА им. проф. Н.Е.Жуковского,1994. – 498 с.

Сведения об авторах:

*Петров Юрий Владимирович* – д.т.н., профессор, заведующий кафедрой технической механики и инженерной графики;

*Медведева Наталья Николаевна* – старший преподаватель кафедры технической механики и инженерной графики;

*Семакова Марина Владимировна* – старший преподаватель кафедры технической механики и инженерной графики.