

## ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ПОЛЕ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ СИЛ ИНЕРЦИИ

*Савелькаев С.В.*

*Сибирский государственный университет геосистем и технологий, Новосибирск*

**Ключевые слова:** задача двух тел, уравнения движения, сложное переносно-относительное поступательное движение, динамическое гравитационное поле, относительность времени, скорость передачи импульса.

**Аннотация.** В статье рассмотрена механическая система, состоящая из двух тел с массами  $m_1$  и  $m_2$ , взаимодействующих жесткой связью  $R$ , которая шарнирно установлена на каждом из этих тел с возможностью их относительного вращательного движения. Автор показал, в результате сложного переносно-относительного поступательного движения тела  $m_1$  и  $m_2$  механической системы возбуждают ее собственное центральное динамическое гравитационное поле притяжения, оказывающее действие на эту систему эквивалентное внешнему. Исходя из принципа Д'Аламбера и аксиомы связи для относительных сил инерции получены уравнения движения каждого из тел  $m_1$  и  $m_2$  в отдельности. Показано, что время в их собственных системах отсчета и их центра масс по отношению к времени в неподвижной лабораторной системе отсчета относительно и зависит от соотношения масс этих тел.

## DYNAMICS OF MECHANICAL SYSTEMS IN A FIELD OF RELATIVE INERTIAL FORCES

*Savel'kaev S.V.*

*Siberian State University of Geosystems and Technologies, Novosibirsk*

**Keywords:** two-body problem, equations of motion, complex translational motion, dynamic gravitational field, relativity of time, momentum transfer rate.

**Abstract.** This article examines a mechanical system consisting of two bodies with masses  $m$  and  $m$  interacting via a rigid link, which is pivotally mounted on each of these bodies to allow for their relative rotational motion. The author demonstrates that, as a result of the complex translational and relative motion of the bodies and the mechanical system, they generate their own central dynamic gravitational field of attraction, exerting an effect on the system equivalent to an external force. Based on D'Alembert's principle and the constraint axiom for relative inertial forces, equations of motion for each of the bodies and for each other are derived. It is shown that time in their own reference frames and their center of mass relative to time in a stationary laboratory reference frame is relative and depends on the ratio of the masses of these bodies.

### Введение

В теоретической механике силы инерции рассматривают с различных точек зрения [1].

Согласно одной из них, сила инерции является фиктивной силой [2], которую необходимо приложить к каждому из взаимодействующих тел  $m_i$  и  $m_j$ , чтобы придать второму закону Ньютона с учетом аксиомы связей наиболее удобную форму равновесия в виде принципа Д'Аламбера

$$\vec{\Phi}_i + \vec{R}_{ij} + \vec{F}_i = 0; i, j = 1, 2; i \neq j, \quad (1)$$

где  $\vec{\Phi}_i = -m_i \vec{a}_i$  – сила инерции  $i$ -го тела в неподвижной лабораторной системе отсчета  $K$  и его абсолютное ускорение в этой системе отсчета;  $\vec{R}_{ij} = -\vec{R}_{ji}$  – реакции

связи  $R$  тел  $m_i$  и  $m_j$ ;  $F_i$  – внешняя сила, приложенная к  $i$ -му телу в лабораторной системе отсчета  $K$ .

Сила инерции  $\vec{\Phi}_i$  в принципе Д’Аламбера (1) учитывает не инерциальность собственной системы отсчета  $K_i$  тела  $m_i$ , для которой он записан так, что этот принцип инвариантен как по отношению к этой системе отсчета  $K_i$ , так и по отношению к лабораторной системе отсчета  $K$ .

Тогда сила инерции  $\vec{\Phi}_i$  в принципе Д’Аламбера (1) имеет статус активной силы, что противоречит точке зрения о ее фиктивности [2].

Согласно другой точке зрения сила инерции считается приложенной по частям к ускоряющему телу и направлена по направлению силы инерции ускоряемого (рабочего) тела [1]. Для обоснования приводятся следующие рассуждения. Материальное тело движется с ускорением  $a_i$  потому, что на него действует какие-то другие тела с силой  $\vec{F}_i + \vec{R}_{ij}$ . По третьему закону Ньютона материальная точка должна оказывать противодействие этим телам с такой же по модулю, но противоположной по направлению силой  $-\vec{F}_i - \vec{R}_{ij}$ , которая согласно принципу Д’Аламбера (1) равна силе инерции  $\vec{\Phi}_i = -\vec{F}_i - \vec{R}_{ij}$ .

Согласно третьей точке зрения, силу инерции считают приложенной к движущемуся телу противоположно его ускорению [1].

В представленной статье на основе обзора работ [3-16] по отношению к замкнутой ( $\vec{F}_i = 0$ ) МС2, состоящей из двух взаимодействующих тел  $m_i$  и  $m_j$  введены в рассмотрение три вида сил инерции.

Собственная сила инерции  $\vec{\Phi}_i = -m_i \frac{d}{dt} \vec{v}_i = -m_i \vec{a}_i$ ;  $i=1,2$  опорного (ускоряющего) тела  $m_i$ , входящая в принцип Д’Аламбера (1), которая приложена к опорному телу  $m_i$ , совершающему вместе с его собственной системой отсчета  $K_i$  в лабораторной системе отсчета  $K$  абсолютное движение, где  $\vec{v}_i$  и  $\vec{a}_i$  – абсолютные скорость и ускорение тела  $m_i$  в лабораторной системе отсчета  $K$ .

Собственная сила инерции  $\vec{\Phi}_i$  приложена к  $i$ -му телу и направлена противоположно его абсолютному ускорению  $\vec{a}_i$ . Она характеризует физическое свойство опорного тела  $m_i$  противодействовать искривлению траектории его равномерного прямолинейного движения в лабораторной системе отсчета  $K$ . Выбор опорного тела из двух тел МС2 при их равных массах  $m_i = m_j$  равноправен. Если  $m_i > m_j$ , то за опорное тело следует выбирать тело с большей массой.

Переносная сила инерции  $\vec{\Phi}_{je} = -\frac{d}{dt} m_j \vec{v}_{je} = -\frac{d}{dt} m_j \vec{a}_{je}$ ;  $i, j=1,2; i \neq j$  рабочего тела  $m_j$ , где  $\vec{v}_{je} = \vec{v}_i$  и  $\vec{a}_{je} = \vec{a}_i$  – его переносные скорость и ускорение вместе с собственной системой отсчета  $K_i$  опорного тела  $m_i$ . Она приложена к рабочему телу  $m_j$ , которое в лабораторной системе отсчета  $K$  совершает движение с переносной скоростью  $\vec{v}_{je} = \vec{v}_i$ .

Относительная сила инерции  $\vec{\Phi}_{ji} = -\frac{d}{dt}m_j\vec{v}_{ji} = -m_j\vec{a}_{ji}; i, j = 1, 2; i \neq j$ .

рабочего тела  $m_j$ . Она приложена к этому телу и, в соответствии с аксиомой связей для относительных сил инерции, оказывает влияние на движение опорного тела  $m_i$  в лабораторной системе отсчета  $K$ .

Кроме того, введено в рассмотрение поле относительных сил инерции  $\vec{F}_{iC,O}$  и  $\vec{F}_{jC,O}$  (центральное динамическое гравитационное поле притяжения в виде инерционного домена (ИД) с силовым центром  $O$ ). Это поле формируют взаимодействующие тела  $m_i$  и  $m_j$  из-за участия каждого из этих тел в сложном переносно-относительном поступательном движении в лабораторной системе отсчета  $K$  [5-9].

Для начальных импульсов  $\vec{p}_i(0) = -\vec{p}_j(0)$  тел  $m_i$  и  $m_j$  с равными массами  $m_i = m_j$  их ЦМ  $C$  совпадает силовым центром  $O$  ИД. При этом в соответствии с аксиомой связей относительная сила инерции  $\vec{F}_{iC}$  тела  $m_i$  действует на тело  $m_j$ , а относительная сила инерции  $\vec{F}_{jC}$  тела  $m_j$  – на тело  $m_i$ .

Если же начальные импульсы этих тел составляют  $\vec{p}_i(0) = 0; \vec{p}_j(0) \neq 0$ , то ЦМ  $C$  МС2 не совпадает с силовым центром  $O$  ИД и совершает относительно этого центра равномерное движение по замкнутой геодезической траектории в виде окружности  $s_C$  под действием поля относительных сил инерции  $\vec{F}_{iO}$  и  $\vec{F}_{jO}$ .

Для этих двух случаев выписаны уравнения движения тел  $m_i$  и  $m_j$  замкнутой МС2 и ее ЦМ  $C$  в поле ее ИД.

### Уравнение динамики двухмассовой механической системы с диаметральным распределением ее масс

Вывод уравнения динамики замкнутой МС2 в поле ее ИД с диаметральным распределением масс осуществим на примере ее кинематической схемы [3-9], показанной на рисунке 1, а.

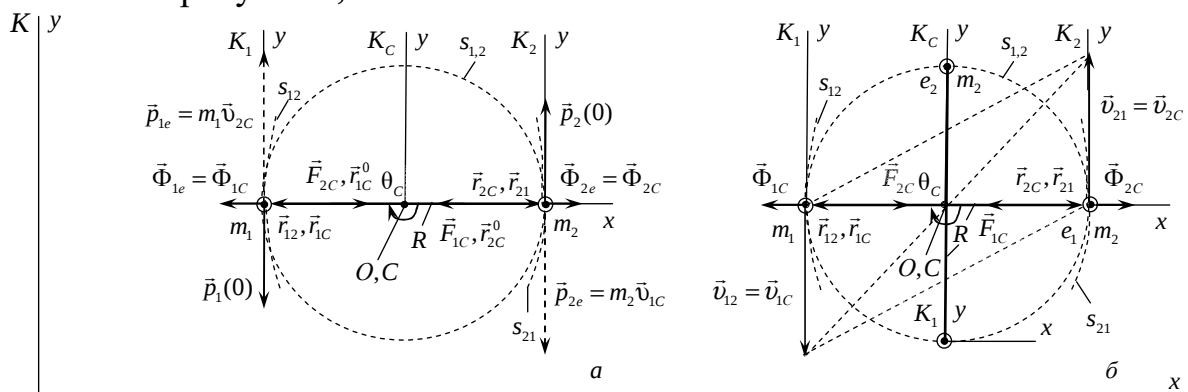


Рис. 1. Двухмассовая механическая система с диаметральным распределением тел  $m_1$  и  $m_2$  – а и карта событий  $e_1$  и  $e_2$  ее тела  $m_2$  – б

Ее тела  $m_1$  и  $m_2$  связаны между собой жестким прямолинейным стержнем  $R = r_{12} = r_{21}$ , который установлен на них с помощью идеальных шарниров, что обеспечивает их плоское относительное поступательное движение в собственных системах отсчета  $K_2$  и  $K_1$  диаметально противоположных тел  $m_2$  и  $m_1$  по

траекториям  $s_{12}$  и  $s_{21}$  в виде окружностей (на рис. 1, *a* показаны частично), а также одновременное сложное плоское переносно-относительное поступательное движение этих тел в системе отсчета  $K_C$ , связанной с их ЦМ  $C$ , по траектории  $s_{1,2}$  (общей при массах  $m_1 = m_2$ ), так, что оси координат систем отсчета  $K_C$ ,  $K_1$  и  $K_2$ , а также неподвижной лабораторной системы отсчета  $K$  всегда параллельны.

Траектории  $s_{1,2}$  движения тел  $m_1$  и  $m_2$  в системе отсчета  $K_C$  определены радиус-векторами  $\vec{r}_{1C}$  и  $\vec{r}_{2C}$ , а траектории  $s_{12}$  и  $s_{21}$  их движения в собственных системах отсчета  $K_2$  и  $K_1$  диаметрально противоположных тел  $m_2$  и  $m_1$  – радиус-векторами  $\vec{r}_{12}$  и  $\vec{r}_{21}$ .

Количество независимых координат рассматриваемой МС2 в плоском движении при  $R = r_{12} = r_{21} = \text{const}$  определяется двумя полярными координатами  $r_{1C}$  и  $\varphi_{1C}$  тела  $m_1$  в системе отсчета  $K_C$  ЦМ  $C$  и дополнительно одной полярной координатой  $\varphi_{21}$  тела  $m_2$  в собственной системе отсчета  $K_1$  тела  $m_1$  или же двумя полярными координатами  $r_{2C}$  и  $\varphi_{2C}$  тела  $m_2$  в системе отсчета  $K_C$  ЦМ  $C$  и дополнительно одной полярной координатой  $\varphi_{12}$  тела  $m_1$  в собственной системе отсчета  $K_2$  тела  $m_2$ . Полярные координаты  $\varphi_{12} = -\varphi_{21}$  являются зависимыми.

Таким образом, число независимых координат для однозначного описания плоского движения МС2 в системе отсчета  $K$  составляет  $N = 3$  из общего числа ее степеней свободы  $s = n + m - l = 2 + 2 - 1 = 5$ , где  $n = 3$  и  $m = 3$  – количество степеней свободы тел  $m_1$  и  $m_2$  в системе отсчета  $K$ ;  $l = 1$  – одна связь стержнем  $R$ . При этом общее число степеней свободы  $s = 5$  определяет полную энергию  $E$  МС2, которая включает в себя как кинетическую энергию  $T$  ее тел  $m_1$  и  $m_2$ , так и потенциальную энергию  $U$  этих тел в поле их ИД.

И действительно, при  $s = 5$  тела  $m_1$  и  $m_2$  МС2 совершают в системе отсчета  $K$  сложное плоское переносно-относительное поступательное движение с абсолютными скоростями:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{ie} + \vec{v}_{ij}; \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j, \quad (2)$$

где  $\vec{v}_{ie}$  и  $\vec{v}_{ij}$  – переносная скорость  $i$ -го тела в лабораторной системе отсчета  $K$  и его относительная скорость в собственной системе отсчета  $K_j$   $j$ -го тела.

Для начальных импульсов тел  $m_1$  и  $m_2$  равных  $\vec{p}_i(0) = -\vec{p}_j(0)$  движение этих тел в системе отсчета  $K_C$  характеризуется диаметрально распределением

$$\theta_C = \varphi_{21} - \varphi_{1C} = -\arccos(p_i(0) / p_j(0)) = -\pi, \quad (3)$$

где  $\theta_C$  – угол запаздывания фазы  $\varphi_{1C} = \varphi_{21} + \theta_O = \varphi_{21} - \pi$  поступательного движения тела  $m_1$  в системе отсчета  $K_C$  относительно фазы  $\varphi_{21}$  поступательного движения тела  $m_2$  в собственной системе отсчета  $K_1$  тела  $m_1$ .

Полагаем, что каждое из тел рассматриваемой замкнутой МС2 удовлетворяет принципу Д'Аламбера (1).

Тогда в соответствии с аксиомой связей рабочее тело  $m_j$  можно условно отбросить и заменить реакцию его связи  $\vec{R}_{ij} = \vec{\Phi}_{ij}$  относительной силой инерции  $\vec{\Phi}_{ij} = -m_j \vec{a}_{ij}$  этого тела. В результате получим уравнение динамики оставшегося

опорного тела  $m_i$  замкнутой МС2 в виде принципа Д'Аламбера или второго закона Ньютона в поле относительной силы инерции отброшенного рабочего тела  $m_j$ :

$$\vec{\Phi}_i + \vec{\Phi}_{ji} = 0; m_i \vec{a}_i = \vec{\Phi}_{ji}; i, j = 1, 2; i \neq j, \quad (4)$$

где  $\vec{a}_i$  и  $\vec{a}_{ij}$  – абсолютное ускорение опорного тела  $m_i$  в лабораторной системе отсчета  $K$  и относительное ускорение рабочего тела  $m_j$  в собственной системе отсчета  $K_i$  опорного тела  $m_i$ .

Определим относительные силы инерции  $\vec{\Phi}_{12}$  и  $\vec{\Phi}_{21}$  (4) взаимодействующих тел  $m_1$  и  $m_2$  для их сложного плоского переносно-относительного поступательного движения в системе отсчета  $K$ . Для этого, с учетом абсолютных скоростей  $\vec{v}_i$  (2) этих тел выразим кинетическую энергию их переносно-относительного движения в виде [8]

$$T_{er} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i^2 = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{2e}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{1e}^2 + \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{12}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{21}^2 + U, \quad (5)$$

где  $U$  – обобщенный кинетический потенциал:

$$U = m_1 v_{1e} v_{12} \cos \theta_C + m_2 v_{2e} v_{21} \cos \theta_C = -(m_1 v_{2C} v_{12} + m_2 v_{1C} v_{21}), \quad (6)$$

характеризующий вклад относительного  $\vec{v}_{12r}, \vec{v}_{21r}$  движения тел  $m_1$  и  $m_2$  в их переносное движение  $\vec{v}_{1e} = \vec{v}_{2C}, \vec{v}_{2e} = \vec{v}_{1C}$ ; где  $\theta_C = \angle \vec{v}_{2e} \vec{v}_{21} = -\pi$  или же  $\theta_C = \angle \vec{v}_{1e} \vec{v}_{12} = \pi$  – угол между векторами переносных  $\vec{v}_{1e}, \vec{v}_{2e}$  и относительных  $\vec{v}_{12}, \vec{v}_{21}$  скоростей (см. рис. 1, а).

Сумма первого и второго слагаемых, входящих в  $T_{er}$  (5), является кинетической энергией переносного движения тел  $m_1$  и  $m_2$  МС2

$$T_{Ce} = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{1e}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{2e}^2 = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{2C}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{1C}^2 = \frac{1}{2} m \vec{v}_{Ce}^2, \quad (7)$$

которое характеризуется их переносными импульсами  $\vec{p}_{1e} = m_1 \vec{v}_{2C}$  и  $\vec{p}_{2e} = m_2 \vec{v}_{1C}$  вместе с собственными системами отсчета  $K_2$  и  $K_1$  диаметрально противоположных тел  $m_2$  и  $m_1$ , что определяет физический смысл рассматриваемой суммы  $T_{Ce}$ .

Сумма третьего и четвертого слагаемых кинетической энергии  $T_{er}$  (5) является кинетической энергией  $T_r = \frac{1}{2} m_1 v_{12}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{21}^2$  относительного движения тела  $m_1$  в системе отсчета  $K_2$  и тела  $m_2$  в системе отсчета  $K_1$ .

Потенциал  $U$  (6) определяет относительные силы инерции [8]

$$\begin{aligned} \vec{F}_{1C} &= -\frac{\partial U}{\partial r_{2C}} \cdot \vec{r}_{2C}^0 = m_1 \omega_{2C} \omega_{12} r_{12} \cdot \vec{r}_{2C}^0; \\ \vec{F}_{2C} &= -\frac{\partial U}{\partial r_{1C}} \cdot \vec{r}_{1C}^0 = m_2 \omega_{1C} \omega_{21} r_{21} \cdot \vec{r}_{1C}^0, \end{aligned} \quad (8)$$

образованного ими ИД, с силовым центром  $O$  с которым для диаметрального распределения  $\theta_C = -\pi$  (3) совпадает ЦМ  $C$  МС2 (см. рис. 1, а), где  $\vec{r}_{1C}^0 = -\vec{r}_{1C} / r_{1C}$

и  $\vec{r}_{2C}^0 = -\vec{r}_{1C}^0 / r_{2C}$  – единичные векторы противоположно направленные радиус-векторам  $\vec{r}_{1C}$  и  $\vec{r}_{2C}$  и определяющие направление относительных сил инерции  $\vec{F}_{2C}$  и  $\vec{F}_{1C}$  к ЦМ  $C$  (см. рис. 1, *a*, где выбор направлений  $\vec{r}_{1C}^0$  и  $\vec{r}_{2C}^0$  подлежит дальнейшему обоснованию);  $\omega_{1C} = \omega_{2C} = \omega_C$  и  $\omega_{12}$ ,  $\omega_{21}$  – угловые скорости движения тел  $m_1$  и  $m_2$  в системе отсчета  $K_C$  и их угловые скорости в собственных системах отсчета  $K_2$  и  $K_1$  диаметрально противоположных тел  $m_2$  и  $m_1$ , которые в работах [3-5, 8] выражены в виде:

$$\begin{aligned} \omega_C &= \omega_{1C} = \omega_{2C} = \omega_{12} + \omega_{21}; \\ \omega_{12} &= \frac{m_2 \omega_C}{m_1 + m_2}; \quad \omega_{21} = \frac{m_1 \omega_C}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Исходя из кинематической реализуемости движения тел  $m_1$  и  $m_2$  МС2 без ее разрушения связи  $R$ , необходимо, чтобы угловые перемещения этих тел в системах отсчета  $K$ ,  $K_C$ ,  $K_1$  и  $K_2$  являлись инвариантом

$$\Delta\varphi = \omega_C \Delta t_C = \omega_{12} \Delta t_2 = \omega_{21} \Delta t_1, \quad (10)$$

где  $\Delta t_1 = t_1 - t_0$ ,  $\Delta t_2 = t_2 - t_0$  и  $\Delta t_C = t_C - t_0$  – приращение времени;  $t_0$  – единое начальное время во всех системах отсчета.

Инвариант (10) определяет то, что при любом угловом перемещении тела  $m_1$  в системах отсчета  $K_C$  и  $K_2$ , а также тела  $m_2$  в системах отсчета  $K_C$  и  $K_1$  эти тела находятся в одной точке траектории  $s_{1,2}$  системы отсчета  $K$  как, например, для тела  $m_2$  при  $\Delta\varphi = \{0; \pi/2\}$  показано на рисунке 1, *b* событиями  $e_1$  и  $e_2$ .

Преобразования (9) совместно с инвариантом  $\Delta\varphi$  (10) требуют введения собственного времени в системах отсчета  $K_1$  и  $K_2$

$$t_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} t; \quad t_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_2} t. \quad (11)$$

Время в системах отсчета  $K$  и  $K_C$  абсолютно  $t_C = t$ .

С учетом относительных сил инерции  $\vec{F}_{1C}$  и  $\vec{F}_{2C}$  (8), образующих ИД, уравнение динамики замкнутой МС2 в форме принципа Д'Аламбера и второго закона Ньютона (5) примут вид:

$$\vec{\Phi}_i + \vec{F}_{jC} = 0; \quad m_i \vec{a}_i = \vec{F}_{jC}; \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j, \quad (12)$$

где индекс  $C$  соответствует диаметральному распределению  $\theta_C = -\pi$  (3) тел  $m_1$  и  $m_2$  в системе отсчета  $K_C$ .

Для равных масс  $m_1 = m_2$  тел МС2 переносную кинетическую энергию  $T_{Ce}$  (7) посредством перестановки  $m_1 \Leftrightarrow m_2$  можно свести к кинетической энергии  $T_C$  ее тел в системе отсчета  $K_C$

$$T_{Ce} = T_C = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{1C}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{2C}^2 = \frac{1}{2} m \vec{v}_C^2. \quad (13)$$

Замена в (5)  $T_{Ce} = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{2e}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{1e}^2$  на  $T_C$  (13) дает лагранжиан  $L$  рассматриваемой МС2

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{2} m_1 \bar{v}_{1C}^2 + \frac{1}{2} m_2 \bar{v}_{2C}^2 + \frac{1}{2} m_1 \bar{v}_{12}^2 + \frac{1}{2} m_2 \bar{v}_{21}^2 + U = \\
 &= \frac{1}{2} m_1 \omega_{1C}^2 r_{1C}^2 + \frac{1}{2} m_2 \omega_{2C}^2 r_{2C}^2 + \frac{1}{2} m_1 \omega_{12}^2 r_{12}^2 + \frac{1}{2} m_2 \omega_{21}^2 r_{21}^2 - \\
 &\quad - (m_1 \omega_{2C} r_{2C} \omega_{12} r_{12} + m_2 \omega_{1C} r_{1C} \omega_{21} r_{21})
 \end{aligned} \tag{14}$$

для ее абсолютного движения в системе отсчета  $K$  при  $m_1 = m_2$ .

Частные дифференциалы от функции Лагранжа  $L$  (14) вида  $-\frac{\partial L}{\partial r_{1C}} = 0$  и  $-\frac{\partial L}{\partial r_{2C}} = 0$  дают обобщенные силы

$$\begin{aligned}
 -m_1 \omega_{1C}^2 r_{1C} + m_2 \omega_{1C} \omega_{21} r_{21} &= 0; \\
 -m_2 \omega_{2C}^2 r_{2C} + m_1 \omega_{2C} \omega_{12} r_{12} &= 0,
 \end{aligned} \tag{15}$$

которые определяют уравнения (12).

И действительно первые слагаемые (15) определяют собственные силы инерции  $\vec{\Phi}_1 = \vec{\Phi}_{1C} = -m_1 \omega_{1C}^2 \vec{r}_{1C}$  и  $\vec{\Phi}_2 = \vec{\Phi}_{2C} = -m_2 \omega_{2C}^2 \vec{r}_{2C}$  тел  $m_1$  и  $m_2$  (см. рис.1, а), которые направлены от силового центра  $O$  с которым совпадает ЦМ  $C$ .

Вторые слагаемые определяют относительные силы инерции  $\vec{F}_{1C} = m_1 \omega_{2C} \omega_{12} r_{12} \cdot \vec{r}_{2C}^0$  и  $\vec{F}_{2C} = m_2 \omega_{1C} \omega_{21} r_{21} \cdot \vec{r}_{1C}^0$  (8), где выбор направления единичных векторов  $\vec{r}_{1C}^0 = -\vec{r}_{1C} / r_{1C}$  и  $\vec{r}_{2C}^0 = -\vec{r}_{2C} / r_{2C}$  к силовому центру  $O$  (см. рис. 1, а) определен тем, что относительным силам инерции  $\vec{F}_{1C}$  и  $\vec{F}_{2C}$  противодействуют собственные силы инерции  $\vec{\Phi}_1$  и  $\vec{\Phi}_2$  тел  $m_1$  и  $m_2$  (15).

Для диаметрального распределения  $\theta_C = -\pi$  (3) относительные силы инерции  $\vec{F}_{1C}$  и  $\vec{F}_{2C}$  тел  $m_1$  и  $m_2$  (8), образующие ИД, действуют соответственно на диаметрально противоположные тела  $m_2$  и  $m_1$  в виде уравновешенной системы сил  $\vec{F}_{1C} + \vec{F}_{1C} = 0$ . Следовательно, в этом случае ИД не оказывает влияния на движение замкнутой МС2 в системе отсчета  $K$ , которое с учетом замены (14) является абсолютным, так как импульс ее ЦМ  $C$  с диаметральным распределением  $\theta_C = -\pi$  (3) сохраняется  $\vec{p}_C = \text{const}$ .

При не равных массах  $m_1 \neq m_2$  тел МС2 ее необходимо свести к одному телу с массой  $m = m_1 + m_2$  с уравнениями его движения вида [10–16]:

$$\begin{aligned}
 m \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} &= \vec{\Phi}_{21} + \vec{F}_1; \vec{\Phi}_1 + \vec{\Phi}_{21} + \vec{F}_1 = 0 \\
 \text{или} \\
 m \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} &= \vec{\Phi}_{12} + \vec{F}_2; \vec{\Phi}_2 + \vec{\Phi}_{12} + \vec{F}_2 = 0.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Если  $m_1 > m_2$ , то тело  $m_1$  следует выбрать за опорное и в качестве независимых координат выбрать полярные координаты  $r_{1C}$ ,  $\varphi_{1C}$  и  $\varphi_{21}$  (первые два уравнения (16)), тогда как при  $m_2 > m_1$  за опорное тело следует выбрать тело  $m_2$ , а

в качестве независимых координат – полярные координаты  $r_{2C}$ ,  $\varphi_{2C}$  и  $\varphi_{12}$  (последние два уравнения (16)).

Решения уравнений (4) и (16) подробно рассмотрены в работах [3-16].

### Уравнение динамики двухмассовой механической системы с радиальным распределением ее масс

Вывод уравнения динамики замкнутой МС2 с радиальным распределением масс в поле ее ИД [8, 9] осуществим на примере замкнутой МС2, показанной на рисунке 2.

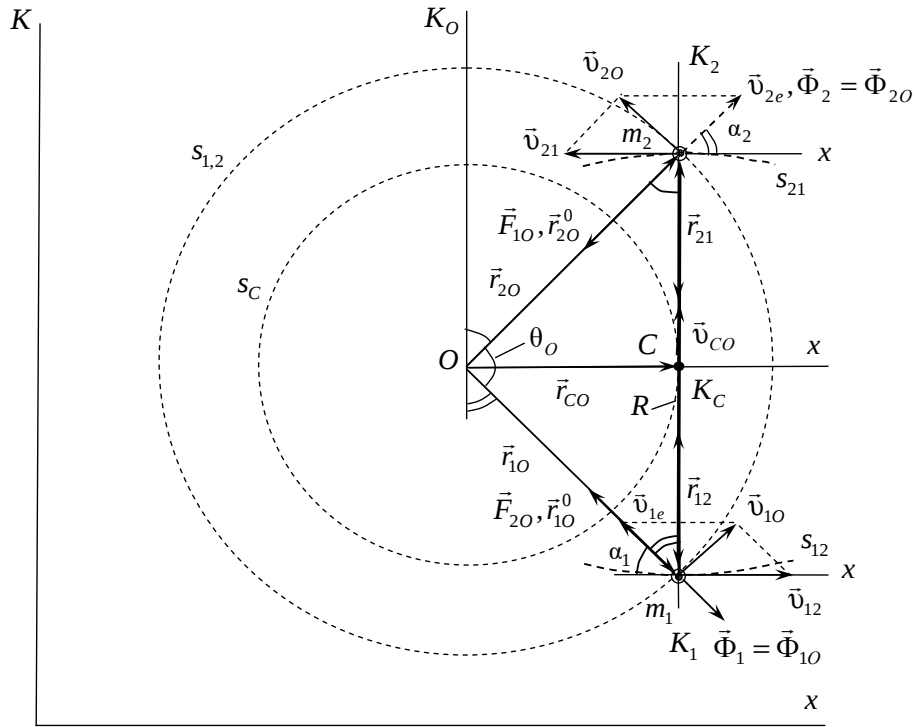


Рис. 2. Двухмассовая механическая система с радиальным распределением масс тел  $m_1$  и  $m_2$

Ее тела  $m_1$  и  $m_2$  связаны между собой жестким прямолинейным стержнем  $R = r_{12} = r_{21}$ , который установлен на них с помощью идеальных шарниров, что обеспечивает их относительное плоское поступательное движение в собственных системах отсчета  $K_2$  и  $K_1$  диаметрально противоположных тел  $m_2$  и  $m_1$  по траекториям  $s_{12}$  и  $s_{21}$  в виде окружностей (на рис. 1, а показаны частично), а также одновременное сложное плоское переносно-относительное поступательное движение этих тел в системе отсчета  $K_O$ , связанной с силовым центром  $O$  ИД, по траектории  $s_{1,2}$  (общей при массах  $m_1 = m_2$ ), так, что оси координат систем отсчета  $K_O, K_1$  и  $K_2$ , а также неподвижной лабораторной системы отсчета  $K$  всегда параллельны.

При радиальном распределении  $\theta_0 = \pi / 2$  (17) траектории  $s_{1,2}$  движения тел  $m_1$  и  $m_2$  в системе отсчета  $K_O$ , связанной с силовым центром  $O$  ИД, определены радиус-векторами  $\vec{r}_{10}$  и  $\vec{r}_{20}$ , а траектории  $s_{12}$  и  $s_{21}$  их движения в собственных системах отсчета  $K_2$  и  $K_1$  радиально противоположных тел  $m_2$  и  $m_1$  – радиус-векторами  $\vec{r}_{12}$  и  $\vec{r}_{21}$ .

Количество независимых координат рассматриваемой МС2 в плоском движении при  $R = r_{12} = r_{21} = \text{const}$  определяется двумя полярными координатами  $r_{1O}$  и  $\varphi_{1O}$  тела  $m_1$  в системе отчета  $K_O$  и дополнительно одной полярной координатой  $\varphi_{21}$  тела  $m_2$  в собственной системе отсчета  $K_1$  тела  $m_1$  или же двумя полярными координатами  $r_{2O}$  и  $\varphi_{2O}$  тела  $m_2$  в системе отчета  $K_O$  и дополнительно одной полярной координатой  $\varphi_{12}$  тела  $m_1$  в собственной системе отсчета  $K_2$  тела  $m_2$ . Полярные координаты  $\varphi_{12} = -\varphi_{21}$  являются зависимыми. Выбор опорного тела из двух тел  $m_1$  и  $m_2$  равноправен.

Таким образом, число независимых координат МС2 для плоского движения составляет  $N = 3$  из общего числа ее степеней свободы  $s = n + m - l = 2 + 2 - 1 = 5$ , где  $n = 3$  и  $m = 3$  – количество степеней свободы тел  $m_1$  и  $m_2$  в системе отсчета  $K$ ;  $l = 1$  – одна связь стержнем  $R$ . При этом общее число степеней свободы  $s = 5$  определяет полную энергию  $E$  МС2, которая содержит как кинетическую энергию  $T$  ее тел  $m_1$  и  $m_2$ , так и их потенциальную энергию  $U$  в поле ИД, которое для радиального распределения тел  $m_1$  и  $m_2$  в системе отсчета  $K_O$  с учетом применения замены вида (15) оказывает существенное влияние на абсолютное движение МС2 в системе отсчета  $K$ .

И действительно, при  $s = 5$  тела  $m_1$  и  $m_2$  МС2 совершают в системе отсчета  $K$  сложное переносно-относительное поступательное движение с абсолютными скоростями  $\vec{v}_i = \vec{v}_{ie} + \vec{v}_{ij}$ ;  $i, j = 1, 2$ ;  $i \neq j$  (2).

Для начальных импульсов тел  $m_1$  и  $m_2$  равных  $\vec{p}_1(0) = 0$  и  $\vec{p}_2(0) > 0$  движение этих тел в системе отсчета  $K_O$ , связанной с силовым центром  $O$  ИД, характеризуется диаметрально распределением

$$\theta_O = \arccos(p_1(0)/p_2(0)) = \pi / 2, \quad (17)$$

где  $\theta_O$  – угол запаздывания фазы  $\theta_O = \varphi_{2O} - \varphi_{1O} = \pi/2$  поступательного движения тела  $m_1$  относительно фазы  $\varphi_{2O}$  поступательного движения тела  $m_2$  в системе отсчета  $K_O$  в стационарном состоянии МС2, как показано на рисунке 2.

Для радиального распределения  $\theta_O = \pi / 2$  (17) уравнение динамики замкнутой МС2 (12) представим в виде:

$$\vec{\Phi}_i + \vec{F}_{jO} = 0; m_i \vec{a}_i = \vec{F}_{jO}; i, j = 1, 2; i \neq j. \quad (18)$$

где  $\vec{\Phi}_i = -m_i \vec{a}_i$  – собственная сила инерции  $i$ -го тела в месте с собственной системой отсчета  $K_i$  в системе отсчета  $K$ ;  $\vec{F}_{jO}$  – относительная сила инерции тела  $j$ -го тела при его сложном переносно-относительном движении.

Индекс  $O$  определяет, то что при радиальном распределении  $\theta_O = \pi / 2$  (17) траектории движения  $s_{1,2}$  тел  $m_1$  и  $m_2$  определены радиус-векторами  $\vec{r}_{1O}$  и  $\vec{r}_{2O}$  в системе отсчета  $K_O$ , связанной с силовым центром  $O$  ИД.

Определим относительные силы инерции  $\vec{F}_{1O}$  и  $\vec{F}_{2O}$  тел  $m_1$  и  $m_2$  для их сложного плоского переносно-относительного поступательного движения в системе отсчета  $K$  для радиального распределения  $\theta_O = \pi / 2$  (17).

С учетом абсолютных скоростей  $\vec{v}_i$  (2) тел  $m_i$  выразим кинетическую энергию относительного движения МС2 в виде [8, 9]

$$T_{er} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i^2 = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{2e}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{1e}^2 + \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{12}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{21}^2 + U, \quad (19)$$

где  $U$  – обобщенный кинетический потенциал:

$$U = m_1 v_{1e} v_{12} \cos \varphi_1 + m_2 v_{2e} v_{21} \cos \varphi_2 = \\ - (m_1 v_{2C} v_{12} \cos \alpha_1 + m_2 v_{1C} v_{21} \cos \alpha_2) = \\ - (m_1 \omega_{2O} r_{2O} \omega_{12} r_{12} \cos \alpha_1 + m_2 \omega_{1O} r_{1O} \omega_{21} r_{21} \cos \alpha_2) \quad (20)$$

характеризующий вклад относительного  $\vec{v}_{12r}, \vec{v}_{21r}$  движения тел  $m_1$  и  $m_2$  в их переносное движение  $\vec{v}_{1e} = \vec{v}_{2C}, \vec{v}_{2e} = \vec{v}_{1C}$ , где  $\varphi_1 = \vec{v}_{1e} \vec{v}_{12} = \pi - \alpha_1$  и  $\varphi_2 = \vec{v}_{2e} \vec{v}_{21} = \pi - \alpha_2$  – острый угол между векторами переносных  $\vec{v}_{1e}, \vec{v}_{2e}$  и относительных  $\vec{v}_{12}, \vec{v}_{21}$  скоростей;  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – углы поворота переносных скоростей  $\vec{v}_{1e}$  и  $\vec{v}_{2e}$  относительно их ориентации при диаметральной распределении  $\theta_C = -\pi$  (см. рис. 1, а), которые для  $\alpha_1 + \alpha_2 = \theta_O = \pi/2$  определены как [8, 9]:

$$\alpha_1 = \text{arcctg}(\xi_1); \alpha_2 = \text{arctg}(\xi_2), \quad (21)$$

где  $\xi_1 = m_2 / m_1$ ;  $\xi_2 = \xi_1^{-1} = m_1 / m_2$  – соотношение масс тел  $m_1$  и  $m_2$ , а углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  отмечены на рис 2 соответственно одной дугой и двумя.

Потенциал  $U$  (20) определяет относительные силы инерции

$$\vec{F}_{1O} = - \frac{\partial U}{\partial r_{2O}} \cdot \vec{r}_{2O}^0 = m_1 \omega_{2O} \omega_{12} r_{12} \cos \alpha_1 \cdot \vec{r}_{2O}^0; \\ \vec{F}_{2O} = - \frac{\partial U}{\partial r_{1O}} \cdot \vec{r}_{1O}^0 = m_2 \omega_{1O} \omega_{21} r_{21} \cos \alpha_2 \cdot \vec{r}_{1O}^0, \quad (22)$$

образованного ими ИД с силовым центром  $O$ , с которым для радиального распределения  $\theta_O = \pi/2$  (17) не совпадает ЦМ  $C$  МС2 (см. рис. 2), где  $\vec{r}_{1O}^0 = -\vec{r}_{1O} / r_{1O}$  и  $\vec{r}_{2O}^0 = -\vec{r}_{2O} / r_{2O}$  – единичные векторы противоположно направленные радиус-векторам  $\vec{r}_{1O}$  и  $\vec{r}_{2O}$  и определяющие направление относительных сил инерции  $\vec{F}_{2O}$  и  $\vec{F}_{1O}$  к силовому центру  $O$  (см. рис. 2, где выбор направлений  $\vec{r}_{1O}^0$  и  $\vec{r}_{2O}^0$  подлежит дальнейшему обоснованию);  $\omega_{1C} = \omega_{2C} = \omega_C$  и  $\omega_{12}, \omega_{21}$  – угловые скорости движения тел  $m_1$  и  $m_2$  в системе отсчета  $K_C$  и в собственных системах отсчета  $K_2$  и  $K_1$  радиально противоположных тел  $m_2$  и  $m_1$ , которые в работах [8, 9] определены как:

$$\omega_C = \omega_{1C} = \omega_{2C} = \omega_{12} + \omega_{21} = \omega_{CO} \frac{m_1^2 + m_2^2}{m_1 m_2}; \quad (23)$$

$$\omega_{12} = \omega_{CO} \frac{m_2}{m_1}; \omega_{21} = \omega_{CO} \frac{m_1}{m_2};$$

$\omega_{CO} = \omega_{1O} = \omega_{2O}$  – угловая скорость ЦМ  $C$  и тел  $m_2$  и  $m_1$  в системе отсчета  $K_O$ .

Для радиального распределения  $\theta_O = \pi/2$  (17) относительные силы инерции  $\vec{F}_{1O}$  и  $\vec{F}_{2O}$  тел  $m_1$  и  $m_2$  (22), образующие ИД, действуют соответственно на

радиально противоположные тела  $m_2$  и  $m_1$ , так что их главный вектор не равен нулю  $\vec{F}_{1O} + \vec{F}_{2O} \neq 0$ .

Исходя из кинематической реализуемости движения тел  $m_1$  и  $m_2$  МС2 без разрушения связи  $R$ , необходимо, чтобы угловые перемещения этих тел в системах отсчета  $K$ ,  $K_C$ ,  $K_1$  и  $K_2$  являлись инвариантом

$$\Delta\varphi = \omega_{CO}\Delta t_{CO} = \omega_C\Delta t_C = \omega_{12}\Delta t_2 = \omega_{21}\Delta t_1, \quad (24)$$

где  $\Delta t_1 = t_1 - t_0$ ,  $\Delta t_2 = t_2 - t_0$  и  $\Delta t_C = t_C - t_0$  – приращение времени и  $t_0$  – единое начальное время во всех системах отсчета.

Инвариант  $\Delta\varphi$  (24) определяет то, что при любом угловом перемещении тела  $m_1$  в системах отсчета  $K_O$ ,  $K_C$  и  $K_2$ , а также тела  $m_2$  в системах отсчета  $K_O$ ,  $K_C$  и  $K_1$  эти тела будут находиться в одной точке траектории  $s_{1,2}$  системы отсчета  $K$  как, например, для тела  $m_2$  при  $\Delta\varphi = \{0; \pi/2\}$  показано на рисунке 1, б событиями  $e_1$  и  $e_2$  для диаметрального распределения  $\theta_C = -\pi$  (3).

Преобразования (23) совместно с инвариантом  $\Delta\varphi$  (24) требуют введения собственного времени в системах отсчета  $K_1$ ,  $K_2$  и  $K_C$

$$t_1 = \frac{m_1}{m_2}t; t_2 = \frac{m_2}{m_1}t; t_C = \frac{m_1 m_2}{m_1^2 + m_2^2}t \quad t_{CO} = t \quad (25)$$

При этом для  $m_1 = m_2$  время в системах отсчета  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_O$  и  $K$  абсолютно  $t_1 = t, t_2 = t$  и  $t_{CO} = t$ .

Замена в (19)  $T_{Ce} = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_{2e}^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_{1e}^2$  на  $T_C$  (13) дает лагранжиан  $L$  рассматриваемой МС2

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m_1\vec{v}_{1O}^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_{2O}^2 + \frac{1}{2}m_1\vec{v}_{12}^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_{21}^2 + U = \\ &= \frac{1}{2}m_1\omega_{1O}^2 r_{1O}^2 + \frac{1}{2}m_2\omega_{2O}^2 r_{2O}^2 + \frac{1}{2}m_1\omega_{12}^2 r_{12}^2 + \frac{1}{2}m_2\omega_{21}^2 r_{21}^2 - \\ &\quad - (m_1\omega_{2O}r_{2O}\omega_{12}r_{12}\cos\alpha_1 + m_2\omega_{1O}r_{1O}\omega_{21}r_{21}\cos\alpha_2) \end{aligned} \quad (26)$$

для ее абсолютного движения в системе отсчета  $K$  при  $m_1 = m_2$ .

Частные дифференциалы от функции Лагранжа  $L$  (26) вида  $-\frac{\partial L}{\partial r_{1O}} = 0$  и

$-\frac{\partial L}{\partial r_{2O}} = 0$  дают обобщенные силы

$$\begin{aligned} -m_1\omega_{1O}^2 r_{1O} + m_2\omega_{1O}\omega_{21}r_{21}\cos\alpha_2 &= 0; \\ -m_2\omega_{2O}^2 r_{2O} + m_1\omega_{2O}\omega_{12}r_{12}\cos\alpha_1 &= 0, \end{aligned} \quad (27)$$

которые определяют уравнения (18).

И действительно первые слагаемые (27) определяют собственные силы инерции  $\vec{F}_1 = \vec{F}_{1O} = -m_1\omega_{1O}^2 \vec{r}_{1O}$  и  $\vec{F}_2 = \vec{F}_{2O} = -m_2\omega_{2O}^2 \vec{r}_{2O}$  тел  $m_1$  и  $m_2$  (см. рис. 2), которые направлены от силового центра  $O$ . Вторые слагаемые определяют относительные силы инерции  $\vec{F}_{1O} = m_1\omega_{2O}\omega_{12}r_{12}\cos\alpha_1 \cdot \vec{r}_{2O}^0$  и

$\vec{F}_{2O} = m_2 \omega_{1O} \omega_{21} r_{21} \cos \alpha_2 \cdot \vec{r}_{1O}^0$  (22), где выбор направления единичных векторов  $\vec{r}_{1O}^0 = -\vec{r}_{1O} / r_{1O}$  и  $\vec{r}_{2O}^0 = -\vec{r}_{2O} / r_{2O}$  к силовому центру  $O$  (см. рис. 2) определен тем, что относительным силам инерции  $\vec{F}_{1O}$  и  $\vec{F}_{2O}$  (22) противодействуют собственные силы инерции  $\vec{\Phi}_1$  и  $\vec{\Phi}_2$  тел  $m_1$  и  $m_2$  (27).

Таким образом, для радиального распределения  $\theta_O = \pi/2$  (17) равных масс  $m_1 = m_2$  тел МС2 с числом степеней свободы  $s = 5$  произведение ее суммарной массы МС2 на ускорение  $\vec{a}_C = \vec{a}_{CO}$  ее ЦМ  $C$  равно действию на неё поля относительных сил инерции  $\vec{F}_{1O}$  и  $\vec{F}_{2O}$  ее взаимодействующих тел так, что циркуляция импульса  $\vec{p}_C$  МС2 по замкнутому контуру  $s_C$  равна нулю:

$$d\vec{p}_C / dt = \vec{F}_{1O} + \vec{F}_{2O} \neq \overrightarrow{\text{const}}; \Gamma = \oint \vec{p}_C d\vec{l} = 0. \quad (28)$$

Решение уравнений (18) и (28) с учетом переходного процесса, протекающего в МС2 при заданных начальных условиях, а также скорость передачи импульса между ее телами  $m_1$  и  $m_2$  подробно анализируются в работах [8, 9].

Для не равных масс  $m_1 \neq m_2$  тел МС2 ее необходимо свести к одному телу с массой  $m = m_1 + m_2$  с уравнениями движения вида (16).

Уравнение движения ЦМ  $C$   $d\vec{p}_C / dt = \vec{F}_{1O} + \vec{F}_{2O}$  замкнутой МС2 (28), допускает возможность его движения по замкнутой геодезической траектории  $s_C$  в поле ИД. При этом равенство циркуляции импульса  $\vec{p}_C$  нулю  $\Gamma = 0$  свидетельствует о не возможности безопорного направленного движения механических систем с постоянным тяговым усилием, тогда как известные движители типа инерциод [17–20], обеспечивающие в диссипативной среде импульсное перемещение из-за циклического прохождения их скорости через нуль создают динамические нагрузки, которые в совокупности с малым быстродействием таких движителей накладывают существенные ограничения на их практическое применение.

### Заключение

Согласно принципу эквивалентности гравитации и инерции по Эйнштейну [21], движение тел  $m_1$  и  $m_2$  по траекториям  $s_{1,2}$  и  $s_{12}, s_{21}$  можно рассматривать как движение по замкнутым геодезическим траекториям в поле относительных сил инерции (динамическом гравитационном поле [5-7]). Это также справедливо при взаимодействии этих тел тяготением Ньютона. При  $m_i \gg m_j$  тело  $m_i$  можно рассматривать как неподвижное, а динамическую гравитацию и тяготение – эквивалентными. Для случая когда  $R = \text{const}$  и  $s \leq 3$  для решения задачи двух тел, находящихся в диссипативной среде, можно использовать уравнение (4.65).

Основные результаты статьи базируются на принципе Д’Аламбера и аксиоме связей для относительных сил инерции и состоят в следующем:

1. Силы инерции это фундаментальное свойство материальных тел противодействовать изменению состояния их покоя либо равномерного прямолинейного движения при их взаимодействии любой природы (по закону Ньютона, Кулона или Гука). Так, например, взаимодействие материальных тел

тяготением Ньютона искривляет траектории их движения. При этом непосредственной первопричиной искривления траекторий движения материальных тел является их взаимодействие, а не массы (по Энштейну [21]), вызывающие это взаимодействие.

2. Связь тел двух тел механической системы (механическую или полем) можно условно отбросить, а ее реакцию заменить относительной силой инерции отбрасываемого тела, которой всегда будет противодействовать собственная сила инерции оставшегося опорного тела, оказывающая сопротивление искривлению траектории его движения [7].

3. Движение системы взаимодействующих материальных тел в поле относительных сил инерции является геодезическим и при отсутствии внешних воздействий – замкнутым, что допускает возможность безопорного движения только в области локально-искривленного взаимодействием пространства, что ставит под сомнение выводы работы [10-16].

4. Для двухмассовой механической системы с пятью степенями свободы время в собственных системах отсчета ее взаимодействующих материальных тел при их сложном переносно-относительном поступательном движении по отношению ко времени в системе отсчета их центра масс протекает по-разному и зависит от масс этих тел [3-5, 8, 9]. Время в системе отсчета центра масс этих тел при их диаметрально распределении и в какой-либо другой инерциальной системе отсчета абсолютно, тогда как для радиального распределения этих тел время в системе отсчета их центра масс и по отношению к времени в системе отсчета, связанной с силовым центром относительных сил инерции, протекает по-разному и зависит от масс тел. Время в системе отсчета этого силового центра и в какой-либо другой инерциальной системе отсчета абсолютно [8, 9].

5. Для двухмассовой механической системы с равными массами и их радиальным распределением, при числе ее степеней свободы равным пяти, произведение суммарной массы этой механической системы на ускорение ее центра масс равно действию на неё поля относительных сил инерции ее взаимодействующих тел так, что циркуляция импульса ее центра масс по замкнутому контуру равна нулю [8, 9].

#### Список литературы

1. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1990. – 607 с.
2. Гулиа Н.В. Инерция: Предисловие А. Ю. Ишлинского. – М.: Наука. Серия Наука и технический прогресс, 1982. – 152 с.
3. Савелькаев С.В. Динамический анализ двухмассовой механической системы с пятью степенями свободы в поле относительных сил инерции // Фундаментальные основы механики. – 2025. – №15. – С. 15-30. – doi.org/10.26160/2542-0127-2025-15-15-30.
4. Савелькаев С.В. Динамический анализ двухмассовой механической системы в поле относительных сил инерции ее взаимодействующих тел // Journal of Advanced Research in Technical Science. – 2025. – №46. – С. 16-33. – doi.org/10.26160/2474-5901-2025-46-16-33.
5. Савелькаев С.В. Динамическая гравитация как эквивалент инерции в механике и единица ее измерения // Новосибирск: Вестник СГУГиТ. – 2025. – Т. 30, №1. – С. 169-185. – doi.org/10.33764/2411-1759-2025-30-1-169-185.
6. Савелькаев С.В. Теория гравитации. – М.: МЭИ, 1993. – 106 с.

7. Заявка на открытие № ОТ-МЗ-177 Россия. Закономерность гравитационной динамики замкнутых систем / Савелькаев С.В. – заявл. 12.10.93 (с присоединением к заявке ОТ №106074 заявл. 21.10.91).
8. Савелькаев С.В. Динамика механических систем в поле относительных сил инерции: монография. – Новосибирск: СГУГиТ, 2026. – 161 с.
9. Савелькаев С.В. Динамический анализ двухмассовой механической системы с пятью степенями свободы в поле относительных сил инерции с радиальным распределением ее масс // Journal of Advanced Research in Technical Science. – 2025. – №51. – С. 23-39. – doi.org/10.26160/2474-5901-2025-51-23-39
10. Савелькаев С.В. Эффект независимости величины смещения центра масс механической системы от диссипативности внешней среды (эффект Савелькаева) // Механика машин, механизмов и материалов. – Минск: Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси, 2011. – №4(17). – С. 42-48.
11. Савелькаев С.В. Механика. Корреляционная механика механических систем: препринт. – Новосибирск: СГГА, 2013. – 67 с.
12. Савелькаев С.В. Влияние сил инерции взаимодействующих тел механической системы на ее движение в диссипативной среде и особенности движения // Вестник СГУГиТ. – 2022. – Т. 27, №5. – С. 183-202. – doi.org/10.33764/2411-1759-2022-27-5-183-202.
13. Савелькаев С.В. Влияние силы инерции относительного движения двух взаимодействующих тел на их движение в диссипативной среде // Фундаментальные основы механики. – 2023. – №12. – С. 43-48. – doi.org/10.26160/2542-0127-2023-12-43-48.
14. Савелькаев С.В. Динамический анализ двухмассовой механической системы в диссипативной среде с учетом сил инерции // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2024. – №87. – С. 135-149. – DOI: 10.17223/19988621/87/11.
15. Савелькаев С.В. Динамический анализ трехмассовой механической системы в диссипативной среде с учетом сил инерции // Мехатроника, автоматика и робототехника. – 2024. – №13. – С. 5-13. – doi.org/10.26160/2542-0127-2024-13-5-13.
16. Савелькаев С.В. Динамический анализ трехмассового кривошипно-ползунного механизма на базе его двухмассового аналога // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2025. – №96. – С. 118-130. – DOI: 10.17223/19988621/96/10.
17. Патент №2056524 РФ. Гравитационный движитель Савелькаева / С.В. Савелькаев. – Заявка №93047497/06 от 12.10.1993; опубл. 20.03.1996.
18. Патент №2147695 РФ. Гравитационный движитель Савелькаева / С.В. Савелькаев. – Заявка №95114171/06 от 08.08.1995; опубл. 28.04.2000с.
19. Patent No. US2886976A. System for converting rotary motion into unidirectional motion / Norman L. Dean – Expired - Lifetime. – Appl. No. 95114171/06; Application filed by Individual 13.07.1956; publ. 19.05.1959.
20. Толчин В.Н. Инерциод. Силы инерции как источник поступательного движения. – Пермь: Кн. Изд., 1977. – С. 89-90.
21. Эйнштейн А. О специальной и общей теории относительности // Собр. науч. тр. в 4-х томах. Т. 1. – М.: Наука, 1965. – 563 с.

Сведения об авторе:

Савелькаев Сергей Викторович – д.т.н., доцент, профессор кафедры специальных устройств инноватики и метрологии.