

## ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ОТНОСИТЕЛЬНО ДВУХ СИСТЕМ ОТСЧЕТА

*Орлянская Т.И.*

*Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет), Москва*

**Ключевые слова:** инерциальность, неинерциальность, система отсчета, материальная точка, связь, абсолютизация относительного движения.

**Аннотация.** В статье в рамках классической механики исследуется движение материальной точки относительно двух систем отсчета, которые определенным образом движутся относительно друг друга. Показывается, что это движение можно рассматривать не только, как сложное движение материальной точки, но и как движение со связями. Рассматриваются две связи: связь между материальной точкой и неинерциальной системой отсчета и связь между неинерциальной системой отсчета и инерциальной системой отсчета. Уравнения динамики составляются с использованием второго закона Ньютона и аксиомы о связях. Разрыв одной связи при сохранении другой позволяет получить и уравнение динамики абсолютного движения материальной точки со связью и уравнение динамики относительного движения материальной точки. Такой метод получения уравнения динамики относительного движения позволяет увидеть материальный «источник» возникновения дополнительных сил и понять их роль в относительном движении материальной точки.

## MOTION OF A MATERIAL POINT RELATIVE TO TWO REFERENCE SYSTEMS

*Orlyanskaya T.I.*

*Bauman Moscow State Technical University, Moscow*

**Keywords:** inertiality, non-inertiality, reference system, material point, connection, absolutization of relative motion.

**Abstract.** In the article, within the framework of classical mechanics, the motion of a material point relative to two reference systems, which move relative to each other in a certain way, is studied. It is shown that this movement can be considered not only as a complex movement of a material point, but also as a movement with connections. Two connections are considered: the connection between the material point and the non-inertial reference system and the connection between the non-inertial reference system and the inertial reference system. The equations of dynamics are compiled using Newton's second law and the axiom of connections. Breaking one connection while maintaining the other allows us to obtain both the equation for the dynamics of the absolute motion of a material point with the connection and the equation for the dynamics of the relative motion of a material point. This method of obtaining the equation for the dynamics of relative motion allows us to see the material “source” of the emergence of additional forces and understand their role in the relative motion of a material point.

Известно, что движение материальной точки относительно двух систем отсчета, которые определенным образом движутся относительно друг друга, можно рассматривать как сложное движение точки [1, 2]. При этом одну систему отсчета – неподвижную принимают за инерциальную систему отсчета (ИСО), вторую – подвижную за неинерциальную систему отсчета (НИСО). В простейшем случае сложное движение точки состоит из двух движений:

относительного и переносного. Движение точки в НИСО называется относительным. Движение точки вместе с НИСО, как единого целого, в ИСО называется переносным. Движение точки в ИСО называется абсолютным движением. В теоретической механике уравнение динамики относительного движения материальной точки получают из уравнения динамики абсолютного движения, используя теорему ускорений. В правой части уравнения динамики относительного движения появляются дополнительные силы, которые называют силами инерции и рассматривают эти силы как добавки на неинерциальность подвижной системы отсчета. Такой кинематический (или математический) способ получения уравнений динамики относительного движения не позволяет указать на материальный «источник» возникновения этих сил.

Известен еще один способ получения уравнения динамики относительного движения, когда используют формулы преобразования ускорений при переходе к другой системе отсчета [3]. При этом из формулы преобразования ускорений выражают ускорение материальной точки в НИСО. Умножают обе части полученного выражения на массу  $m$  материальной точки и, учитывая, что в ИСО  $m\vec{a} = \vec{F}$ , где  $\vec{a}$  – абсолютное ускорение материальной точки;  $\vec{F}$  – равнодействующая активных сил, действующих на материальную точку, получают уравнение динамики относительного движения. Этот метод получения уравнения динамики относительного движения также кинематический и поэтому, как и предыдущий, не позволяет увидеть материальный «источник» возникновения дополнительных сил.

В связи с этим возникает задача поиска метода составления уравнения динамики относительного движения, при котором выявляется материальной «источник» возникновения дополнительных сил и определяется роль этих сил в относительном движении материальной точки.

С этой целью рассматриваем движение материальной точки  $M$  массой  $m$ , на которую действует сила  $\vec{F}$  – равнодействующая активных сил, относительно двух систем отсчета: НИСО ( $O'x'y'z'$ ) и ИСО ( $Oxyz$ ), которые определенным образом движутся относительно друг друга (рис. 1).

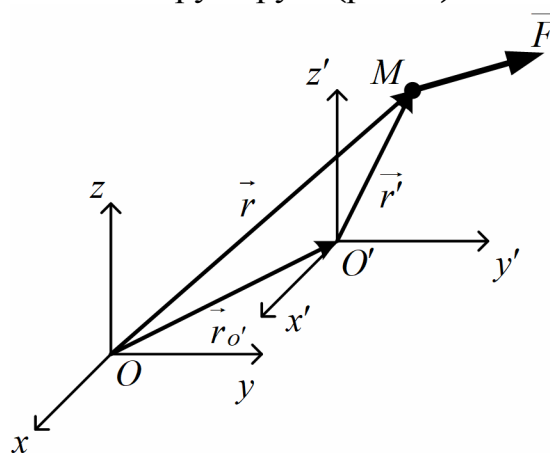


Рис. 1. Положение материальной точки  $M$  относительно двух систем отсчета

На рисунке 1  $\vec{r}$  – радиус-вектор положения материальной точки в ИСО,  $\vec{r}'$  – радиус-вектор положения материальной точки в НИСО,  $\vec{r}_{O'}$  – радиус-вектор положения точки  $O'$  – начала НИСО в ИСО.

Из рисунка 1 видно, что в любой момент времени при движении материальной точки относительно двух систем отсчета выполняется равенство

$$\vec{r} = \vec{r}_{o'} + \vec{r}'.$$

Если рассматривать указанное равенство как ограничение на движение материальной точки и двух систем отсчета, то можно говорить о двух связях, наложенных на их положения и движение: о связи материальной точки  $M$  и НИСО и о связи между НИСО и ИСО.

Связь между материальной точкой  $M$  и НИСО может быть задана в виде закона движения материальной точки в НИСО. Связь между НИСО и ИСО может быть задана в виде закона движения НИСО относительно ИСО. Эти связи можно изобразить схематически в виде структурной схемы (рис. 2). Из структурной схемы видно, что материальную точку  $M$  и НИСО можно рассматривать как механическую совокупность, т.е. как материальную точку со связью.

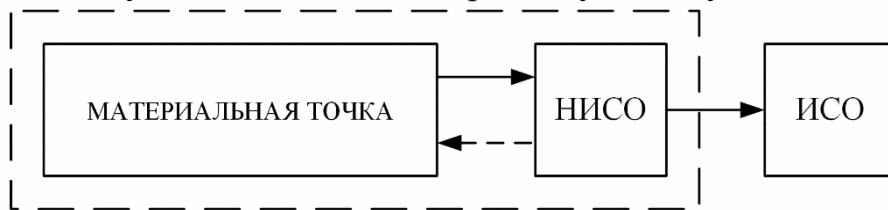


Рис. 2. Структурная схема связей при движении материальной точки относительно двух систем отсчета

На рисунке 2 сплошными стрелками показаны кинематические связи, пунктирной стрелкой показана возникающая динамическая связь.

Относительное движение материальной точки по-прежнему – это движение материальной точки относительно НИСО. Абсолютное движение материальной точки теперь движение материальной точки со связью относительно ИСО.

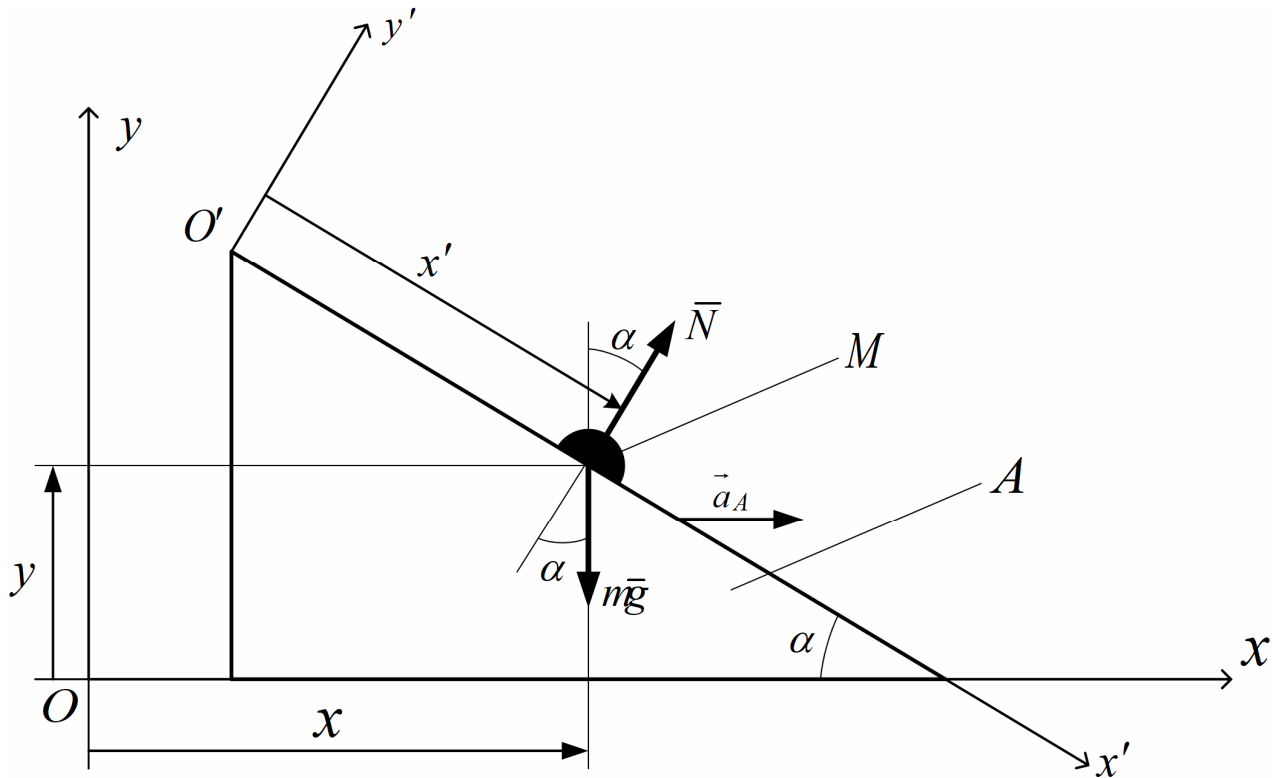
**Постановка задачи.** Имеются две системы отсчета: неподвижная ИСО и подвижная НИСО, которые определенным образом движутся относительно друг друга, материальная точка  $M$  массой  $m$ , на которую действует сила  $\vec{F}$  – равнодействующая активных сил. Известны две кинематические связи, которые наложены на движение материальной точки  $M$  относительно НИСО и на движение НИСО относительно ИСО. Разрывая одну связь и оставляя без изменения другую связь, получить уравнение динамики абсолютного движения материальной точки со связью и уравнение относительного движения материальной точки.

При получении уравнений динамики используем второй закон Ньютона и аксиому о связях.

Для большей наглядности рассмотрим решение поставленной задачи на простом примере, когда НИСО движется относительно ИСО поступательно.

**Пример.** Материальная точка  $M$  скользит вниз по гладкой боковой грани призмы  $A$ , составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом. Призма  $A$  движется поступательно и равноускоренно ( $\vec{a}_A = \text{const}$ ) вдоль горизонтальной плоскости.

**Решение.** Пусть координаты  $x$  и  $y$  определяют положение материальной точки  $M$  в ИСО, а координаты  $x'$  и  $y'$  определяют ее положение в НИСО, которая жестко связана с боковой гранью призмы  $A$  (рис. 3).

Рис. 3. Движение материальной точки  $M$  со связью в ИСО

Рассматриваем движение материальной точки относительно двух систем отсчета: ИСО и НИСО. На положение и движение материальной точки  $M$  в НИСО наложена связь – материальная точка во все время движения скользит по подвижной оси  $O'x'$  НИСО. На положение и движение НИСО также наложена связь. Так как НИСО жестко связана с боковой гранью призмы  $A$ , то относительно ИСО она, также, как и призма  $A$ , перемещается поступательно и равноускоренно. Обе связи, наложенные на движение материальной точки  $M$  и НИСО известны и являются кинематическими связями.

Разрывая одну связь и оставляя без изменений другую, последовательно рассмотрим получение уравнения динамики абсолютного движения материальной точки со связью и уравнения динамики относительного движения материальной точки.

1. Рассматриваем получения уравнения динамики абсолютного движения материальной точки со связью

Для этого разрываем связь между НИСО и ИСО и сохраняем связь между материальной точкой  $M$  и НИСО. Действие отброшенной связи заменяем реакцией связи  $\bar{N}$ . В ИСО на материальную точку со связью действуют две силы: сила тяжести  $m\bar{g}$  материальной точки и реакция связи  $\bar{N}$  (рис. 3).

Уравнение динамики абсолютного движения материальной точки со связью имеет такой же вид, как и уравнение динамики абсолютного движения материальной точки

$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{N}. \quad (1)$$

Проецируя (1) на неподвижные оси  $x$  и  $y$  получаем

$$m\ddot{x} = N \sin \alpha, \quad (2)$$

$$m\ddot{y} = -mg + N \cos \alpha, \quad (3)$$

где  $\ddot{x}$  и  $\ddot{y}$  – проекции абсолютного ускорения движения точки  $M$  на неподвижные оси;  $N$  – неизвестная реакция связи, которая определяется в процессе решения задачи.

Из уравнений (2) и (3) получаем выражение для определения реакции отброшенной связи  $N$

$$N = m\ddot{x} \sin \alpha + m\ddot{y} \cos \alpha + mg \cos \alpha. \quad (4)$$

Рассматриваем абсолютное движение материальной точки со связью, поэтому для дальнейшего определения реакции связи  $N$  нужно ввести в рассмотрение уравнение связи. Получение уравнения связи начинаем с выбора условия, при котором материальная точка во все время движения находится на боковой грани призмы, т.е. скользит по боковой грани призмы. Этим условием может быть равенство скоростей двух контактирующих точек в направлении нормали к боковой грани призмы:

$$v_M^n = v_A^n, \quad (5)$$

где  $v_M^n$ ,  $v_A^n$  – проекции на нормаль к боковой грани скоростей движения точки  $M$  и контактирующей с ней точкой боковой грани призмы  $A$ .

Принимая во внимание, что призма  $A$  движется поступательно и равноускоренно уравнение связи имеет вид

$$\dot{x} \sin \alpha + \dot{y} \cos \alpha = v_A(t) \sin \alpha. \quad (6)$$

Дифференцируя обе части выражения (6) по времени, получаем

$$\ddot{x} \sin \alpha + \ddot{y} \cos \alpha = a_A \sin \alpha. \quad (7)$$

Выражение (7) связывает ускорение, сообщаемое материальной точке  $M$  активными силами, и ускорение контактирующей точки призмы  $A$ . Для того, чтобы понять возникающее внутреннее взаимодействие между материальной точкой  $M$  и боковой гранью призмы  $A$ , с которой жестко связана НИСО, умножаем обе части полученного выражения (7) на массу  $m$  материальной точки  $M$ , переносим возникающую в левой части силу в правую часть и получаем равенство

$$m\ddot{x} \sin \alpha + m\ddot{y} \cos \alpha - ma_A \sin \alpha = 0. \quad (8)$$

В левой части равенства (8) внутренние силы, которые действуют на материальную точку в направлении нормали к боковой грани призмы и которые уравниваются. При этом внутренние силы, возникающие от действия активных сил, уравниваются возникающей со стороны боковой грани призмы внутренней силой  $\vec{R} = -m\vec{a}_A$ .

Далее, что касается выражение (4) для определения реакции связи  $N$ , то, с учетом (7), оно принимает вид

$$N = mg \cos \alpha + ma_A \sin \alpha. \quad (9)$$

Из выражения (9) следует, что реакция связи  $N$  при движении материальной точки со связью, определяется не только с учетом действующей активной силы  $m\vec{g}$ , но и с учетом возникающего внутреннего взаимодействия материальной точки и боковой грани призмы, т.е. силой  $\vec{R} = -m\vec{a}_A$ . При этом реакция связи  $N$  состоит как бы из двух слагаемых

$$N = N_{ст} + N_{дин}, \quad (10)$$

где  $N_{ст} = mg \cos \alpha$  – статическая составляющая реакции связи;  $N_{дин} = ma_A \sin \alpha$  – динамическая составляющая реакции связи.

Найденное значение реакции связи (9) подставляем в уравнения (2) и (3) и получаем дифференциальные уравнения абсолютного движения материальной точки с учетом наложенной связи

$$m\ddot{x} = mg \cos \alpha \sin \alpha + ma_A \sin^2 \alpha, \quad (11)$$

$$m\ddot{y} = -mg \sin^2 \alpha + ma_A \sin \alpha \cos \alpha.$$

Из уравнений (11) следует, что уравнения динамики абсолютного движения материальной точки со связью зависят от воздействия НИСО на материальную точку.

2. Рассматриваем получение уравнения динамики относительного движения материальной точки

Для этого сохраняем связь между НИСО и ИСО и разрываем связь между материальной точкой  $M$  и НИСО. НИСО движется поступательно и равноускоренно относительно ИСО. Действие отброшенной связи на материальную точку  $M$  заменяем дополнительной силой  $\vec{R} = -m\vec{a}_A$ . Движение материальной точки  $M$  в НИСО происходит под действием трех сил: силы тяжести  $m\vec{g}$ , реакции связи  $\vec{N}$  и дополнительной силы  $\vec{R} = -m\vec{a}_A$  (рис. 4).

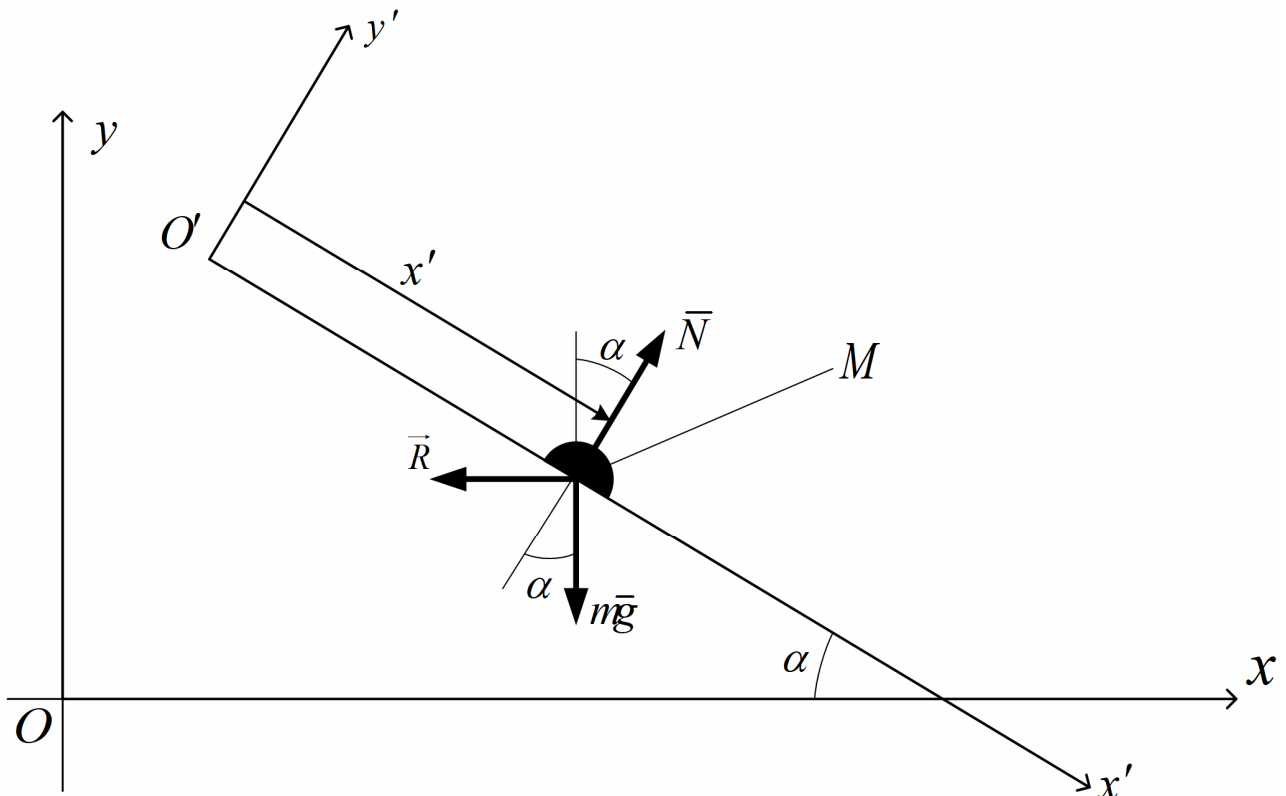


Рис. 4. Движение материальной точки  $M$  в НИСО

Уравнение динамики относительного движения материальной точки  $M$  имеет вид

$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{R} \quad (12)$$

или 
$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{N} - m\vec{a}_A \quad (13)$$

Проецируем уравнение (13) на подвижные оси  $x'$  и  $y'$  и получаем уравнения динамики относительного движения материальной точки  $M$  в аналитической форме

$$ma_r = mg \sin \alpha - ma_A \cos \alpha, \quad (14)$$

$$0 = -mg \cos \alpha - ma_A \sin \alpha + N. \quad (15)$$

Из уравнений (14) и (15) следует, что уравнение динамики относительного движения также, как и уравнение динамики абсолютного движения материальной точки со связью, зависят от воздействия НИСО на материальную точку.

Из уравнения (14)

$$a_r = g \sin \alpha - a_A \cos \alpha.$$

Из уравнения (15) находим

$$N = mg \cos \alpha + ma_A \sin \alpha. \quad (16)$$

Выражение (16) для определенного значения реакции связи, действующей на материальную точку, полностью совпадает с полученным ранее выражением (9). Это очевидно, потому что реакция связи – это результат действия всех отброшенных связей, в том числе и внутренней, которая имеет место при рассмотрении абсолютного движения материальной точки со связью.

Для того, чтобы понять роль дополнительной силы в относительном движении материальной точки, сначала выясним ее роль в уравнении динамики относительного движения.

Так как дополнительная сила  $\vec{R} = -m\vec{a}_A$  в уравнении динамики относительного движения является реакцией отброшенной связи между материальной точкой  $M$  и НИСО, то она абсолютизирует НИСО, которая для материальной точки становится как бы ИСО, и, следовательно, абсолютизирует относительное движение материальной точки, которое теперь описывается в как бы ИСО [4].

Дополнительная сила  $\vec{R} = -m\vec{a}_A$  является массовой силой, пропорциональна ускорению той точки НИСО, в которой она находится; знак «минус» указывает на то, что эта сила противодействует. Эта сила компенсирует неинерциальность НИСО для материальной точки и тем самым относительное движение, которое происходит в НИСО, воспроизводит в ИСО.

Полученные результаты при составлении уравнений динамики движения материальной точки позволяют сделать следующие выводы.

### Выводы

1. Движение материальной точки относительно двух систем отсчета, которые определенным образом движутся относительно друг друга, можно рассматривать с учетом связи между материальной точкой и НИСО и связи между НИСО и ИСО. При этом абсолютное движение материальной точки – это всегда движение материальной точки со связью.

2. При получении уравнения динамики абсолютного движения материальной точки со связью, когда сохраняется связь между материальной точкой и НИСО, рвется связь между НИСО и ИСО и действие отброшенной связи заменяется силой реакции связи, выяснено, что реакция связи зависит не

только от действующих активных сил, но и от возникающих внутренних сил взаимодействия между материальной точкой и НИСО.

3. При получении уравнения динамики относительного движения материальной точки, когда сохраняется связь между НИСО и ИСО, рвется связь между материальной точкой и НИСО действие отброшенной связи заменяется реакциями, выяснено; что дополнительные силы в уравнении динамики относительного движения являются силами реакции отброшенной связи; эти силы равны силам инерции, но таковыми не являются так как приложены не к телу, которое сообщает материальной точке ускорение, а к самой материальной точке.

4. Дополнительные силы в уравнении динамики относительного движения, являясь реакциями отброшенной связи между материальной точкой и НИСО, приводят к абсолютизации НИСО для материальной точки и, следовательно, к абсолютизации относительного движения материальной точки.

5. Абсолютизация относительного движения материальной точки это явление, при котором относительное движение, происходящее в НИСО, воспроизводится в ИСО.

#### **Список литературы**

1. Дронг В.И., Дубинин В.В., Ильин М.М. и др. Курс теоретической механики: учебник для вузов / под ред. К.С. Колесникова, В.В. Дубинина. – 5-е изд. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. – 580 с.
2. Орлянская, Т.И. Динамический анализ движения материальной точки со связью // Фундаментальные основы механики. – 2025. – № 15. – С. 4-14.
3. Иродов И.Е. Механика. Основные законы. – 10-е изд. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 309 с.
4. Ишлинский А.Ю. Классическая механика и силы инерции. – М.: Наука, 1987. – 320 с.

#### Сведения об авторе:

*Орлянская Тамара Ивановна* – к.т.н., доцент кафедры ФН-3 «Теоретическая механика».