

СТРУКТУРНО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД В ОЦЕНКЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С РЫЧАЖНЫМИ СВЯЗЯМИ

Елисеев А.В.¹, Николаев А.В.²

¹*Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск;*

²*Иркутский национальный исследовательский технический университет,
Иркутск*

Ключевые слова: структурное моделирование, механические колебательные системы, Z-преобразование, устойчивость, дискретизация, передаточная функция, рычажные связи, динамическое гашение.

Аннотация. В статье развивается методология структурного математического моделирования, используемого для оценки динамических состояний вибрационных систем с рычажными связями. Предложен новый подход, позволяющий на основе структурной схемы, полученной в результате Z-преобразования дискретного аналога дифференциального уравнения механической колебательной системы, определять условия устойчивости численного решения. Показано, что условия устойчивости, рассматриваемые как явные ограничения на шаг дискретизации, представляют собой ограничения на инерционные свойства рычажных механизмов. Установлен принцип двусторонней ограниченности вычислительной воспроизводимости движения элементов механических колебательных систем, рассматриваемых в качестве расчетных схем технических объектов, работающих в условиях интенсивных вибрационных нагружений.

STRUCTURAL-ANALYTICAL APPROACH TO EVALUATING DYNAMIC STATES OF MECHANICAL OSCILLATORY SYSTEMS WITH LEVER CONNECTIONS

Eliseev A.V.¹, Nikolaev A.V.²

¹*Irkutsk State Transport University, Irkutsk;*

²*Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk*

Keywords: structural modeling, mechanical oscillatory systems, Z-transform, stability, discretization, transfer function, lever connections, dynamic damping.

Abstract. The article develops the methodology of structural mathematical modeling used to assess the dynamic states of vibrating systems with lever connections. A new approach is proposed that allows, based on the structural diagram obtained as a result of the Z-transformation of the discrete analogue of the differential equation of a mechanical oscillating system, to determine the stability conditions of the numerical solution. It is shown that the stability conditions, considered as explicit restrictions on the discretization step, represent restrictions on the inertial properties of lever mechanisms. The principle of two-sided limitation of the computational reproducibility of the motion of elements of mechanical oscillatory systems, considered as computational models of technical objects operating under conditions of intensive vibration loads, has been established.

Введение. В настоящее время широкое распространение получили задачи моделирования динамических режимов работы технических объектов, находящихся в условиях интенсивных вибрационных нагружений [1-4]. Примерами таких объектов могут служить вибрационные технологические машины: вибропогружатели, виброгасители, стенды для вибрационного уплотнения сыпучих сред, вибрационные стенды для упрочнения деталей и другие.

Для оценки вибрационных состояний технических объектов на предварительных этапах моделирования разрабатываются методы, претендующие на универсальность: метод конечных элементов, метод Галёркина и методы им эквивалентные. Как правило, универсальные вычислительные методы позволяют находить решения достаточно широкого круга практических задач, игнорируя их физическую сущность. В рамках подобных представлений, проектирование технологических машин ведётся в предположении, что какие бы параметры не имел технический объект, универсальные вычислительные методы гарантируют адекватную точность за ограниченное время [5].

В результате, распространенной практикой является ситуация, когда численное решение, полученное на основе расчетных схем, приводит, либо к построению моделей, адекватность которых требует доказательства, либо к неоправданному потреблению вычислительных ресурсов. Подобная ситуация особенно критична для механических колебательных систем с рычажными связями, где инерционные свойства дополнительных масс существенно влияют на динамику.

Для разработки математических моделей, отображающих динамические свойства механических колебательных систем с рычажными связями, существенное распространение получила методология структурного математического моделирования [6]. Особенности структурного подхода к моделированию механических систем с рычажными связями представлены в работе [7], где показано, что введение дополнительных рычажных механизмов в точках контакта с опорной поверхностью обеспечивает эффект «блокирования» внешних сил и динамическое гашение колебаний одновременно по нескольким координатам. Однако, практика оценки динамических свойств колебательных систем с рычажными связями редко затрагивает вопросы численной реализации семейств полученных решений. Подобная ситуация может быть объяснена отсутствием наглядных средств анализа связи между непрерывными объектами, динамические взаимодействия которых исследуются на основе амплитудно-частотных характеристик, и объектами дискретной природы, полученными в результате дискретизации, состояние которых может быть описано в рамках теории линейных импульсных систем [8, 9].

Вместе с тем, переход от непрерывной модели к дискретной должен учитывать тот факт, что разностное уравнение аппроксимирует не исходное дифференциальное уравнение, а уравнение с дополнительными членами, возникающими в результате замены непрерывных искомым функций конечными разностями [10, 11].

Статья посвящена развитию методов [7] и разработке подхода, устанавливающего связь между математической моделью динамики механического объекта с рычажными связями и численной моделью, решение которой является приближённой к заданному на основе информации о шаге дискретизации.

I. Основные положения. Постановка задачи. Предполагается, что расчетная схема технического объекта, находящегося в условиях вибрационного нагружения, представлена твердым телом с массоинерционными параметрами M и J (M – масса объекта, J – момент инерции относительно центра тяжести в точке O),

что отражено на рисунке 1. Твердое тело опирается на упругие элементы с жесткостями k_1 , k_2 (рис. 1) в точках A и B и одновременно на рычаги в виде жестких невесомых стержней, имеющих точки поворота A_1 , A_2 . На концах стержней имеются дополнительные сосредоточенные массы m_1 и m_2 . Рычажные связи реализуются в виде механических рычагов с передаточными отношениями $i_1 = l_2/l_1$, $i_2 = l_4/l_3$, где l_1, l_2, l_3, l_4 – длины плеч рычагов с точками поворота A_1, A_2 . В инженерной практике такие связи соответствуют системам подвески с дополнительными инерционными элементами, системам виброзащиты с рычажными преобразователями движения. Дополнительные массы m_1, m_2 на концах рычагов выполняют роль динамических гасителей колебаний. Их инерционные свойства используются для настройки системы на определенные частоты динамического гашения. Передаточные отношения i_1, i_2 определяют степень влияния дополнительных масс на основную систему. При $i > 1$ масса m оказывает усиленное влияние на динамику объекта, при $i < 1$ – ослабленное.

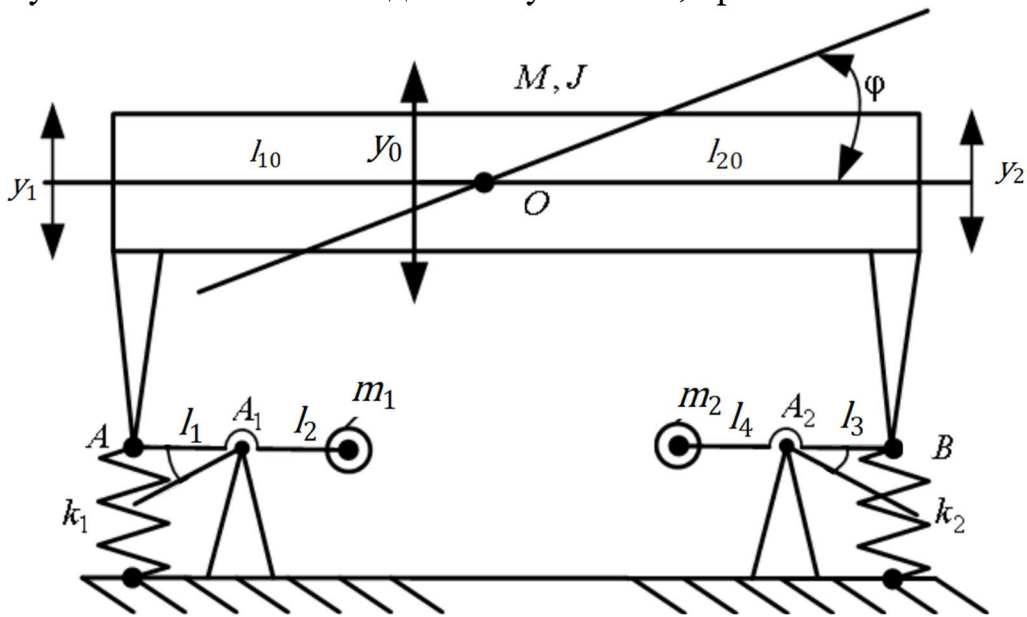


Рис. 1. Расчетная схема механической колебательной системы с рычажными связями

Между координатами системы и ее параметрами имеются следующие соотношения:

$$y_0 = ay_1 + by_2; \quad \varphi = c(y_2 - y_1); \quad y_1 = y_0 - l_{10}\varphi; \quad y_2 = y_0 + l_{20}\varphi,$$

где

$$a = \frac{l_{20}}{l_{10} + l_{20}}; \quad b = \frac{l_{10}}{l_{10} + l_{20}}; \quad c = \frac{1}{l_{10} + l_{20}}.$$

Передаточные отношения рычажных связей вводятся в виде:

$$i_1 = \frac{l_2}{l_1}; \quad i_2 = \frac{l_4}{l_3}; \quad i_0 = \frac{l_{10}}{l_{20}}.$$

Задача заключается в определении ограничений на параметры исходной непрерывной модели, которые определяются необходимостью построения устойчивой дискретной модели для получения численного решения.

II. Математическая модель. Построим математическую модель рассматриваемой системы в рамках формализма Лагранжа. Рассмотрим случай силового возмущения по координате y_1 , когда сосредоточенная сила $Q_1 \neq 0$

приложена к точке A . Запишем выражения для кинетической и потенциальной энергий в системе координат y_1, y_2 :

$$T = \frac{1}{2} M(a\dot{y}_1 + b\dot{y}_2)^2 + \frac{1}{2} Jc^2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2,$$

$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 y_1^2 + \frac{1}{2} k_2 y_2^2.$$

Уравнения движения получим на основе уравнений Лагранжа второго рода:

$$(Ma^2 + Jc^2 + m_1 \dot{y}_1^2) \ddot{y}_1 + k_1 y_1 + (Mab - Jc^2) \ddot{y}_2 = Q_1,$$

$$(Mb^2 + Jc^2 + m_2 \dot{y}_2^2) \ddot{y}_2 + k_2 y_2 + (Mab - Jc^2) \ddot{y}_1 = 0.$$

Применяя преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях, представим уравнения в операторной форме:

$$\bar{y}_1 [(Ma^2 + Jc^2 + m_1 \dot{y}_1^2) p^2 + k_1] + \bar{y}_2 (Mab - Jc^2) p^2 = \bar{Q}_1, \quad (1)$$

$$\bar{y}_2 [(Mb^2 + Jc^2 + m_2 \dot{y}_2^2) p^2 + k_2] + \bar{y}_1 (Mab - Jc^2) p^2 = 0, \quad (2)$$

где $p = j\omega$ – комплексная переменная ($j = \sqrt{-1}$) [12].

На основе системы алгебраических уравнений (1), (2) механической колебательной системе (рис. 1) может быть поставлена в соответствие структурная схема, эквивалентная в динамическом отношении системе автоматического управления, в качестве входного сигнала имеющая внешнее силовое возмущение $\bar{Q}_1$, а в качестве выходных – $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$ (рис. 2).

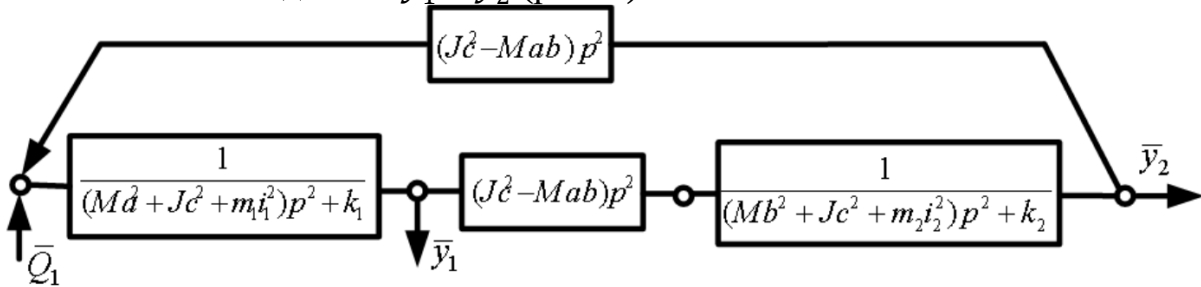


Рис. 2. Структурная схема системы, рассмотренной на рисунке 1

На основе структурной схемы (рис. 2) могут быть построены передаточные функции системы, отображающие динамическую податливость:

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1} = \frac{(Mb^2 + Jc^2 + m_2 \dot{y}_2^2) p^2 + k_2}{A_0(p)},$$

$$W_2(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_1} = \frac{-(Jc - Mab) p^2}{A_0(p)},$$

где $A_0(p)$ – характеристическое уравнение системы:

$$A_0(p) = [(Ma^2 + Jc^2 + m_1 \dot{y}_1^2) p^2 + k_1] \cdot [(Mb^2 + Jc^2 + m_2 \dot{y}_2^2) p^2 + k_2] - [(Mab - Jc^2) p^2]^2.$$

Для дальнейшего численного анализа модели наравне с непрерывной моделью, где анализ проводился в частотной области, следующим шагом является построение дискретного аналога системы.

III. Оценка устойчивости дискретной модели. Рассматривается переход от непрерывной модели к дискретной модели путем замены производных их разностными аналогами. В частности, первая производная может быть заменена конечной разностью:

$$(\dot{y}_i)_n \approx \frac{(y_i)_{n+1} - (y_i)_{n-1}}{2\Delta t}.$$

Соответственно, вторая производная заменяется выражением:

$$(\ddot{y}_i)_n \approx \frac{(y_i)_{n+1} - 2(y_i)_n + (y_i)_{n-1}}{(\Delta t)^2},$$

где Δt – шаг дискретизации по времени, $i=1,2$.

Поддействуем Z-преобразованием (ссылка) на разностные аналоги производных с учетом нулевых начальных условий:

$$Z\{(y_i)_{n+1}\} = z \cdot Y_i(z), \quad Z\{(y_i)_n\} = Y_i(z), \quad Z\{(y_i)_{n-1}\} = z^{-1} \cdot Y_i(z).$$

Действуя Z-преобразованием на разностные аналоги уравнений Лагранжа 2-ого рода получим алгебраические уравнения:

$$Y_1[(Ma^2 + Jc^2 + m_1 \dot{r}_1^2)(z-1)^2 + k_1 z(\Delta t)^2] - Y_2(Jc^2 - Mab)(z-1)^2 = Q_1 z(\Delta t)^2, \\ - Y_1(Jc^2 - Mab)(z-1)^2 + Y_2[(Mb^2 + Jc^2 + m_2 \dot{r}_2^2)(z-1)^2 + k_2 z(\Delta t)^2] = 0,$$

где Q_1 – Z-изображение силового возмущения.

Переменная z связана с переменной p следующим образом:

$$z = e^{p\Delta t} = e^{j\omega\Delta t}.$$

В непрерывной модели [7] переменная $p=j\omega$ отображает установившиеся гармонические колебания. В дискретной модели переменная z описывает колебания в дискретные моменты времени $t_n = n\Delta t$. Переход от p к z соответствует замене непрерывного времени на дискретную сетку, что необходимо для численного моделирования.

Система алгебраических уравнений, полученная после Z-преобразования, может быть представлена в виде структурной схемы (рис. 3).

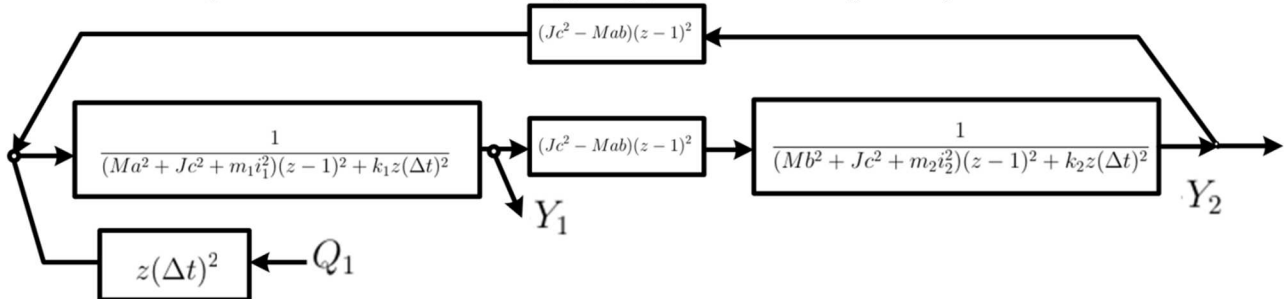


Рис. 3. Структурная схема дискретной системы с рычажными связями

Дискретная передаточная функция структурной схемы (рис. 3) дискретной системы имеет вид:

$$W_1(z) = \frac{z(\Delta t)^2 [(Mb^2 + Jc^2 + m_2 \dot{r}_2^2)(z-1)^2 + k_2 z(\Delta t)^2]}{A_1(z)}, \\ W_2(z) = \frac{z(\Delta t)^2 (Jc^2 - Mab)(z-1)^2}{A_1(z)},$$

где характеристическое уравнение дискретной системы имеет вид:

$$A_1(z) = [(Ma^2 + Jc^2 + m_1 \dot{r}_1^2)(z-1)^2 + k_1 z(\Delta t)^2] \times \\ \times [(Mb^2 + Jc^2 + m_2 \dot{r}_2^2)(z-1)^2 + k_2 z(\Delta t)^2] - \\ - [(Mab - Jc^2)(z-1)^2]^2 = 0.$$

Условие устойчивости вычислительной схемы может быть выражено в рамках требований к корням z_1, z_2 характеристического уравнения:

$$A_1(z)=0, \quad |z_i|<1 \quad \forall i.$$

Условие $|z_i|<1$ означает, что колебания в дискретной системе должны затухать со временем, что соответствует физическому требованию устойчивости механической системы. Нарушение условия $|z_i|<1$ приводит к неограниченному росту амплитуды колебаний в численной модели, что делает результаты моделирования недостоверными.

В частности, для симметричной системы, когда выполнены условия $m_1=m_2=m$, $k_1=k_2=k$, $i_1=i_2=i$, $a=b=1/2$, получаем:

$$\Delta t < \Delta t_{\text{crit}} = \min \left(2 \sqrt{\frac{i^2 m + M/2}{k}}, \quad 2 \sqrt{\frac{i^2 m + 2Jc^2}{k}} \right), \quad (3)$$

где M – масса объекта, J – момент инерции; m – дополнительная масса на рычаге, i – передаточное отношение; k – жёсткость упругого элемента.

Полученные условия устойчивости связывают шаг дискретизации с параметрами механической колебательной системы.

Слагаемое $(i^2 m + M/2)$ определяет предельный шаг дискретизации для поступательных колебаний системы. Чем больше приведённая масса $(M + 2i^2 m)$, тем больше допустимый шаг Δt . Слагаемое $(i^2 m + 2Jc^2)$ определяет предельный шаг для вращательных колебаний. Момент инерции J и передаточное отношение i влияют на допустимый шаг дискретизации. Жёсткость k в знаменателе: чем жёстче система, тем меньше должен быть шаг дискретизации для обеспечения устойчивости численного решения. Рычажные связи $(i^2 m)$ увеличивают эффективную массу системы, что позволяет увеличить шаг дискретизации без потери устойчивости. С другой стороны, можно сформулировать ограничение на минимально допустимое критическое значение $\Delta t_{\text{min}} < \Delta t_{\text{crit}}$. Тогда возникает ограничение сверху на максимальную жесткость, а с низу на минимальную массу и момент инерции.

Таким образом, условие (3) может рассматриваться, с одной стороны, как ограничение на шаг дискретизации для заданных параметров системы, с другой стороны, ограничение на параметры механической системы для заданного шага Δt , как формы характеристики вычислительной трудоемкости.

В результате могут быть получены ограничения на коэффициенты рычажных связей, используемых в модели:

$$\max \left(\frac{k(\Delta t)^2 - 2M}{4m}, \quad \frac{k(\Delta t)^2 - 8Jc^2}{4m} \right) < i^2.$$

Полученное условие определяет ограничение на рычажные связи непрерывной модели, исходя из требований к устойчивости численной схемы и ограничений на вычислительные ресурсы.

Заключение. В статье предложено развитие методов структурно-аналитического подхода к оценке динамических состояний механических колебательных систем с рычажными связями, основанное на согласовании математической модели объекта с её численной реализацией. Показано, что применение Z-преобразования к разностным схемам позволяет получить явные условия устойчивости вычислительного алгоритма, связывающие шаг дискретизации с физическими параметрами системы.

Построена структурная схема системы в дискретном времени с учётом инерционных свойств рычажных связей. Получена дискретная передаточная функция на основе Z -преобразования, являющаяся дискретным аналогом непрерывной модели. Выведены условия устойчивости в терминах расположения полюсов на Z -плоскости, имеющие физическую интерпретацию в терминах затухания свободных колебаний. Показано, что обеспечение устойчивости требует согласования шага дискретизации и параметров модели, включая массы на рычагах и передаточные отношения. Установлено, что рычажные связи увеличивают эффективную массу системы, что позволяет увеличить шаг дискретизации без потери устойчивости численного решения. Сформулирован принцип двусторонней ограниченности вычислительной моделируемости: физические параметры механической системы $\{M, J, k, m, l\}$ определяют не только её динамические свойства, но и саму возможность устойчивого численного представления. Условие $\Delta t_{\min} < \Delta t_{\text{crit}}$ выделяет класс систем, для которых существует непустое множество устойчивых численных схем при условии ограничений на вычислительные ресурсы.

Результаты могут быть использованы при выборе шага дискретизации для численного моделирования вибрационных технологических машин с рычажными механизмами, при верификации алгоритмов по экспериментальным данным, а также при разработке методик обучения структурному моделированию.

Список литературы

1. Harris C.M., Piersol A.G. Shock and Vibration Handbook. – New York: McGraw Hill Book Co, 2002. – 1457 p.
2. Вибрации в технике: Справочник: В 6 т. / Под ред. В.Н. Челомея. – М.: Машиностроение, 1978-1981.
3. Eliseev A.V., Kuznetsov N.K. Mathematical Modeling in Machine Transport Dynamics. – Hershey: IGI Global Scientific Publishing, 2026. – 404 p. – DOI: 10.4018/979-8-3373-0447-2.
4. Eliseev A.V. Structural Mathematical Modeling Applications in Technological Machines and Transportation Vehicles. – Hershey: IGI Global, 2023. – 288 p. – DOI: 10.4018/978-1-6684-7237-8.
5. Bathe K.-J. Finite Element Procedures. – Klaus-Jürgen Bathe, 2006. – 1037 p.
6. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П., Засядко А.А. Динамический синтез в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов. – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 2008. – 523 с.
7. Елисеев С.В., Кашуба В.Б., Кинаш Н.Ж., Елисеев А.В. Динамическое гашение колебаний: введение дополнительных связей, рычажные взаимодействия и физические эффекты // Вестник Иркутского государственного технического университета. – 2017. – Т. 21, №1. – С. 10-23. – DOI: 10.21285/1814-3520-2017-1-10-23.
8. Цыпкин Я.З. Теория линейных импульсных систем. – М.: Физматгиз, 1963. – 960 с.
9. Ogata K. Discrete-Time Control Systems. – Upper Saddle River: Prentice Hall, 1995. – 1012 p.
10. Lax P.D., Richtmyer R.D. Survey of the stability of linear finite difference equations // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1956, vol. 9, pp. 267-293.
11. Флетчер Р. Вычислительные методы в динамике жидкостей. – М.: Мир, 1991. – 552 с.
12. Лурье А.И. Операционное исчисление и применение в технических приложениях. – М.: Наука, 1959. – 368 с.

Сведения об авторах:

Елисеев Андрей Владимирович – к.т.н., доцент кафедры «Математики»;
Николаев Андрей Владимирович – аспирант.