

О ПРОПОРЦИОНАЛЬНОМ ДЕМПФИРОВАНИИ КОЛЕБАНИЙ ДВОЙНОГО ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Морозов Д.В.¹, Смирнов А.С.^{1,2}

¹*Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург;*

²*Институт проблем машиноведения Российской академии наук,
Санкт-Петербург*

Ключевые слова: двойной физический маятник, вязкое трение, линейная модель колебаний, пропорциональное демпфирование, частные варианты маятника, колокол Кёльнского собора.

Аннотация. В статье обсуждается вопрос о реализации пропорционального демпфирования колебаний двойного физического маятника с вязким трением в его шарнирах, при котором затухание колебаний системы осуществляется по формам колебаний консервативной задачи без усложнения и искажения их характера. Условие пропорциональности демпфирования находится в общем виде, а также рассматриваются наиболее интересные частные случаи. Найденные результаты полезны для теории колебаний и механики маятниковых систем.

ON PROPORTIONAL DAMPING OF OSCILLATIONS OF A DOUBLE PHYSICAL PENDULUM

Morozov D.V.¹, Smirnov A.S.^{1,2}

¹*Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University, Saint-Petersburg;*

²*Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences,
Saint-Petersburg*

Keywords: double physical pendulum, viscous friction, linear oscillation model, proportional damping, special variants of the pendulum, bell of the Cologne Cathedral.

Abstract. The paper discusses the issue of implementing proportional damping of oscillations of a double physical pendulum with viscous friction in its joints, in which the attenuation of the system oscillations is carried out according to the oscillation modes of a conservative problem without complicating and distorting their character. The condition of proportionality of damping is defined in general form, and the most interesting special cases are considered. The results found are useful for the theory of oscillations and mechanics of pendulum systems.

Хорошо известно, что введение диссипативных сил вязкого трения в линейную колебательную систему со многими степенями свободы в общем случае искажает ее собственные формы колебаний [1], причем с увеличением диссипативных эффектов это искажение становится все более выраженным [2]. Тем не менее, при определенном подборе диссипативных параметров задачи может оказаться, что введение в систему диссипативных сил не нарушает форм ее консервативных колебаний [3]. Это значит, что в данной ситуации затухание колебаний системы будет производиться по ее собственным, т. е. естественным движениям, без каких-либо искажений. В частности, если движение системы представляет собой лишь одну форму колебаний, то и гасить следует только эту форму без усложнения ее характера и возникновения других форм колебаний. Описываемая ситуация отвечает т. н. «пропорциональному демпфированию», и

выявление условий его реализации в различных задачах теории колебаний представляет как фундаментальное теоретическое, так и важное практическое значение. Настоящая работа относится именно к этому направлению, и в ней рассматривается двойной физический маятник с вязким трением в шарнирах и находится соотношение между параметрами этой системы, при котором выполняется условие пропорциональности демпфирования.

Будем полагать, что двойной физический маятник состоит из двух шарнирно соединенных физических маятников, центры масс которых C_1 и C_2 расположены на расстояниях r_1 и r_2 соответственно от их точек подвеса, а расстояние между этими точками равно a . Массы маятников считаются равными m_1 и m_2 , а моменты инерции этих маятников относительно их центров масс равны J_1 и J_2 . Кроме того, в шарнирах двойного физического маятника действует вязкое трение с коэффициентами b_1 и b_2 (рис. 1).

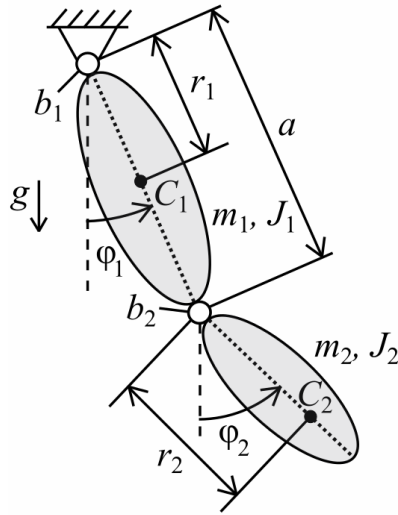


Рис. 1. Расчетная схема двойного физического маятника

Принимая в качестве обобщенных координат углы φ_1 и φ_2 отклонения звеньев маятника от вертикали, запишем точные выражения для кинетической и потенциальной энергий двойного физического маятника:

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_{C_1}^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{C_2}^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}_2^2, \quad \Pi = m_1 g y_1 + m_2 g y_2. \quad (1)$$

Здесь $v_{C_1} = r_1 \dot{\varphi}_1$ – скорость центра масс первого звена; v_{C_2} – скорость центра масс второго звена, для которой имеем $v_{C_2}^2 = a^2 \dot{\varphi}_1^2 + r_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2ar_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2$; $y_1 = -r_1 \cos \varphi_1$ и $y_2 = -a \cos \varphi_1 - r_2 \cos \varphi_2$ – вертикальные координаты центров масс первого и второго звена соответственно, отсчитываемые от точки подвеса первого звена. Тогда выражения (1) можно представить в следующем виде:

$$T = \frac{1}{2} \left[(J_1 + m_1 r_1^2 + m_2 a^2) \dot{\varphi}_1^2 + (J_2 + m_2 r_2^2) \dot{\varphi}_2^2 + 2m_2 a r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \right], \quad (2)$$

$$\Pi = -g \left[(m_1 r_1 + m_2 a) \cos \varphi_1 + m_2 r_2 \cos \varphi_2 \right].$$

При изучении линейной модели колебаний двойного физического маятника требуется составить квадратичные аппроксимации выражений (2) вблизи нижнего положения равновесия $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, которые будут иметь вид:

$$T = \frac{1}{2} \left[(J_1 + m_1 r_1^2 + m_2 a^2) \dot{\phi}_1^2 + (J_2 + m_2 r_2^2) \dot{\phi}_2^2 + 2m_2 a r_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \right] = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\phi}}^T \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\phi}},$$

$$\Pi = \frac{1}{2} g \left[(m_1 r_1 + m_2 a) \phi_1^2 + m_2 r_2 \phi_2^2 \right] = \frac{1}{2} \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\phi},$$
(3)

где $\boldsymbol{\phi} = [\phi_1, \phi_2]^T$ – столбец обобщенных координат, $\mathbf{A}$ – матрица инерционных коэффициентов, а $\mathbf{C}$ – матрица квазиупругих коэффициентов, причем

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} J_1 + m_1 r_1^2 + m_2 a^2 & m_2 a r_2 \\ m_2 a r_2 & J_2 + m_2 r_2^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} (m_1 r_1 + m_2 a)g & 0 \\ 0 & m_2 g r_2 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Далее запишем диссипативную функцию вязкого трения:

$$R = \frac{1}{2} (b_1 \dot{\theta}_1^2 + b_2 \dot{\theta}_2^2) = \frac{1}{2} \left[(b_1 + b_2) \dot{\phi}_1^2 - 2b_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 + b_2 \dot{\phi}_2^2 \right] = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\phi}}^T \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\phi}}, \quad (5)$$

где $\theta_1 = \phi_1$ и $\theta_2 = \phi_2 - \phi_1$ – углы поворота в шарнирах маятника, а $\mathbf{B}$ – матрица диссипативных коэффициентов, имеющая вид:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 + b_2 & -b_2 \\ -b_2 & b_2 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Условие пропорциональности демпфирования означает, что матрица $\mathbf{B}$ представима в виде линейной комбинации матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$, т.е. $\mathbf{B} = \lambda_A \mathbf{A} + \lambda_C \mathbf{C}$, где λ_A и λ_C – некоторые коэффициенты [4]. Принимая во внимание формулы (4) и (6), представим указанное матричное соотношение в виде трех скалярных:

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = \lambda_A (J_1 + m_1 r_1^2 + m_2 a^2) + \lambda_C (m_1 r_1 + m_2 a)g, \\ -b_2 = \lambda_A m_2 a r_2, \\ b_2 = \lambda_A (J_2 + m_2 r_2^2) + \lambda_C m_2 g r_2. \end{cases} \quad (7)$$

Из второго уравнения системы (7) можно выразить величину λ_A , и подставляя выражение для нее в последнее уравнение той же системы, найдем и λ_C :

$$\lambda_A = -\frac{b_2}{m_2 a r_2}, \quad \lambda_C = \frac{b_2}{m_2 g r_2} \left(1 + \frac{J_2}{m_2 a r_2} + \frac{r_2}{a} \right). \quad (8)$$

Подставляя формулы (8) в первое уравнение системы (7) и полагая $J_1 = m_1 \rho_1^2$, $J_2 = m_2 \rho_2^2$, где ρ_1 и ρ_2 – радиусы инерции звеньев относительно их центров масс, получим условие пропорциональности демпфирования в общем виде:

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{\rho_2^2}{r_2^2} + \frac{m_1}{m_2} \left[\frac{r_1}{a} \left(1 + \frac{\rho_2^2}{r_2^2} \right) + \frac{r_1}{r_2} - \frac{r_1^2 + \rho_1^2}{a r_2} \right]. \quad (9)$$

Разумеется, для возможности выполнения этого условия параметры m_1 , m_2 , r_1 , r_2 , a , ρ_1 и ρ_2 должны обеспечивать неотрицательность правой части в (9).

Рассмотрим далее наиболее интересные частные случаи (рис. 2).

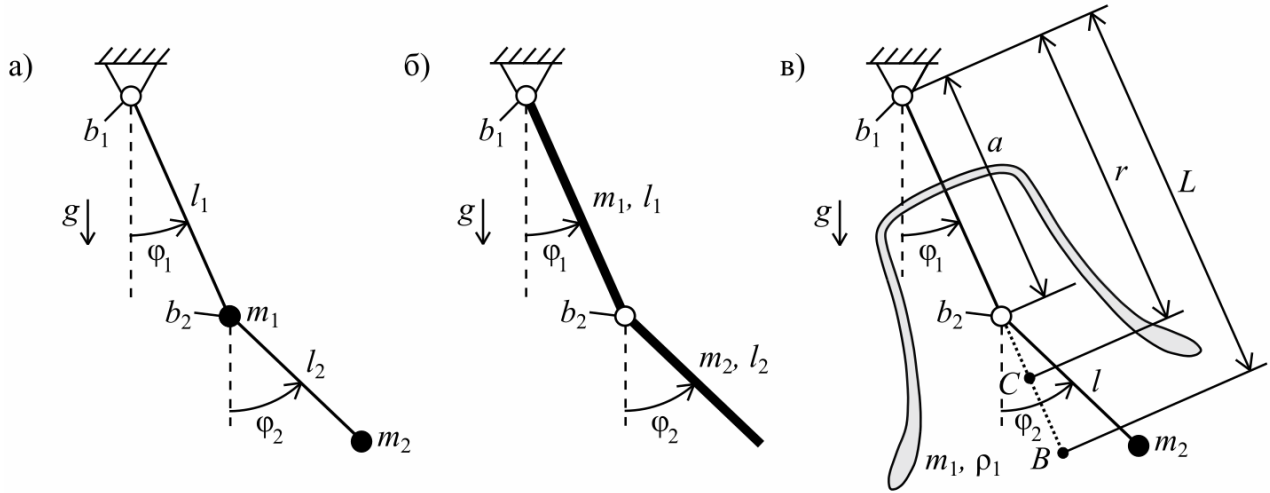


Рис. 2. Частные варианты двойного физического маятника:

- а) двойной математический маятник, б) двойной стержневой физический маятник, в) Колокол Кёльнского собора

1. *Двойной математический маятник.* В этом случае звенья маятника представляют собой невесомые стержни длинами l_1 и l_2 , а на их концах помещены точечные грузы массами m_1 и m_2 (рис. 2, а). Тогда $r_1 = a = l_1$, $r_2 = l_2$, а $\rho_1 = \rho_2 = 0$. В результате из формулы (9) имеем условие пропорциональности демпфирования для двойного математического маятника в простой форме:

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{m_1}{m_2}. \quad (10)$$

Отметим, что здесь отношение диссипативных коэффициентов зависит только от отношения масс грузов маятника и не зависит от отношения длин звеньев.

2. *Двойной стержневой физический маятник.* В этой ситуации звенья маятника представляют собой весомые однородные стержни длинами l_1 и l_2 , массы которых равны m_1 и m_2 (рис. 2, б). Тогда $a = l_1$, $r_1 = l_1 / 2$, $r_2 = l_2 / 2$, $\rho_1^2 = l_1^2 / 12$, $\rho_2^2 = l_2^2 / 12$. Поэтому условие пропорциональности демпфирования для двойного физического маятника согласно (9) примет следующий вид:

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{3} + \frac{m_1}{m_2} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{l_1}{l_2} \right), \quad (11)$$

и, как видно, здесь отношение диссипативных коэффициентов зависит как от отношения масс звеньев, так и от отношения их длин.

3. *Колокол Кёльнского собора.* Наконец, рассмотрим расчетную схему, с помощью которой обычно моделируется динамика знаменитого колокола Кёльнского собора *Kaiserglocke* (императорский колокол) [5]. Положим, что первое звено (т. е. сам колокол) представляет собой физический маятник массой m_1 с расстоянием r от его точки подвеса до центра масс C , а второе звено (т. е. язык колокола) – математический маятник длиной l и с концевым грузом массой m_2 . При этом, как и в общем случае, полагается, что ρ_1 – радиус инерции колокола относительно его центра масс, а расстояние от точки подвеса колокола

до точки подвеса языка есть a . Тогда $r_1 = r$, $r_2 = l$, $\rho_2 = 0$, и условие пропорциональности демпфирования (9) примет вид:

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{m_1}{m_2} \frac{r(l+a) - (r^2 + \rho_1^2)}{al}. \quad (12)$$

Поскольку квадрат радиуса инерции колокола относительно точки его подвеса выражается равенством $\rho^2 = r^2 + \rho_1^2$, а для его приведенной длины имеет место выражение $L = \rho^2 / r$ (при этом $L = r + \rho_1^2 / r > r$), то формула (12) примет вид:

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{m_1}{m_2} \frac{r(l+a-L)}{al}. \quad (13)$$

В частности, при условии $L = l + a$, когда центр качаний колокола B (он лежит на расстоянии приведенной длины L от точки подвеса на прямой, которая соединяет эту точку с центром масс) в положении равновесия совпадает с грузом языка, условие (13) выполнено лишь при $b_1 = 0$, когда исключено трение в неподвижном шарнире. При этом становится возможным движение колокола и языка как единого целого, и колокол становится «немым» [5]. Именно такой особенностью изначально обладал колокол Кёльнского собора, благодаря чему он и получил широкую известность. Подчеркнем, что в целом для возможности обеспечения условия (13) его правая часть должна быть неотрицательной, т. е. в состоянии покоя груз языка должен быть не выше, чем центр качаний колокола.

Таким образом, в данной работе получено условие пропорциональности демпфирования колебаний двойного физического маятника и обсуждены три наиболее интересных его частных варианта, для которых это условие записано в упрощенном виде. Полученные результаты могут оказаться полезными при дальнейшем исследовании диссипативной модели данной системы и решении ряда сопутствующих задач, например, при изучении вопросов об оптимальном пассивном подавлении колебаний с помощью шарнирного вязкого трения.

Список литературы

1. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Наука, 1967. – 444 с.
2. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. – М.: Наука, 1964. – 440 с.
3. Вибрации в технике. Справочник. – Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. Болотина В.В. – М.: Машиностроение, 1978. – 352 с.
4. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1980. – 408 с.
5. Карман Т., Био М. Математические методы в инженерном деле. – М., Л.: ОГИЗ, 1946. – 424 с.

Сведения об авторах:

Морозов Дмитрий Владимирович – студент;

Смирнов Алексей Сергеевич – доцент Высшей школы механики и процессов управления, старший научный сотрудник Лаборатории мехатроники.