

ОБ ОДНОМ ПРИЛОЖЕНИИ КИНЕМАТИКИ ДВИЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИОННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГОГО ТЕЛА

Гукасян А.А.

Институт механики НАН Республики Армения, Ереван

Ключевые слова: упругое тело, кинематика, деформация, упругий манипулятор, матрица преобразования, нерастяжимость.

Аннотация. Результаты исследования кинематики движения и деформационного состояния упругого тела в качестве приложения применяются при моделировании движения и определения деформации двухзвенного упругого манипулятора. В рамках линейной теории упругости определены кинематические соотношения движений упругого манипулятора из общих формул кинематики движений упругого тела. Деформационное состояние упругого звена манипулятора и приращение линейных элементов представлены в разных системах координат.

ABOUT ONE APPLICATION OF KINEMATICS OF MOTION AND DEFORMATION STATE OF AN ELASTIC BODY

Ghukasyan A.A.

Institute of Mechanics of NAS Republic of Armenia, Yerevan

Keywords: elastic body, kinematics, deformation, elastic manipulator, transformation matrix, inextensibility.

Abstract. The results of a study of the kinematics of motion and the deformation state of an elastic body are used as an application in modeling the motion and determining the deformation of a two-link elastic manipulator. Within the framework of the linear theory of elasticity, the kinematic relations of the movements of the elastic manipulator are determined from the general formulas of the kinematics of the movements of the elastic body. The deformation state of the elastic link of the manipulator and the increment of linear elements will be determined in different coordinate systems.

Введение. В работах [1-4] по аналогии кинематики движения абсолютного твердого тела исследована кинематика деформированного твердого тела. Получены выражения, определяющие в каждый момент времени положение, скорость и ускорения произвольной точки упругого тела относительно подвижной и неподвижной системы координат (рис. 1). Кинематика упругого тела представлена в рамках абсолютного твердого тела, путем введения дополнительных величин, обусловленных упругостью тела. Эти слагаемые являются малыми величинами, имеющими порядок упругих перемещений точек. Целью настоящего исследования является применение полученных результатов, в частности, при моделировании движений манипуляторов с упругими свойствами [5, 6]. Упругое тело движется относительно основной (неподвижной) системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$. Система $Oxyz$ неизменно связана с телом в произвольной точке O . Во время движения тело деформируется, и при этом каждая точка тела Q^1 перемещается в некоторую точку области Q^2 . В рамках исследования принимается, что тело является однородным, для которого распространяется гипотеза сплошности [7-11].

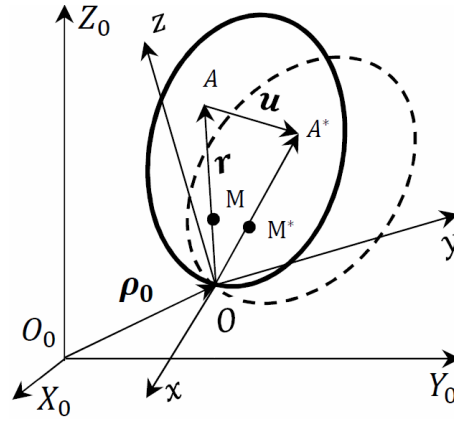


Рис. 1. Деформируемое тело

1. Относительное положение точек упругого тела и манипулятора.

Положение произвольной точки A недеформированного упругого тела Q^1 относительно точки O_0 неподвижной системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$ обозначим радиус – вектором $\mathbf{p}_A = (X_A, Y_A, Z_A)^T$

$$\mathbf{p}_A = \mathbf{p}_0 + \mathbf{r}, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{p}_0 = (X_0, Y_0, Z_0)^T$ радиус-вектор точки O (полюса) относительно системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$, $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ – радиус-вектор произвольной точки $A \in Q^1$ относительно начала системы координат.

Точка $A(x, y, z) \in Q^1$ тела во время деформации получает вектор перемещения $\mathbf{u}$ с проекциями u_1, u_2, u_3 на осях Ox, Oy, Oz и перемещается в некоторую точку A^* области Q^2 ($A^* \in Q^2$).

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = (u_1(x, y, z, t), u_2(x, y, z, t), u_3(x, y, z, t))^T. \quad (1.2)$$

Радиус-вектор произвольной точки $A \in Q^1$ после деформации ($A^* \in Q^2$) в момент времени t в системе координат $Oxyz$, является

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^* &= \mathbf{r} + \mathbf{u}(x, y, z, t), \\ (x^* &= x + u_1(x, y, z, t), y^* = y + u_2(x, y, z, t), z^* = z + u_3(x, y, z, t)). \end{aligned} \quad (1.3)$$

В рамках линейной теории упругости, предполагается, что $u_i \sim \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$, $i = 1, 2, 3$.

Абсолютное положение точек упругого тела относительно системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$ определяется радиус-вектором

$$\mathbf{p}_{A^*} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{r} + \mathbf{u}. \quad (1.4)$$

Соотношения (1.1)-(1.4) и свойства направляющих косинусов позволяют определить положение произвольной точки $A^* \in Q^2$ в системе $O_0X_0Y_0Z_0$

$$\begin{aligned} X_{A^*} &= X_0 + [x + u_1(x, y, z, t)]\alpha_{11} + [y + u_2(x, y, z, t)]\alpha_{21} + [z + u_3(x, y, z, t)]\alpha_{31}, \\ Y_{A^*} &= Y_0 + [x + u_1(x, y, z, t)]\alpha_{12} + [y + u_2(x, y, z, t)]\alpha_{22} + [z + u_3(x, y, z, t)]\alpha_{32}, \\ Z_{A^*} &= Z_0 + [x + u_1(x, y, z, t)]\alpha_{13} + [y + u_2(x, y, z, t)]\alpha_{23} + [z + u_3(x, y, z, t)]\alpha_{33}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

или в векторном виде

$$\rho_{A^*} = \rho_0 + \Gamma^T (\mathbf{r} + \mathbf{u}), \quad \Gamma = \{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^{3,3}, \quad (1.6)$$

где Γ – матрица преобразования.

В случае абсолютно твердого тела ($u_i(x, y, z, t) \equiv 0, i=1, 2, 3$), имеем $\rho_A = \rho_0 + \Gamma^T \mathbf{r}$. В системе $Oxyz$ имеем $\mathbf{r} = \Gamma(\rho_{A^*} - \rho_0) - \mathbf{u}(x, y, z, t)$. Выводы формул (1.5) и свойства матрицы $\left(\Gamma^T = \Gamma^{-1}; \Gamma \times \Gamma^T = \Gamma^T \times \Gamma = \mathbf{E}; \frac{d\Gamma}{dt} \cdot \mathbf{r} = \Gamma \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \right)$ (1.6)

исследованы в [1, 2, 13].

1.1 Положение точек упругого манипулятора. Определим положение произвольной точки упругого манипулятора, согласно (1.5). Второе звено манипулятора моделируется как упругий стержень, а первое звено – абсолютно твердый стержень (рис. 2). Звенья манипулятора соединены идеально цилиндрическими шарнирами O_0, O . Система координат $O_0X_0Y_0Z_0$ является инерциальной, а $Oxyz$ связана с упругим звеном и ось Oy совпадает с недеформированным состоянием упругого звена.

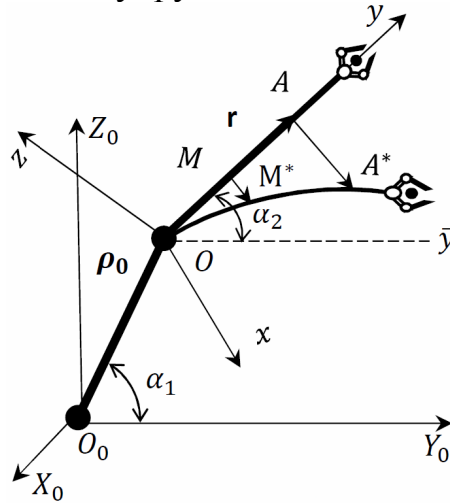


Рис. 2. Упругий манипулятор (l_1 – длина первого звена, l_2 – длина второго звена)

Радиус-вектор $\mathbf{r}$ произвольной точки A недеформированного звена относительно $Oxyz$ и вектор упругих перемещений $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ той же точки зависят только от координат $y \in [0, l_2]$ и от времени t .

$$\mathbf{r} = (0, y, 0)^T, \quad \mathbf{u} = (u_1(0, y, 0, t), u_2(0, y, 0, t), u_3(0, y, 0, t))^T. \quad (1.7)$$

После деформации имеем

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + \mathbf{u}(y, t), \quad \mathbf{r}^* = (u_1(y, t), y + u_2(y, t), u_3(y, t))^T. \quad (1.8)$$

Радиус-вектор ρ_{A^*} абсолютного положения точки A^* относительно неподвижной системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$ является

$$\rho_{A^*} = \rho_0 + \mathbf{r} + \mathbf{u}. \quad (1.9)$$

Представим (1.8) в координатном виде

$$\begin{aligned} X_{A^*} \mathbf{i}_0 + Y_{A^*} \mathbf{j}_0 + Z_{A^*} \mathbf{k}_0 = \\ = 0 \mathbf{i}_0 + Y_0 \mathbf{j}_0 + Z_0 \mathbf{k}_0 + (u_1(y, t)) \mathbf{i} + (y + u_2(y, t)) \mathbf{j} + (u_3(y, t)) \mathbf{k}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где $(\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0)$ – орты системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$, а $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ системы $Oxyz$.

Умножая (1.10) последовательно на $(\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0)$, получим выражение (1.5), для упругого двухзвенного манипулятора в виде

$$\begin{aligned} X_{A^*} &= u_1(y, t)\alpha_{11} + (y + u_2(y, t))\alpha_{21} + u_3(y, t)\alpha_{31}, \\ Y_{A^*} &= Y_0 + u_1(y, t)\alpha_{12} + (y + u_2(y, t))\alpha_{22} + u_3(y, t)\alpha_{32}, \\ Z_{A^*} &= Z_0 + u_1(y, t)\alpha_{13} + (y + u_2(y, t))\alpha_{23} + u_3(y, t)\alpha_{33}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Поскольку движение манипулятора происходит в вертикальной плоскости $Y_0O_0Z_0$, а $O_0X_0Y_0Z_0$ и $Oxyz$ являются ортогональными, то элементы матрицы Γ^T (1.6) в рассматриваемом случае имеют следующие значения

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= (\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}_0) = 1; \alpha_{21} = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}_0) = 0; \alpha_{31} = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{i}_0) = 0, \\ \alpha_{12} &= (\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}_0) = 0; \alpha_{22} = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}_0) = \cos \alpha_2; \alpha_{32} = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}_0) = -\sin \alpha_2, \\ \alpha_{13} &= (\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}_0) = 0; \alpha_{23} = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{k}_0) = \sin \alpha_2; \alpha_{33} = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_0) = \cos \alpha_2. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Следовательно,

$$\Gamma^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_2 & -\sin \alpha_2 \\ 0 & \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 \end{pmatrix}, \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_2 & \sin \alpha_2 \\ 0 & -\sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 \end{pmatrix}, (\Gamma^T = \Gamma^{-1}). \quad (1.13)$$

В системе координат $O_0X_0Y_0Z_0$ (1.9) определяется выражением

$$\mathbf{p}_{A^*} = \begin{pmatrix} 0 \\ l_1 \cos \alpha_1 \\ l_1 \sin \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_2 & -\sin \alpha_2 \\ 0 & \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(y, t) \\ y + u_2(y, t) \\ u_3(y, t) \end{pmatrix}, \text{ где } \mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ l_1 \cos \alpha_1 \\ l_1 \sin \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

или в координатном виде

$$\begin{aligned} X_{A^*} &= u_1(y, t), Y_{A^*} = l_1 \cos \alpha_1 + y \cos \alpha_2 + u_2(y, t) \cos \alpha_2 - u_3(y, t) \sin \alpha_2, \\ Z_{A^*} &= l_1 \sin \alpha_1 + y \sin \alpha_2 + u_2(y, t) \sin \alpha_2 + u_3(y, t) \cos \alpha_2. \end{aligned} \quad (1.15)$$

В подвижной системе координат $Oxyz$ радиус-вектор $\mathbf{r}^*$ можно выразить через компоненты векторов $\mathbf{p}_{A^*}$ и $\mathbf{p}_0$ следующим образом

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + \mathbf{u}(\xi, t) = \Gamma(\mathbf{p}_{A^*} - \mathbf{p}_0), \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} u_1(y, t) &= X_{A^*}, u_2(y, t) + y = (Y_{A^*} - l_1 \cos \alpha_1) \cos \alpha_2 + (Z_{A^*} - l_1 \sin \alpha_1) \sin \alpha_2, \\ u_3(y, t) &= (Y_{A^*} - l_1 \cos \alpha_1) \sin \alpha_2 + (Z_{A^*} - l_1 \sin \alpha_1) \cos \alpha_2. \end{aligned}$$

1.2 Скорость и ускорение движений упругого манипулятора. Скорость движения точек упругого тела (рис. 1) относительно неподвижной системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$ имеет вид [1, 2]

$$\mathbf{V}_{A^*} = \mathbf{V}_0 + \Gamma^T \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \Gamma^T \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(x, y, z, t) + \Gamma^T \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}(x, y, z, t)). \quad (1.17)$$

Выражения, входящие в (1.17) для определения скорости движения манипулятора относительно системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$ являются

$$\mathbf{V}_0 = \frac{d\mathbf{p}_0}{dt} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\alpha}_1 l_1 \sin \alpha_1 \\ \dot{\alpha}_1 l_1 \cos \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned}\Gamma^T \cdot (\omega \times r) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_2 & -\sin \alpha_2 \\ 0 & \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & j & k \\ \omega_x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -y\omega_x \sin \alpha_2 \\ y\omega_x \cos \alpha_2 \end{pmatrix}, \\ \Gamma^T \cdot \frac{\partial \mathbf{u}(y,t)}{\partial t} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_2 & -\sin \alpha_2 \\ 0 & \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_1(y,t) \\ \dot{u}_2(y,t) \\ \dot{u}_3(y,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{u}_1(y,t) \\ \dot{u}_2(y,t) \cos \alpha_2 - \dot{u}_3(y,t) \sin \alpha_2 \\ \dot{u}_2(y,t) \sin \alpha_2 + \dot{u}_3(y,t) \cos \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad (1.19) \\ \Gamma^T \cdot (\omega \times \mathbf{u}(y,t)) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -u_3(y,t)\omega_x \cos \alpha_2 - u_2(y,t)\omega_x \sin \alpha_2 \\ -u_3(y,t)\omega_x \sin \alpha_2 + u_2(y,t)\omega_x \cos \alpha_2 \end{pmatrix}. \quad (1.20)\end{aligned}$$

По результатам (1.17)-(1.20), имеем

$$\begin{aligned}V_{X_0} &= \dot{u}_1(y,t), V_{Y_0} = -\dot{\alpha}_1 l_1 \sin \alpha_1 - y\omega_x \sin \alpha_2 + \dot{u}_2(y,t) \cos \alpha_2 - \dot{u}_3(y,t) \sin \alpha_2 - \\ &- u_2(y,t)\omega_x \sin \alpha_2 - u_3(y,t)\omega_x \cos \alpha_2, V_{Z_0} = \dot{\alpha}_1 l_1 \cos \alpha_1 + y\omega_x \cos \alpha_2 + \dot{u}_2(y,t) \sin \alpha_2 + \\ &+ \dot{u}_3(y,t) \cos \alpha_2 + u_2(y,t)\omega_x \cos \alpha_2 - u_3(y,t)\omega_x \sin \alpha_2; (\omega_x = \dot{\alpha}_2). \quad (1.21)\end{aligned}$$

Скорость движения (1.17) представим в виде суммы двух скоростей

$$\mathbf{V}_{A^*} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2, \quad (1.22)$$

где $\mathbf{V}_1$ – скорость движения манипулятора с абсолютно твердыми звеньями

$$V_{1X_0} = 0, V_{1Y_0} = -\dot{\alpha}_1 l_1 \sin \alpha_1 - y\omega_x \sin \alpha_2, V_{1Z_0} = \dot{\alpha}_1 l_1 \cos \alpha_1 + y\omega_x \cos \alpha_2; (\omega_x = \dot{\alpha}_2), \quad (1.23)$$

а $\mathbf{V}_2$ – скорость движения, обусловленного упругостью второго звена

$$\begin{aligned}V_{2X_0} &= \dot{u}_1(y,t), V_{2Y_0} = \dot{u}_2(y,t) \cos \alpha_2 - \dot{u}_3(y,t) \sin \alpha_2 - \\ &- u_2(y,t)\omega_x \sin \alpha_2 - u_3(y,t)\omega_x \cos \alpha_2, \quad (1.24)\end{aligned}$$

$$V_{2Z_0} = \dot{u}_2(y,t) \sin \alpha_2 + \dot{u}_3(y,t) \cos \alpha_2 + u_2(y,t)\omega_x \cos \alpha_2 - u_3(y,t)\omega_x \sin \alpha_2.$$

Слагаемое $\mathbf{V}_2$ имеет порядок ε , поскольку $u_i(y,t) \sim \varepsilon$, $\dot{u}_i(y,t) \sim \varepsilon$ $t \sim 1$, $i = 1, 2, 3$.

Ускорение движения точек упругого тела относительно $O_0X_0Y_0Z_0$, согласно [1,2], имеет вид

$$\mathbf{W}_{A^*} = \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2,$$

$$\text{где } \mathbf{W}_1 = \mathbf{W}_0 + \frac{d\Gamma^T}{dt} \cdot (\omega \times r) + \Gamma^T \cdot \left(\frac{d\omega}{dt} \times r \right) = \mathbf{W}_0 + \Gamma^T \cdot (\omega \times (\omega \times r)) +, \quad (1.25)$$

$$+ \Gamma^T \cdot (\varepsilon \times r) = \mathbf{W}_0 + \Gamma^T (\omega \cdot (\omega \cdot r) - r \cdot \omega^2) + \Gamma^T \cdot (\varepsilon \times r),$$

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_2 &= \frac{d}{dt} \left(\Gamma^T \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(x,y,z,t) + \Gamma^T \cdot (\omega \times \mathbf{u}(x,y,z,t)) \right) = \\ &= \Gamma^T \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u}(x,y,z,t) + \Gamma^T \cdot (\varepsilon \times \mathbf{u}(x,y,z,t)) + 2\Gamma^T \cdot \left(\omega \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(x,y,z,t) \right) + \\ &+ \Gamma^T \cdot (\omega \cdot (\omega \cdot \mathbf{u}(x,y,z,t)) - \mathbf{u}(x,y,z,t) \cdot \omega^2). \quad (1.26)\end{aligned}$$

Ускорение движения для абсолютно твердых звеньев манипулятора относительно системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$ определяется выражением $\mathbf{W}_1$, где $\mathbf{W}_0$ – ускорение движения основания второго звена, ε – угловое ускорение второго

звена, $\Gamma^T \cdot (\varepsilon \times \mathbf{r})$ – вращательное ускорение, $\Gamma^T \cdot (\omega \cdot (\omega \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r} \cdot \omega^2)$ – осеостремительное ускорение.

$$\mathbf{W}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\ddot{\alpha}_1 l_1 \sin \alpha_1 - \dot{\alpha}_1^2 l_1 \cos \alpha_1 \\ \ddot{\alpha}_1 l_1 \cos \alpha_1 - \dot{\alpha}_1^2 l_1 \sin \alpha_1 \end{pmatrix}, \Gamma^T \cdot (\varepsilon \times \mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -y \varepsilon_x \sin \alpha_2 \\ y \varepsilon_x \cos \alpha_2 \end{pmatrix}; \quad (1.27)$$

$$\Gamma^T (\omega \times (\omega \times \mathbf{r})) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_x \sin \alpha_2 & -\omega_x \cos \alpha_2 \\ 0 & \omega_x \cos \alpha_2 & -\omega_x \sin \alpha_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \omega_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_x^2 y \cos \alpha_2 \\ -\omega_x^2 y \sin \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Итак, ускорение движений абсолютно жесткой модели манипулятора в проекциях является

$$W_{1X_0} = 0, W_{1Y_0} = -\ddot{\alpha}_1 l_1 \sin \alpha_1 - \dot{\alpha}_1^2 l_1 \cos \alpha_1 - y \varepsilon_x \sin \alpha_2 - y \omega_x^2 \cos \alpha_2, \quad (1.28)$$

$$W_{1Z_0} = \ddot{\alpha}_1 l_1 \cos \alpha_1 - \dot{\alpha}_1^2 l_1 \sin \alpha_1 + y \varepsilon_x \cos \alpha_2 - y \omega_x^2 \sin \alpha_2.$$

По формуле (1.26) определим ускорение движений манипулятора, обусловленных упругостью. Слагаемые в $\mathbf{W}_2$ являются

$$\Gamma^T \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}(y, t)}{\partial t^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_2 & -\sin \alpha_2 \\ 0 & \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{u}_1(y, t) \\ \ddot{u}_2(y, t) \\ \ddot{u}_3(y, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{u}_1(y, t) \\ \ddot{u}_2(y, t) \cos \alpha_2 - \ddot{u}_3(y, t) \sin \alpha_2 \\ \ddot{u}_2(y, t) \sin \alpha_2 + \ddot{u}_3(y, t) \cos \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad (1.29)$$

$$\Gamma^T \cdot (\varepsilon \times \mathbf{u}(y, t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon_x u_3(y, t) \cos \alpha_2 - \varepsilon_x u_2(y, t) \sin \alpha_2 \\ -\varepsilon_x u_3(y, t) \sin \alpha_2 + \varepsilon_x u_2(y, t) \cos \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad (1.30)$$

$$\Gamma^T \cdot (\omega \times (\omega \times \mathbf{u}(y, t))) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_x^2 u_2(y, t) \cos \alpha_2 + \omega_x^2 u_3(y, t) \sin \alpha_2 \\ -\omega_x^2 u_2(y, t) \sin \alpha_2 - \omega_x^2 u_3(y, t) \cos \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad (1.31)$$

$$\Gamma^T \cdot (\omega \times \dot{\mathbf{u}}(y, t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_x \dot{u}_3(y, t) \cos \alpha_2 - \omega_x \dot{u}_2(y, t) \sin \alpha_2 \\ -\omega_x \dot{u}_3(y, t) \sin \alpha_2 + \omega_x \dot{u}_2(y, t) \cos \alpha_2 \end{pmatrix}. \quad (1.32)$$

Ускорения движений упругого манипулятора, согласно (1.29)-(1.32) в проекциях имеют вид

$$\begin{aligned} W_{2X_0} &= \ddot{u}_1(y, t), \\ W_{2Y_0} &= \ddot{u}_2(y, t) \cos \alpha_2 - \ddot{u}_3(y, t) \sin \alpha_2 - \varepsilon_x u_3(y, t) \cos \alpha_2 - \varepsilon_x u_2(y, t) \sin \alpha_2 - \\ &\quad - \omega_x^2 u_2(y, t) \cos \alpha_2 + \omega_x^2 u_3(y, t) \sin \alpha_2 - 2\omega_x \dot{u}_3(y, t) \cos \alpha_2 - 2\omega_x \dot{u}_2(y, t) \sin \alpha_2, \\ W_{2Z_0} &= \ddot{u}_2(y, t) \sin \alpha_2 + \ddot{u}_3(y, t) \cos \alpha_2 - \varepsilon_x u_3(y, t) \sin \alpha_2 + \varepsilon_x u_2(y, t) \cos \alpha_2 - \\ &\quad - \omega_x^2 u_2(y, t) \sin \alpha_2 - \omega_x^2 u_3(y, t) \cos \alpha_2 - 2\omega_x \dot{u}_3(y, t) \sin \alpha_2 + 2\omega_x \dot{u}_2(y, t) \cos \alpha_2. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Все слагаемые в (1.33) имеют порядок ε ,

По аналогии с [12-14], $\Gamma^T \cdot (\varepsilon \times \mathbf{u}(y, t))$ является вращательным, $\Gamma^T \cdot (\omega \times (\omega \times \mathbf{u}(y, t)))$ – осестремительным, $\Gamma^T \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u}(y, t)$ – относительным ускорениями, а $2\Gamma^T \cdot \left(\omega \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(y, t) \right)$ – ускорением Кориолиса.

Объединяя (1.28) и (1.33), окончательно получим проекции ускорения движений упругого манипулятора в вертикальной плоскости

$$\begin{aligned} W_{X_0} &= \ddot{u}_1(y, t) \\ W_{Y_0} &= -\ddot{\alpha}_1 l_1 \sin \alpha_1 - \dot{\alpha}_1^2 l_1 \cos \alpha_1 - y \varepsilon_x \sin \alpha_2 - y \omega_x^2 \cos \alpha_2 + \\ &+ \ddot{u}_2(y, t) \cos \alpha_2 - \ddot{u}_3(y, t) \sin \alpha_2 - \varepsilon_x u_3(y, t) \cos \alpha_2 - \varepsilon_x u_2(y, t) \sin \alpha_2 - \\ &- \omega_x^2 u_2(y, t) \cos \alpha_2 + \omega_x^2 u_3(y, t) \sin \alpha_2 - 2\omega_x \dot{u}_3(y, t) \cos \alpha_2 - 2\omega_x \dot{u}_2(y, t) \sin \alpha_2, \\ W_{Z_0} &= \ddot{\alpha}_1 l_1 \cos \alpha_1 - \dot{\alpha}_1^2 l_1 \sin \alpha_1 + y \varepsilon_x \cos \alpha_2 - y \omega_x^2 \sin \alpha_2 + \\ &+ \ddot{u}_2(y, t) \sin \alpha_2 + \ddot{u}_3(y, t) \cos \alpha_2 - \varepsilon_x u_3(y, t) \sin \alpha_2 + \varepsilon_x u_2(y, t) \cos \alpha_2 - \\ &- \omega_x^2 u_2(y, t) \sin \alpha_2 - \omega_x^2 u_3(y, t) \cos \alpha_2 - 2\omega_x \dot{u}_3(y, t) \sin \alpha_2 + 2\omega_x \dot{u}_2(y, t) \cos \alpha_2. \end{aligned} \quad (1.34)$$

2. Деформация упругого звена манипулятора. Поскольку до деформации упругое звено манипулятора совпадает с осью Oy (Фиг.2), то согласно общим формул [7-11], имеем

$$dx^* = \frac{\partial u_1(y, t)}{\partial y} dy; dy^* = \left(1 + \frac{\partial u_2(y, t)}{\partial y} \right) dy; dz^* = \frac{\partial u_3(y, t)}{\partial y} dy \quad (2.1)$$

или $d\mathbf{r}^* = \mathbf{D}d\mathbf{r}$, где

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\partial u_1(y, t)}{\partial y} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{\partial u_2(y, t)}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_3(y, t)}{\partial y} & 1 \end{pmatrix}; d\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ dy \\ 0 \end{pmatrix}; d\mathbf{r}^* = \begin{pmatrix} dx^* \\ dy^* \\ dz^* \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Линейным элементом $d\mathbf{r}$ после деформации относительно системы координат $Oxyz$, является

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}^* &= dx^* \mathbf{i} + dy^* \mathbf{j} + dz^* \mathbf{k} = \left(\frac{\partial u_1(y, t)}{\partial y} dy \right) \mathbf{i} + \left(\left(1 + \frac{\partial u_2(y, t)}{\partial y} \right) dy \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial u_3(y, t)}{\partial y} dy \right) \mathbf{k} = \\ &= 0 \cdot \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k} + \left(\frac{\partial u_1(y, t)}{\partial y} dy \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial u_2(y, t)}{\partial y} dy \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial u_3(y, t)}{\partial y} dy \right) \mathbf{k} = \\ &= d\mathbf{r} + d\mathbf{u}(du_1, du_2, du_3). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из (2.3) имеем $du = \mathbf{D}_1 d\mathbf{r}$, где $\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u_1(y,t)}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_2(y,t)}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_3(y,t)}{\partial y} & 0 \end{pmatrix}$. (2.4)

По аналогии с (1.11), (1.12), определим положения точек упругого звена после деформации относительно системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$.

Радиус-вектор линейного элемента относительно $O_0X_0Y_0Z_0$ имеет вид

$$\mathbf{p}_{M^*} = \mathbf{p}_0 + d\mathbf{r} + d\mathbf{u} \quad (2.5)$$

или $X_{M^*}\mathbf{i}_0 + Y_{M^*}\mathbf{j}_0 + Z_{M^*}\mathbf{k}_0 = 0\mathbf{i}_0 + Y_0\mathbf{j}_0 + Z_0\mathbf{k}_0 + 0 \cdot \mathbf{i} + dy\mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k} +$

$$+ \left(\frac{\partial u_1(y,t)}{\partial y} dy \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial u_2(y,t)}{\partial y} dy \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial u_3(y,t)}{\partial y} dy \right) \mathbf{k}. \quad (2.6)$$

Умножая (2.6) последовательно на $(\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0)$ и учитывая (1.12), получим

$$\begin{aligned} X_{M^*} &= \frac{\partial u_1(y,t)}{\partial y} dy, \quad Y_{M^*} = l_1 \cos \alpha_1 + \left(\left(1 + \frac{\partial u_2(y,t)}{\partial y} \right) dy \right) \cos \alpha_2 - \frac{\partial u_3(y,t)}{\partial y} dy \sin \alpha_2, \\ Z_{M^*} &= l_1 \sin \alpha_1 + \left(\left(1 + \frac{\partial u_2(y,t)}{\partial y} \right) dy \right) \sin \alpha_2 + \frac{\partial u_3(y,t)}{\partial y} dy \cos \alpha_2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Относительное удлинение ε_{yy} элемента $d\mathbf{r}$, определяется выражением

$$(ds^*)^2 - (ds)^2 = 2\varepsilon_{yy} dy^2, \quad (2.8)$$

где $\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_2(y,t)}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1(y,t)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2(y,t)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3(y,t)}{\partial y} \right)^2 \right]$ и $ds^* = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{yy}} dy$

$$(ds^* = |d\mathbf{r}^*|), \left(\varepsilon_{xx} = 0, \varepsilon_{zz} = 0, \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_1(y,t)}{\partial y}, \varepsilon_{xz} = 0, \varepsilon_{yz} = \frac{\partial u_3(y,t)}{\partial y} \right)$$

Поскольку линейный элемент $d\mathbf{r}$ параллелен оси Oy , то после деформации направление упругого звена относительно $Oxyz$ определяется углами, косинусами которых являются

$$\begin{aligned} \cos(OM^*, Ox) &= \frac{dx^*}{ds^*} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{yy}}} \frac{\partial u_1(y,t)}{\partial y}; \\ \cos(OM^*, Oy) &= \frac{dy^*}{ds^*} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{yy}}} \left(1 + \frac{\partial u_2(y,t)}{\partial y} \right); \\ \cos(OM^*, Oz) &= \frac{dz^*}{ds^*} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{yy}}} \frac{\partial u_3(y,t)}{\partial y}. \end{aligned}$$

В данном случае

$$\Gamma^* = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1(y,t)}{\partial y} & 0 & 0 \\ 1 + \frac{\partial u_2(y,t)}{\partial y} & 0 & 0 \\ \frac{\partial u_3(y,t)}{\partial y} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

является матрицей перехода от криволинейной системы координат $M^* \overline{xyz}$ (рис. 3) к подвижной системе $Oxyz$. Определим положение точек упругого звена до деформации через положение этих же точек после деформации. Согласно $(d\mathbf{r})_{Oxyz} = \Gamma^* d\mathbf{r}^*$, имеем

$$\begin{aligned} (dx)_{Oxyz} &= dx^* + \frac{\partial u_1(y,t)}{\partial y} dy^*, (dy)_{Oxyz} = \left(\frac{1 + \frac{\partial u_2(y,t)}{\partial y}}{\sqrt{1 + 2\epsilon_{yy}}} \right) dy^*, \\ (dz)_{Oxyz} &= dz^* + \frac{\partial u_3(y,t)}{\sqrt{1 + 2\epsilon_{yy}}} dy^*. \end{aligned} \quad (2.9)$$

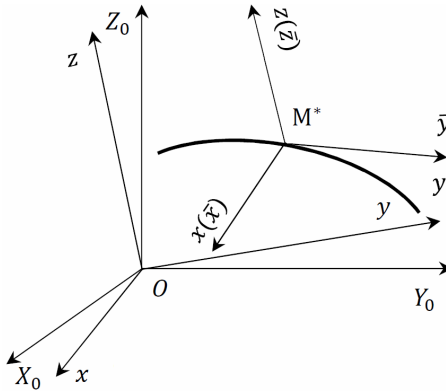


Рис. 3. Системы координат

Положение точек упругого звена до деформации $d\mathbf{r}$ через положение этих же точек после деформации $d\mathbf{r}^*$ относительно неподвижной системы координат $OX_0Y_0Z_0$ определим по формуле $(d\mathbf{r})_{OX_0Y_0Z_0} = \Gamma^T \cdot \Gamma^* d\mathbf{r}^*$ ($\mathbf{p}_0 = 0$), где

$$\mathbf{\Gamma}^T \cdot \mathbf{\Gamma}^* = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\frac{\partial u_1(y,t)}{\partial y}}{\sqrt{1+2\varepsilon_{yy}}} & 0 \\ 0 & \frac{1+\frac{\partial u_2(y,t)}{\partial y}}{\sqrt{1+2\varepsilon_{yy}}} \cos \alpha_2 - \frac{\frac{\partial u_3(y,t)}{\partial y}}{\sqrt{1+2\varepsilon_{yy}}} \sin \alpha_2 & -\sin \alpha_2 \\ 0 & \frac{1+\frac{\partial u_2(y,t)}{\partial y}}{\sqrt{1+2\varepsilon_{yy}}} \sin \alpha_2 + \frac{\frac{\partial u_3(y,t)}{\partial y}}{\sqrt{1+2\varepsilon_{yy}}} \cos \alpha_2 & \cos \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} (dx)_{OX_0Y_0Z_0} &= dx^* + \frac{\frac{\partial u_1(y,t)}{\partial y}}{\sqrt{1+\varepsilon_{yy}}} dy^*, \\ (dy)_{OX_0Y_0Z_0} &= \left(\frac{1+\frac{\partial u_2(y,t)}{\partial y}}{\sqrt{1+2\varepsilon_{yy}}} \cos \alpha_2 - \frac{\frac{\partial u_3(y,t)}{\partial y}}{\sqrt{1+2\varepsilon_{yy}}} \sin \alpha_2 \right) dy^* - \sin \alpha_2 \cdot dz^*, \\ (dz)_{OX_0Y_0Z_0} &= \left(\frac{1+\frac{\partial u_2(y,t)}{\partial y}}{\sqrt{1+2\varepsilon_{yy}}} \sin \alpha_2 + \frac{\frac{\partial u_3(y,t)}{\partial y}}{\sqrt{1+2\varepsilon_{yy}}} \cos \alpha_2 \right) dy^* + \cos \alpha_2 \cdot dz^* \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.1. Приращения компонентов линейного элемента. Шесть величин $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$, выражающихся через производные компоненты вектора перемещения, будучи известными в каждой точке тела, полностью характеризуют его деформацию [7-11]. Деформациями в классической линейной теории упругости являются

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_1(x,y,z,t)}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_2(x,y,z,t)}{\partial y}, \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_3(x,y,z,t)}{\partial z}, \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_1(x,y,z,t)}{\partial y} + \\ &+ \frac{\partial u_2(x,y,z,t)}{\partial x}, \varepsilon_{xz} = \frac{\partial u_1(x,y,z,t)}{\partial z} + \frac{\partial u_3(x,y,z,t)}{\partial x}, \varepsilon_{yz} = \frac{\partial u_2(x,y,z,t)}{\partial z} + \frac{\partial u_3(x,y,z,t)}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Наряду с (2.12), введем также три выражения

$$\begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3(x,y,z,t)}{\partial y} - \frac{\partial u_2(x,y,z,t)}{\partial z} \right), \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1(x,y,z,t)}{\partial z} - \frac{\partial u_3(x,y,z,t)}{\partial x} \right), \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2(x,y,z,t)}{\partial x} - \frac{\partial u_1(x,y,z,t)}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

после чего частные производные от компонентов вектора перемещений, согласно (2.12) и (2.13), будут выражаться через эти параметры следующим образом

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1(x, y, z, t)}{\partial x} &= \varepsilon_{xx}, \frac{\partial u_1(x, y, z, t)}{\partial y} = \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} - \omega_z, \frac{\partial u_1(x, y, z, t)}{\partial z} = \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} + \omega_y, \\ \frac{\partial u_2(x, y, z, t)}{\partial x} &= \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} + \omega_z, \frac{\partial u_2(x, y, z, t)}{\partial y} = \varepsilon_{yy}, \frac{\partial u_2(x, y, z, t)}{\partial z} = \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} - \omega_x, \\ \frac{\partial u_3(x, y, z, t)}{\partial x} &= \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} - \omega_y, \frac{\partial u_3(x, y, z, t)}{\partial y} = \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} + \omega_x, \frac{\partial u_3(x, y, z, t)}{\partial z} = \varepsilon_{zz}.\end{aligned}\quad (2.14)$$

В общем случае формула для приращения $d\mathbf{u}(x, y, z, t)$ линейного элемента $d\mathbf{r}$, с учетом (2.12)-(2.14) имеет вид

$$d\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{D}_1 d\mathbf{r}, \quad \mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{zx} & \frac{1}{2}\varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Матрица $\mathbf{D}_1$ представлена в виде суммы двух матриц. Первая матрица является тензором деформации, а вторая матрица кососимметричная и эквивалентна операции векторного умножения, а именно [7-11]

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_y dz - \omega_z dy \\ \omega_z dx - \omega_x dz \\ \omega_x dy - \omega_y dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ dx & dy & dz \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r}), \quad (2.16)$$

$\boldsymbol{\omega} = (\omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k})$ – есть вектор угловой скорости элементарного вращения линейного элемента $d\mathbf{r}$ относительно осей подвижной системы $Oxyz$.

Следовательно, формулу для приращения линейного элемента (2.15), можно представить в виде

$$d\mathbf{u} = \mathbf{S} \cdot d\mathbf{r} + (\boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r}), \quad (2.17)$$

где

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{zx} & \frac{1}{2}\varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} du_1(x, y, z, t) &= \varepsilon_{xx}dx + \left(\frac{1}{2}\varepsilon_{xy} - \omega_z\right)dy + \left(\frac{1}{2}\varepsilon_{xz} + \omega_y\right)dz, \\ du_2(x, y, z, t) &= \left(\frac{1}{2}\varepsilon_{yx} + \omega_z\right)dx + \varepsilon_{yy}dy + \left(\frac{1}{2}\varepsilon_{yz} - \omega_x\right)dz, \\ du_3(x, y, z, t) &= \left(\frac{1}{2}\varepsilon_{zx} - \omega_y\right)dx + \left(\frac{1}{2}\varepsilon_{zy} + \omega_x\right)dy + \varepsilon_{zz}dz. \end{aligned}$$

Таким образом, элементарное приращение $d\mathbf{u}(x, y, z, t)$ линейного элемента $d\mathbf{r}$ есть результат приращения с компонентами

$$\left(\varepsilon_{xx}dx + \frac{1}{2}\varepsilon_{xy}dy + \frac{1}{2}\varepsilon_{xz}dz; \frac{1}{2}\varepsilon_{yx}dx + \varepsilon_{yy}dy + \frac{1}{2}\varepsilon_{yz}dz; \frac{1}{2}\varepsilon_{zx}dx + \frac{1}{2}\varepsilon_{zy}dy + \varepsilon_{zz}dz\right), \quad (2.18)$$

называемого чистой деформацией и приращения с компонентами

$$\omega_y dz - \omega_z dy, \omega_z dx - \omega_x dz, \omega_x dy - \omega_y dx, \quad (2.19)$$

представляющего приращение при вращении рассматриваемого элемента как абсолютно твердого. Если элементарные вращения отсутствуют, $(\boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r}) = 0$, то имеет место чистая деформация.

Вектор упругого перемещения $d\mathbf{u} = \mathbf{S} \cdot d\mathbf{r} + (\boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r})$ в системе $OX_0Y_0Z_0$ определяется выражением

$$\boldsymbol{\rho}_{M^*} = \boldsymbol{\rho}_0 + \boldsymbol{\Gamma}^T \cdot \tilde{\mathbf{S}} \cdot d\mathbf{r} + \boldsymbol{\Gamma}^T \cdot (\boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r}), \quad (2.20)$$

($\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{E} + \mathbf{S}$) ($\mathbf{E}$ – единичная матрица).

Формулы для приращения компонентов линейного элемента упругого звена манипулятора в рассматриваемом случае будут

$$du_1(y, t) = \frac{1}{2} \varepsilon_{xy} dy - \omega_z dy, du_2(y, t) = \varepsilon_{yy} dy, du_3(y, t) = \frac{1}{2} \varepsilon_{zy} dy + \omega_x dy, \quad (2.21)$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \varepsilon_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2} \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2} \varepsilon_{yz} \\ 0 & \frac{1}{2} \varepsilon_{zy} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & 0 & \omega_z \\ 0 & dy & 0 \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_1(y, t)}{\partial y}, \varepsilon_{xz} = 0, \varepsilon_{yz} = \frac{\partial u_3(y, t)}{\partial y}, \omega_x = \frac{1}{2} \frac{\partial u_3(y, t)}{\partial y}, \omega_y = 0, \omega_z = -\frac{1}{2} \frac{\partial u_1(y, t)}{\partial y}.$$

2.2. Случай нерастяжимости упругого звена манипулятора. Условия нерастяжимости упругого звена манипулятора (рис. 2) приводят к некоторому соотношению между компонентами вектора упругих перемещений (1.7) [6, 12].

$$\frac{\partial u_2(y, t)}{\partial y} = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1(y, t)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2(y, t)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3(y, t)}{\partial y} \right)^2 \right] (ds^* = ds = dy). \quad (2.22)$$

Случай малого отклонения упругого звена от недеформированного состояния, то есть

$$u_i(y, t) \sim \varepsilon, \frac{\partial u_i(y, t)}{\partial y} \sim \varepsilon, \frac{\partial u_i(y, t)}{\partial t} \sim \varepsilon (i=1, 3), (\varepsilon \ll 1), \quad (2.23)$$

следует принять, что

$$u_2(y, t) \sim \varepsilon^2, \frac{\partial u_2(y, t)}{\partial y} \sim \varepsilon^2, \frac{\partial u_2(y, t)}{\partial t} \sim \varepsilon^2. \quad (2.24)$$

Следовательно, условия нерастяжимости (2.22) можно записать в виде

$$\frac{\partial u_2(y, t)}{\partial y} = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1(y, t)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3(y, t)}{\partial y} \right)^2 \right]. \quad (2.25)$$

После деформации имеем

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + \mathbf{u}(y, t),$$

где $\mathbf{r}^* = (u_1(y, t), y, u_3(y, t))^T$, $\mathbf{u} = (u_1(y, t), 0, u_3(y, t))^T$

Формулы, определяющие кинематику движения и деформационного состояния упругого манипулятора, упрощаются, принимая $u_2(y, t) = 0$.

Заключение. Определено относительное положение точек однородного упругого тела и двухзвенного упругого манипулятора. Кинематические соотношения движений точек упругого тела исследованы в рамках линейной теории упругости. По результатам исследования определены скорость и ускорения движений двухзвенного упругого манипулятора. Дана оценка дополнительных кинематических величин, обусловленных упругостью конструкции. Деформационное состояние упругого тела и упругого звена манипулятора, а также приращение линейных элементов представлены в разных системах координат.

Список литературы

1. Гукасян А.А. Движение деформированного твердого тела. – Ереван: Изд-во НАН РА, Гитутюн, 2024. – 190 с.
2. Гукасян А.А. Некоторые вопросы кинематики движения деформированного твердого тела по аналогии с кинематикой абсолютно твердого тела // Доклады НАН Армении. – 2023. – Т. 123, №3-4. – С. 21-32.
3. Гукасян А.А. Об одном приложении асимптотического метода // Мехатроника, автоматика и робототехника. – 2024. – №13. – С. 23-27.
4. Гукасян А.А. О кинематике движения деформированного твердого тела по аналогии с кинематикой абсолютно твердого тела // Мехатроника, автоматика и робототехника. – 2023. – №12. – С. 14-18.
5. Гукасян А.А. О моделях многозвенных манипуляторов // Мехатроника, автоматика и робототехника. – 2023. – №12. – С. 9-13.
6. Гукасян А.А. О пространственном положении и деформации упругих звеньев манипулятора // Известия НАН Армении. Механика. – 2014. – Т. 67, №4. – С. 53-64.
7. Новожилов В.В. Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 370 с.
8. Лейбензон Л.С. Курс теории упругости. – М.-Л.: Тех.-теор. лит., 1947. – 465 с.
9. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Изд-во «МИР», 1975. – 872 с.
10. Пронина Ю.Г. Лекции по теории упругости. – СПб.: СПбГУ, 2004. – 120 с.
11. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1970. – 939 с.
12. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Наука, 1961. – 824 с.
13. Суслов Г.К. Теоретическая механика. – М.-Л.: ГОСТЕХИЗДАТ, 1946. – 655 с.
14. Поляхов Н.Н., Зегжда С.А., Юшков М.П. Теоретическая механика. Л.: Изд-во Лен. ун-та, 1985. – 536 с.

Сведения об авторе:

Гукасян Артуш Апрегович – д.ф.-м.н., профессор, ведущий научный сотрудник.