

МЕТОДИКА ПРИМЕНЕНИЯ ОСНОВНЫХ ПОЛОЖЕНИЙ ТЕОРИИ ПРИКРЕПЛЕНИЙ ТВЕРДЫХ ТЕЛ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ОБЩЕИНЖЕНЕРНЫХ ДИСЦИПЛИН

Петров Ю.В., Кочетов А.С., Угенинов В.Г.

*Московский государственный технический университет гражданской авиации,
Москва*

Ключевые слова: стержень, связь, продольная ось стержня, твердое тело, шарнирное крепление, узловое соединение, неподвижное соединение, мгновенная ось вращения.

Аннотация. В статье рассматриваются методические особенности изучения положений классической теории прикрепления твердых тел применительно к соединениям элементов конструкций. Различные виды подвижных и неподвижных соединений изучаются в инженерном вузе в дисциплинах «Теоретическая механика», «Сопротивление материалов», «Детали машин», «Строительная механика и др. Однако представляется целесообразным основы общей теории прикрепления излагать отдельным разделом, например, в дисциплине «Теоретическая механика», и полученные студентами компетенции использовать при изучении других общетехнических дисциплин.

THE METHODOLOGY OF APPLYING THE BASIC PRINCIPLES OF THE THEORY OF ATTACHMENT OF SOLIDS IN THE STUDY OF AIRCRAFT STRUCTURES

Petrov Yu.V., Kochetov A.S., Ugreninov V.G.

Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow

Keywords: rod, coupling, longitudinal axis of the rod, rigid body, hinge attachment, nodal joint, fixed joint, instantaneous axis of rotation.

Abstract. The article discusses the methodological features of studying the provisions of the classical theory of attachment of solids in relation to the joints of structural elements. Various types of movable and fixed joints are studied at the engineering university in the disciplines of "Theoretical Mechanics", "Resistance of materials", "Machine parts", "Construction mechanics, etc. However, it seems advisable to present the basics of the general theory of attachment in a separate section, for example, in the discipline "Theoretical Mechanics", and use the competencies acquired by students in the study of other general engineering disciplines.

Введение

Теория и практика прикреплений в известной мере носят всеобъемлющий характер, поскольку все инженерно-технические объекты, в конечном счете, соединяются из отдельных частей в единое целое посредством прикреплений [1-4]. Будем рассматривать твердые тела, как объекты, которые сохраняют свою форму и объем при внешнем нагружении и способны к упругим деформациям, полностью восстанавливая свои размеры и форму после снятия внешнего воздействия.

В классической теории прикреплений соединяемые тела называются **дисками**. Термин **прикрепление** в данном случае наполняется следующим содержанием. Прикрепить твердое тело можно либо к другому твердому телу, либо к некоторому основанию, которое считается неподвижным. Прикрепить

твердое тело означает наложить на него некоторую систему **связей**, уменьшающую число его степеней свободы относительно другого тела или основания, к которому данное тело прикрепляется. Для описания простейшей элементарной связи применяется понятие **стержня связи**, который представляет собой некий идеальный абсолютно жесткий стержень, на концах которого имеются шарниры, посредством которых осуществляется соединение стержня с прикрепляемыми дисками или основанием. Шарниры вводятся для того, чтобы обеспечить работу стержня связи (опорного стержня) только на растяжение или сжатие (рис.1). При этом в математических моделях прикреплений ось стержня связи ориентируется по направлению реактивной силы, которая передается данной связью, соответственно, по этому же направлению отнимается одна степень свободы относительно перемещения.

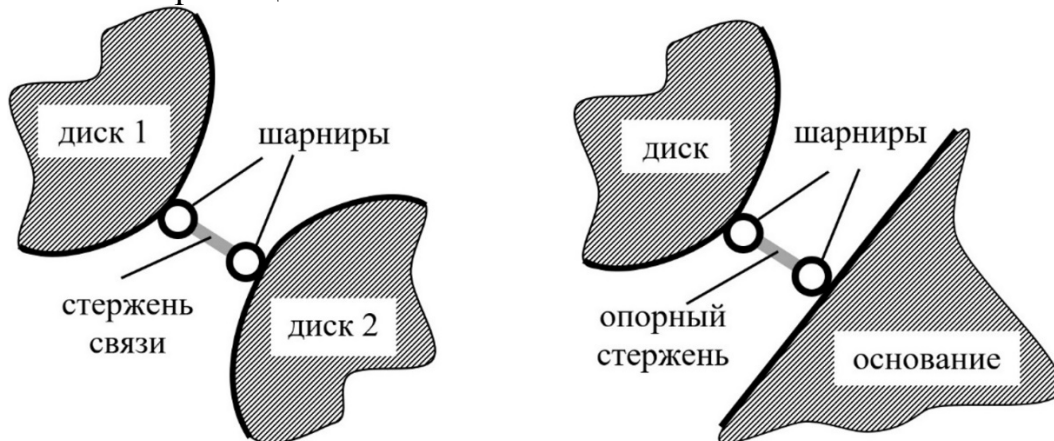


Рис. 1. Типовая модель связи

Известно, что твердое тело в пространстве имеет шесть степеней свободы. Если его прикрепить менее чем шестью стержнями связи, то оно будет иметь определенное число степеней свободы относительно того тела, к которому оно крепится. Это число степеней свободы принято называть *степенью подвижности*.

Шесть стержней связи могут обеспечивать при определенных условиях неподвижность прикрепляемого тела относительно другого тела или основания в пространстве. При этом получается так называемое *статически определенное прикрепление*, поскольку все усилия в связях определяются с помощью одних только уравнений статического равновесия. Если стержней связи более шести, то также можно обеспечить относительную неподвижность прикрепляемого тела. При этом осуществляется так называемое *статически неопределимое прикрепление*, поскольку в этом случае для определения усилий в связях одних только уравнений равновесия недостаточно, необходимо использовать дополнительные уравнения совместности деформаций. Очевидно, что *прикрепление твердого тела теоретически должно содержать не менее одного стержня связи, максимальное же их количество не ограничивается*.

Следует иметь ввиду, что *реальные конструкции прикреплений* вовсе не обязательно должны состоять из стержневых элементов, однако, любой другой тип прикрепления может быть представлен некоторой совокупностью *стержней связи*.

Задачи о прикреплениях твердых тел должны решаться на строго научной основе. Правильное в инженерном плане прикрепление обеспечивает: относительную неподвижность соединяемых конструктивных элементов и

агрегатов с учетом возможных температурных расширений; заданную жесткость; требуемый уровень надежности; рациональное использование несущих способностей и весовую культуру всех связей.

Виды связей в креплениях

Обычно рассматривается два типа задач о креплениях, а именно: крепления на плоскости и крепления в пространстве.

Из курса теоретической механики известно, что числом степеней свободы тела или системы тел называется количество независимых координат, определяющих положение тела или системы. Простейшая связь устраняет *одну* степень свободы. Связь, показанная на рисунке 2, а называется *шарнирно-подвижной* или *подвижным шарниром*. Она препятствует перемещениям только в направлении Oy – вдоль оси стержня, то есть, отнимает только *одну* степень свободы относительных перемещений. При этом допускается перемещение вдоль оси Ox и поворот вокруг оси, проходящей через точку O и перпендикулярной плоскости чертежа (угол поворота φ). Связь, показанная на рисунке 2, б называется *шарнирно неподвижной* или *неподвижным шарниром*. Такая связь не допускает относительных перемещений вдоль осей Ox и Oy (позволяя только угловое перемещение φ прикрепляемого диска). Она отнимает, соответственно, *две* степени свободы относительных перемещений.

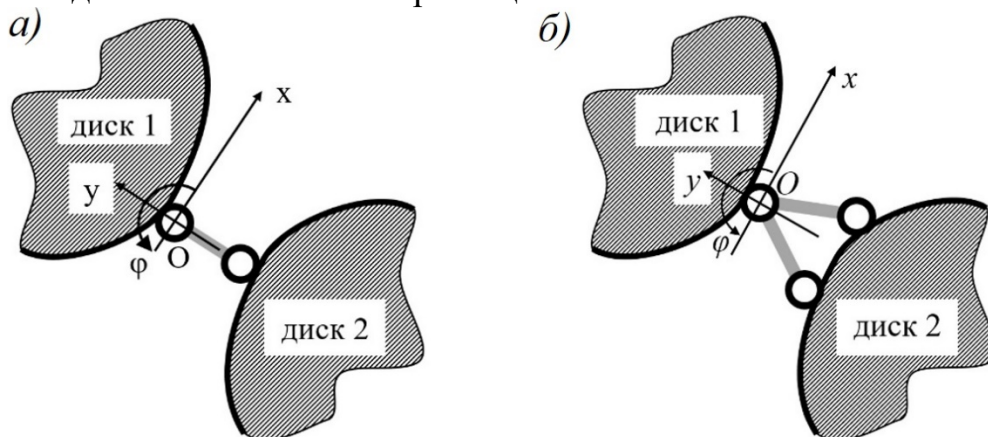


Рис. 2. Шарнирно – подвижная и шарнирно неподвижная связь

Точка пересечения осей стержней связи (рис. 3, а), определяющая центр неподвижного шарнира, называется **узлом**. Весьма важным является вопрос об определении узлов и их количества для случая, когда опорных стержней несколько (рис. 3, б). На этом рисунке символами u_{ij} обозначены так называемые *узловые точки*, образующиеся на пересечении продолжений продольных осей опорных стержней с номерами « i » и « j ». Однако в качестве **узлов** должны быть выбраны *все* те из них, которые имеют *неповторяющиеся (разные)* индексы. Причина в том, что *каждая из осей* стержней связи может участвовать в образовании только *одного* узла. Это своего рода аксиома. Этот выбор *не однозначен*. Например, в качестве узлов могут быть выбраны точки u_{12} и u_{34} , или u_{13} и u_{24} , или u_{23} и u_{14} . Не могут быть выбраны точки u_{12} и u_{24} (индекс «2» повторяется), точки u_{24} и u_{34} (индекс «4» повторяется) и так далее. Отсюда видно, что узловая точка не всегда может быть **узлом**, тогда как всякий узел одновременно является и узловой точкой. Данное утверждение справедливо и для пространственного случая. Таким образом,

решение задачи об определении узлов в общем случае неоднозначно, тогда как их количество всегда определяется однозначно.

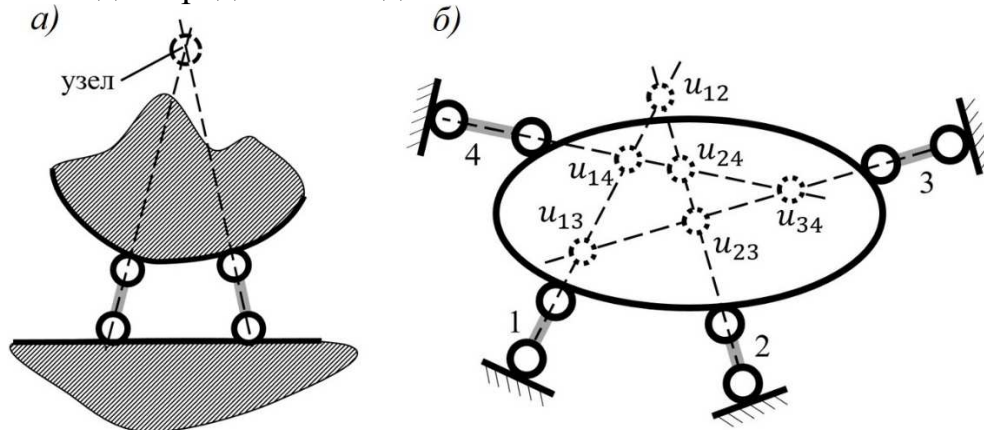


Рис. 3. Узел – точка пересечения продольных осей стержней связи

Для осуществления шарнирно неподвижной связи необходимо и достаточно:

- на плоскости – двух непараллельных стержней связи;
- в пространстве – трех непараллельных стержней связи, не лежащих в одной плоскости и сходящихся (пересекающихся) в одной точке (узле), как показано на рисунке 4, это так называемый *пространственный шарнир*. Пространственный шарнир отнимает *три* степени свободы относительных линейных перемещений.

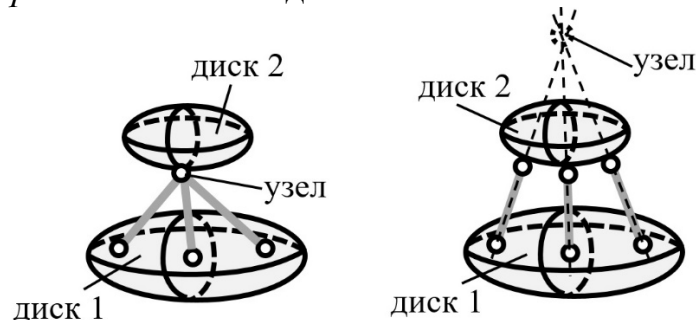


Рис. 4. Пространственный шарнир

Приведенное определение понятия узла нуждается в дальнейшем развитии, а именно: весьма важным является то, оси скольких опорных стержней в нем пересекаются. Если шарнирно неподвижная связь на плоскости образована двумя стержнями связи, то такая связь является *статически определимой*. Это означает, что если известно усилие в узле, то для определения усилий в стержнях связи достаточно одних только уравнений равновесия этого узла. Соответственно, если пространственный шарнир образован тремя стержнями связи, то она также является *статически определимой*. Если же в узле сходятся более двух опорных стержней (на плоскости) или более трех стержней (в пространстве), то такой *узел называется статически неопределимым*. Статически определимые узлы показаны на рисунке 4. Статически неопределимые узлы показаны на рисунке 5, а (на плоскости) и на рисунке 5, б (в пространстве).

Как видно из рисунка 5, добавление опорных стержней в узле изменяет его степень статической неопределимости, но не оказывает влияния на количество степеней свободы прикрепляемого тела. Это обстоятельство играет весьма важную роль в теории прикреплений, в частности, оно позволяет сформулировать следующие положения:

- вне зависимости от степени статической неопределимости узла, плоский узел отнимает *две* степени свободы, пространственный – *три*;
- опорные стержни, входящие в состав неподвижного шарнира сверх необходимого и достаточного их количества, не влияют на число степеней свободы и степень статической неопределимости систем, получаемых с помощью прикреплений посредством таких шарниров.

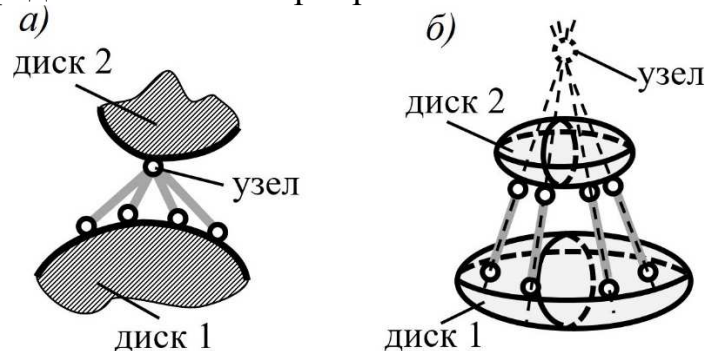


Рис. 5. Статически неопределимый узел

Теоретические основы построения прикреплений

Необходимые условия неподвижности прикрепления

Рассмотрим простейший случай, когда речь идет о прикреплении *одного* твердого тела к некоторому основанию. С основанием может быть связана система координат, относительно которой можно судить о перемещениях и деформациях прикрепляемого тела.

Задача состоит в том, чтобы определить *необходимые условия неподвижности* прикрепляемого тела относительно основания. Как известно из теоретической механики, твердое тело на плоскости имеет *три* степени свободы, а в пространстве – *шесть*. Так как один опорный стержень отнимает одну степень свободы относительных перемещений, то совершенно очевидно, что *необходимые условия неподвижности* прикрепления требуют наличия:

- не менее трех опорных стержней в случае прикрепления диска на плоскости (рис.6, а);
- не менее шести опорных стержней для прикрепления в пространстве (рис. 6, б).

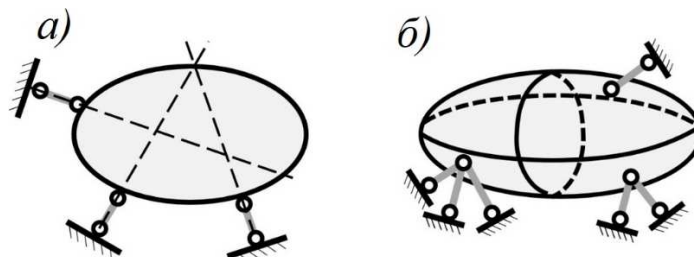


Рис. 6. Необходимые условия неподвижности прикрепления

Достаточные условия неподвижности прикрепления

Рассмотрим только геометрическую трактовку достаточных условий неподвижного крепления тела. Для случая прикрепления диска на плоскости достаточные условия состоят в том, что *продольные оси всех опорных стержней не должны пересекаться в одной точке* (которая будет представлять собой, по сути, не что иное, как мгновенный центр вращения прикрепляемого

тела). При наличии такого центра вращения силы реакции всех опорных стержней, действующие вдоль продольных осей, будут проходить через него. Очевидно, что такое прикрепление не может обеспечить восприятие какой бы то ни было силы, линия действия которой не проходит через эту точку. Сказанное относится в равной мере как к статически определяемым, так и статически неопределимым прикреплениям. Для случая пространственного прикрепления диска достаточные условия формулируются аналогично, но на основе положения об отсутствии не мгновенного центра, а мгновенной оси вращения прикрепляемого тела.

Примеры правильных и неправильных прикреплений тел на плоскости и в пространстве

В данном случае под правильными будем понимать прикрепления, в которых выполнены необходимые и достаточные условия обеспечения неподвижности соединения, соответственно, неправильные не обеспечивают неподвижность.

Рассмотрим примеры правильных прикреплений

Пример 1. Статически определяемое прикрепление в плоскости показано на рисунке 6, а. Необходимые и достаточные условия неподвижности прикрепления выполняются. При увеличении числа опорных стержней, оси которых не пересекаются в одной точке растет степень статической неопределимости системы при условии обеспечения неподвижности прикрепления.

Пример 2. Прикрепление, показанное на рисунке 7, статически определяемое с точки зрения вычисления реактивных сил в узлах А и Б, т.е. трех уравнений статики достаточно для вычисления реактивных сил R_{Ax} , R_{Ay} и R_B . Однако с точки зрения распределения реактивных сил по опорным стержням 1-4 узел А является дважды статически неопределимым, т.к. в нем пересекаются продольные оси четырех стержней. Если же, например, продольная ось стержня 4 не будет проходить через узел А, то система крепления в целом становится один раз статически неопределимой.

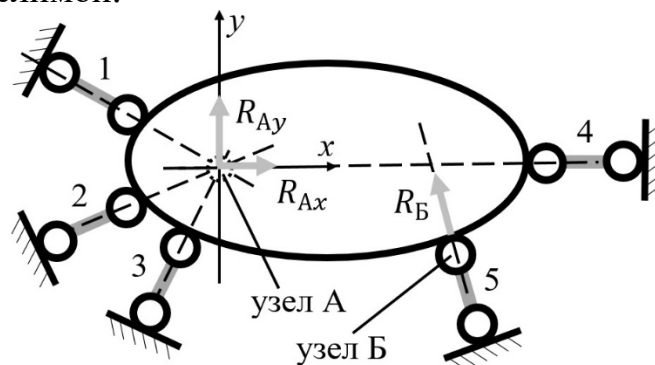


Рис. 7. Пример правильного прикрепления в плоскости

Рассмотрим пример неправильного прикрепления

Неправильные прикрепления для плоского случая показаны на рисунке 8, б. В обоих случаях достаточные условия отсутствия пересечения продольных осей опорных стержней в одной точке не выполняются. На рисунке 8, а оси трех стержней пересекаются в одной точке (мгновенном центре вращения), а на рисунке 8, б оси опорных стержней параллельны, т.е. пересекаются на бесконечности (диск имеет возможность перемещаться горизонтально).

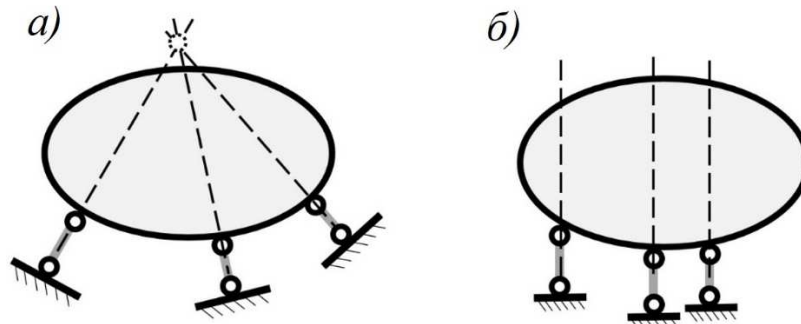


Рис. 8. Пример неправильного прикрепления в плоскости

Инженерной практикой выработан ряд рекомендаций по построению правильных креплений, позволяющих на основе типовых решений быстро получить требуемый результат.

Рассмотрим некоторые из них.

Случай 1. Крепление, при котором обеспечивается неподвижность прикрепляемого диска в некоторой плоскости Π и неподвижность пространственного узла A , не лежащего в плоскости Π (рис. 9, а).

Здесь три опорных стрержня расположены в плоскости Π так, что их оси не пересекаются в одной (общей) точке, а другие три стрержня соединены в пространственный узел A , не лежащий в плоскости Π . Узел A может находиться на поверхности, внутри тела, или в любой точке за его пределами, в том числе и в бесконечно удаленной точке при параллельных осях стрержней, составляющих узел A . При этом в узле A могут пересекаться как сами опорные стрержни, так и продолжение их осей. Для обеспечения неподвижности соединения наличие узла A объективно необходимо, т.к. неподвижность тела в плоскости Π не предотвращает возможность его вращения относительно мгновенной оси, лежащей в этой плоскости.

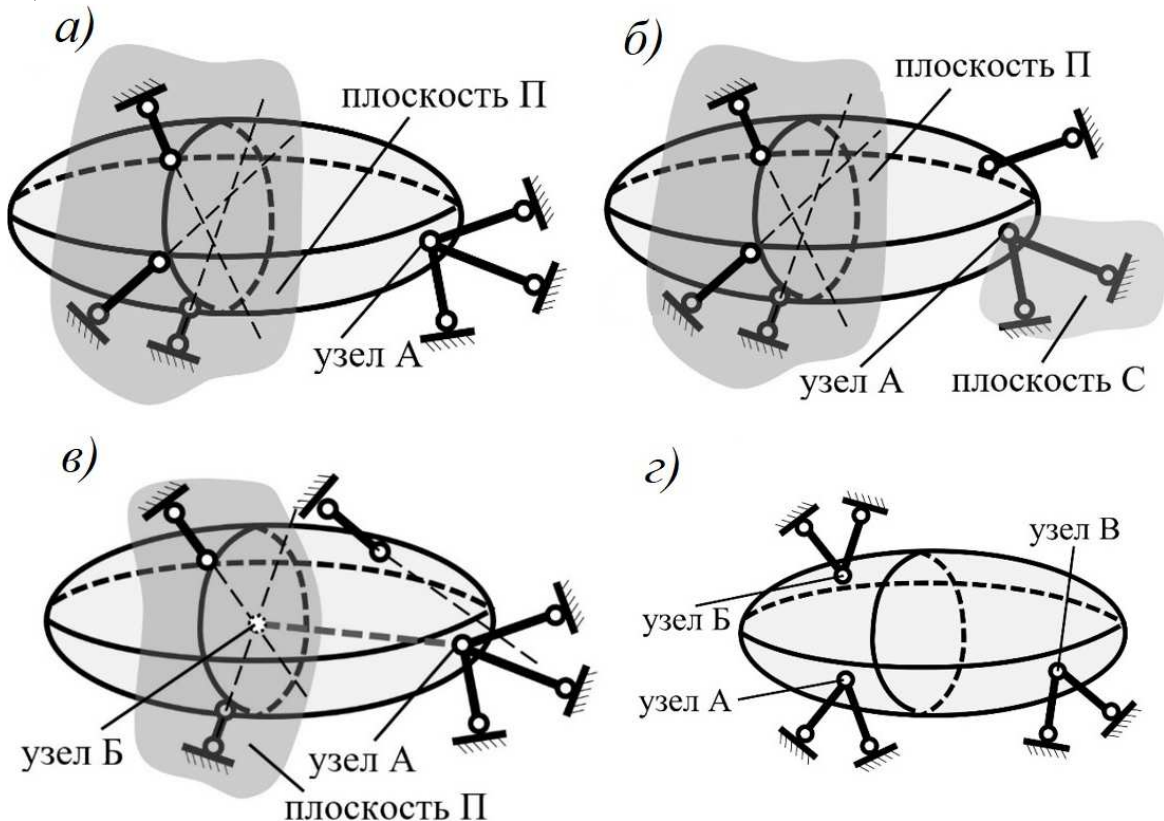


Рис. 9. Примеры типовых решений для правильных креплений

Случай 2. Три стержня лежат в плоскости Π , их оси не пересекаются в одной точке; два других стержня пересекаются, образуя плоскость C , один изолирован и не лежит в плоскости C (рис. 9, б).

Случай 3. Три стержня (рис. 9, в) не лежат в одной плоскости и пересекаются в одной точке, образуя пространственный шарнир A , два других пересекаются в узле B , образуя плоскость Π . Из рисунка 9, в видно, что при таком присоединении имеется мгновенная ось вращения AB . Поэтому объективно необходимо установить еще один изолированный стержень, расположенный вне плоскости Π так, что его ось не пересекает прямую AB .

Случай 4. Оси шести опорных стержней попарно расположены в трех разных плоскостях и точки их пересечения (узлы A , B и B) не лежат на одной прямой (рис. 9, г).

Рассмотрим примеры неправильных прикреплений тел в пространстве.

Случай 1. Четыре опорных стержня расположены в плоскости Π (рис. 10, а). Стержни 5 и 6 лежат в одной плоскости C . Плоскости Π и C пересекаются по прямой $a-a$. В этом случае вне зависимости от направлений осей стержней 5 и 6 они пересекают ось $a-a$ в узлах A и B , следовательно, прямая $a-a$ является мгновенной осью вращения прикрепляемого тела.

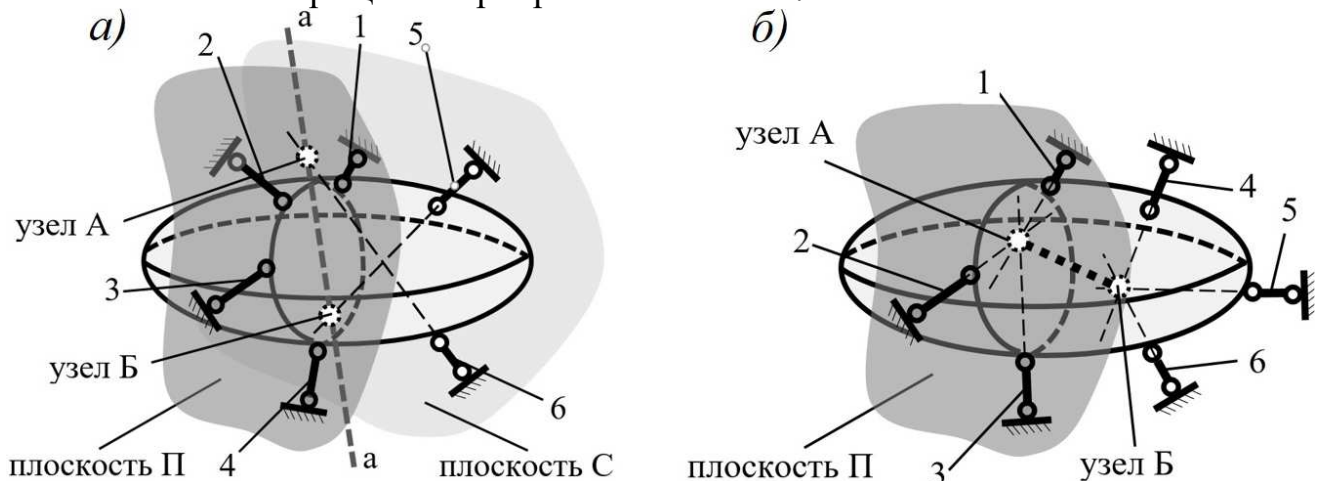


Рис. 10. Примеры неправильных прикреплений

Случай 2. Оси опорных стержней 1, 2 и 3 лежат в одной плоскости Π и пересекаются в узле A , стержни 4, 5 и 6 лежат в разных плоскостях, но их продольные оси пересекаются в пространственном узле B (рис.10, б). Здесь прямая AB пересекает оси всех опорных стержней и поэтому является мгновенной осью вращения прикрепляемого тела.

Выводы. Понимание основных положений теории прикреплений является весьма важной частью подготовки инженера. Правильное построение и анализ необходимых и достаточных условий геометрической неизменяемости прикрепления предшествует анализу его прочности.

Список литературы

1. Бабанов В.В. Техническая (строительная) механика. – М.: Юрайт, 2025. – 488 с.
2. Шеин А.И. Курс строительной механики. – М.: АСВ, 2017. – 352 с.
3. Шапошников Н.Н., Кристалинский Р.Е., Дарков А.В. Строительная механика: учебник. – М.: Лань, 2025. – 692 с.

4. Овчинников В.В., Петров Ю.В., Плосков С.Ю., Пономарев А.Т., Стопкевич В.Г. Строительная механика боевых летательных аппаратов. – М.: Издательство ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 2009. – 373 с.

Сведения об авторах:

Петров Юрий Владимирович – д.т.н., профессор, заведующий кафедрой технической механики и инженерной графики;

Кочетов Александр Сергеевич – к.т.н., доцент кафедры технической механики и инженерной графики;

Угренинов Владимир Германович – к.т.н., доцент кафедры технической механики и инженерной графики.