

КОНТАКТ ЖЕСТКОЙ ВСТАВКИ И ТРУБЫ С ВНУТРЕННИМ ПОКРЫТИЕМ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ, ПОМЕЩЕННОЙ В ОПРАВКУ

Казаков К.Е.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

Ключевые слова: контакт, покрытие, смешанное интегральное уравнение, быстро изменяющиеся функции, вязкоупругость, собственные функции.

Аннотация. В работе описывается постановка и подход к решению задачи о взаимодействии жесткой цилиндрической вставки и вязкоупругой трубы с тонким внутренним покрытием, имеющим переменную толщину в случае, когда труба помещена в жесткую оправку. Указано, что математической моделью такой задачи является смешанное интегральное уравнение относительно неизвестного контактного давления. Наличие в нем операторов различного типа и быстро изменяющейся функции, описывающей профиль покрытия, обуславливает применение специального подхода при построении решения. Приведен вид получающегося решения, в котором функция, описывающая профиль покрытия, выделена в отдельных множителях и слагаемых, что позволяет проводить эффективные вычисления независимо от формы покрытия.

CONTACT OF A RIGID INSERT AND A PIPE WITH AN INTERNAL COATING OF VARIABLE THICKNESS PLACED IN A MANDREL

Kazakov K.E.

Ishlinsky Institute for Problems in mechanics RAS, Moscow

Keywords: contact, coating, mixed integral equation, rapidly changing functions, viscoelasticity, eigenfunctions.

Abstract. The paper describes the formulation and approach to solving the problem of the interaction of a rigid cylindrical insert and a viscoelastic tube with a thin inner coating having a variable thickness in the case when the tube is placed in a rigid mandrel. It is stated that the mathematical model of such a problem is a mixed integral equation with respect to an unknown contact pressure. The presence of various types of operators in it and a rapidly changing function describing the coverage profile leads to the use of a special approach when constructing a solution. The resulting solution is presented in which the function describing the coating profile is isolated in separate multipliers and terms, which allows efficient calculations regardless of the shape of the coating.

Рассматривается контактная задача в следующей постановке. Длинная кольцевая труба состоит из двух слоев: внешнего слоя произвольной толщины и внутреннего тонкого слоя, являющегося покрытием, толщина которого может меняться вдоль осевой координаты. Слои изготовлены из различных вязкоупругих стареющих материалов, причем жесткость внутреннего меньше жесткости наружного. Между слоями может осуществляться либо идеальный, либо гладкий контакт. Рассматриваемая труба помещена без натяга и зазора в длинную жесткую оправку, при этом на границе их контакта может осуществляться либо идеальный, либо гладкий контакт. В некоторый момент времени внутрь трубы помещается жесткая цилиндрическая вставка конечной длины, внешний диаметр которой больше внутреннего диаметра трубы в любой

точке. Считается, что между вставкой и трубой с покрытием осуществляется гладкий контакт, он происходит по всей поверхности вставки, а пластические деформации отсутствуют. В результате такого взаимодействия труба деформируется и в ней возникают напряжения. Необходимо найти контактные давления в области взаимодействия трубы и вставки. Схема взаимодействия представлена на рисунке 1.

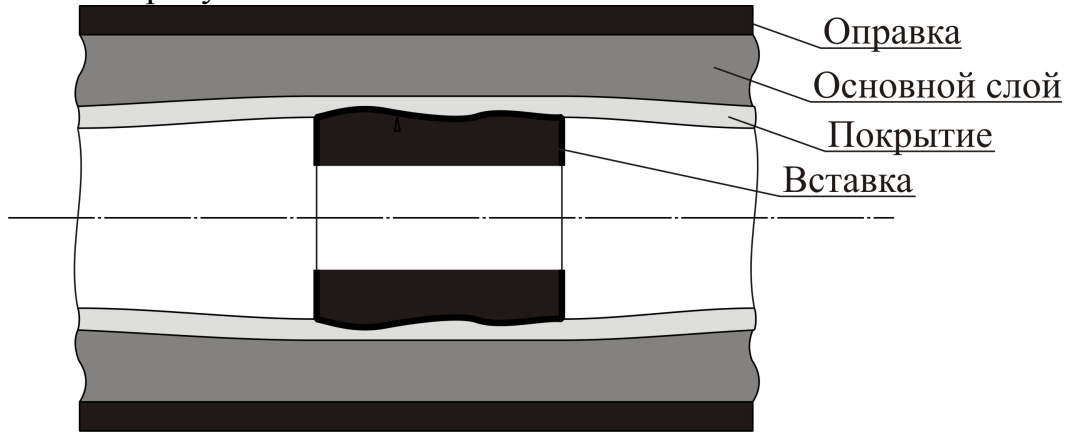


Рис. 1. Схема контактного взаимодействия

Можно показать, что в предположении о малости деформаций и тонкости внутреннего слоя по сравнению с остальными линейными размерами рассматриваемая задача приводит к необходимости построения решения следующего безразмерного уравнения:

$$c(t)m(z)(I - V_1)q(z,t) + (I - V_2)Fq(z,t) = g(z), \quad z \in [-1,1], \quad t \geq 1, \quad (1)$$

где $c(t)$, $m(z)$, $g(z)$ – заданные функции, I – тождественный оператор, V_1 и V_2 – операторы Вольтерра, связанные со старением и вязкоупругостью [1], F – оператор Фредгольма с положительно определенным симметричным ядром [2], $q(z,t)$ – неизвестная функция, прямо пропорциональная контактному давлению, возникающему на границе вставки и покрытия.

Следует отметить, что функции $m(z)$ и $g(z)$ связаны с функцией, описывающей толщину покрытия и, следовательно, могут быть быстро изменяющимися. Второй особенностью данного уравнения является то, что оно является смешанным [3], так как содержит интегральные операторы различного типа.

Для решения такого уравнения необходимо применить специальный подход, основные этапы которого изложены ниже.

Этап 1. Неизвестную функцию $q(z,t)$ необходимо искать в виде

$$q(z,t) = \frac{Q(z,t)}{\sqrt{m(z)}} - (I - V_1)^{-1} \frac{g(z)}{m(z)c(t)}. \quad (2)$$

В этом случае уравнение (1) примет вид

$$c(t)(I - V_1)Q(z,t) + (I - V_2)\tilde{F}Q(z,t) = (I - V_2)(I - V_1)^{-1} \frac{1}{c(t)} \tilde{F} \frac{g(z)}{\sqrt{m(z)}}, \quad (3)$$

$$z \in [-1,1], \quad t \geq 1.$$

Это интегральное уравнение также является смешанным, ядро оператора $\tilde{F}$ также является симметричным положительно определенным, но теперь в первом слагаемом отсутствует функция $m(z)$. Более того, в правой части уравнения (3)

стоит функция, гладкость которой определяется ядром оператора $\tilde{F}$, что будет учтено далее на последующих этапах.

Этап 2. Необходимо построить ортонормированный базис $\{w_0(z), w_1(z), w_2(z), \dots\}$, ортонормируя в $L_2[-1, 1]$ следующую систему линейно независимых функций

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{m(z)}}, \frac{z}{\sqrt{m(z)}}, \frac{z^2}{\sqrt{m(z)}}, \dots \right\}.$$

Этап 3. На основании полученного базиса $\{w_0(z), w_1(z), w_2(z), \dots\}$ необходимо построить новый базис $\{\Phi_0(z), \Phi_1(z), \Phi_2(z), \dots\}$, состоящий из собственных функций оператора $\tilde{F}$. Решение уравнения (3) следует искать в виде разложения в ряд по базису из собственных функций.

Окончательное решение уравнения (3) с учетом обратной замены (2) имеет вид:

$$q(z, t) = \frac{1}{m(z)} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) \varphi_k(z) - (I - V_1)^{-1} \frac{g(z)}{m(z)c(t)},$$

где $f_k(t)$ — коэффициенты разложения, $\varphi_k(z)$ — многочлены, связанные с собственными функциями соотношением

$$\Phi_k(z) = \frac{\varphi_k(z)}{\sqrt{m(z)}}.$$

Таким образом, в решении отдельными множителями выделены функции, связанные с формой покрытия, что позволяет проводить эффективные вычисления даже в случае, когда они являются быстро изменяющимися.

Финансирование. Исследование выполнено в рамках государственного задания (номер госрегистрации 124012500437-9).

Список литературы

1. Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородных тел. – М.: Наука, 1983. – 336 с.
2. Черныш В.А. Контактные задачи теории ползучести для стареющих цилиндрических тел: Автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – Институт проблем механики, 1999. – 209 с.
3. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. – Ереван: Изд-во НАН РА, 1999. – 320 с.

Сведения об авторе:

Казаков Кирилл Евгеньевич — к.ф.-м.н., доцент, старший научный сотрудник.