

УСЛОВИЕ РАВНОВЕСИЯ АППЕЛЯ ДЛЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ПРИЛОЖЕНИИ К СИЛОВОМУ РАСЧЕТУ СТАНОЧНЫХ ПРИСПОСОБЛЕНИЙ

Пипкин Ю.В.

Донбасский государственный технический университет, Алчевск

Ключевые слова: твердое тело, заготовка, условие равновесия, система сил, станочное приспособление, силовой расчет.

Аннотация. В статье рассматривается составление и обоснование условия равновесия твердого тела под действием пространственной системы сил относительно тетраэдра (условие Аппеля) с учетом особенностей практического приложения к силовому расчету станочных приспособлений. Приводится поэтапное разъяснение обоснования условий равновесия. Отмечается соответствие между условием Аппеля и расчетной схемой простейшего зажима.

APPELL'S EQUILIBRIUM CONDITION FOR A RIGID BODY AS APPLIED TO THE FORCE CALCULATION OF WORKHOLDING FIXTURES

Pipkin Yu.V.

Donbass State Technical University, Alchevsk

Keywords: rigid body, workpiece, equilibrium condition, system of forces, workholding fixtures, force calculation.

Abstract. The article discusses the formulation and justification of the equilibrium condition of a rigid body under the action of a spatial system of forces relative to a tetrahedron (Appell's condition) taking into account the features of practical application to the force calculation of workholding fixtures. A step-by-step explanation of the justification of the equilibrium conditions is given. The correspondence between the Appel condition and the calculation scheme of the simplest clamp is noted.

Станочные приспособления – это устройства для обеспечения сохранения заданного положения заготовки в процессе обработки на металлорежущем станке с целью достижения заданных геометрических размеров.

В традиции силового расчета можно отметить развитие подхода к поиску условий равновесия заготовки на примере работ [1-6]:

1) в работах [1] (1959 г.), [2] (1983 г.) дается общая рекомендация, что «расчет зажимной силы в первом приближении может быть сведен к задаче статики на равновесие заготовки под действием приложенных к ней внешних сил», и далее рассматриваются частные примеры в основном для плоских систем сил, этому же следуют и более поздние работы [3] (2010 г.);

2) в работе [4] (1984 г.) «условие пространственного равновесия заготовки в приспособлении» предлагается описывать шестью уравнениями статики, однако здесь же отмечается, что противодействие активным силам и моментам обеспечивается прежде всего силами зажима, «значение которых определяется решением плоских задач из условий равновесия заготовки в одном или нескольких направлениях», такой же подход характерен и для более поздних работ [5] (2024 г.).

Таким образом, анализ условий равновесия твердого тела является важной составляющей методики инженерного проектирования станочных приспособлений в области машиностроения.

В теоретической механике рассматриваются разные формы условий равновесия сил, такие как теорема о трех силах, теорема о трех моментах, условие равновесия системы сходящихся сил, условие равновесия пар сил, три формы условий равновесия плоской системы сил, условие равновесия плоской системы параллельных сил [6].

Следует отметить, что наибольшее распространение при проектировании станочных приспособлений нашел анализ плоских систем сил [1-5]. В инженерной литературе представлено большое количество решений частных расчетных схем. Решения пространственных расчетных схем практически не встречается, что можно связать со стремлением ускорить процесс проектирования на основе разработки набора типовых решений для плоских систем сил, полученных приведением к ним пространственных систем сил.

Однако формирование при обработке такой объемной характеристики, как погрешность формы получаемых обработанных поверхностей [7], указывает на важность анализа равновесия именно для пространственных расчетных схем.

Для анализа условий равновесия заготовки, как твердого тела, при механической обработке с применением станочных приспособлений представляет интерес форма условий равновесия твердого тела в пространстве, данная Аппелем в работе [8] и в переводе [9]. Приведем эту формулировку: «*Для равновесия твердого тела необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов сил относительно каждого из шести ребер тетраэдра равнялась нулю*» (на французском языке в оригинале [8] «*Pour l'équilibre, il faut et il suffit que la somme des moments des forces par rapport a chacune des six aretes d'un tetraedre soit nulle.*»).

Представленная в [8, 9] форма условия равновесия иллюстрируется рисунком 1, на котором изображено четыре различные точки (А, В, С, D) в пространстве, образующие тетраэдр. Форма тетраэдра при этом не уточняется, следовательно он считается произвольным. Не уточняется также принадлежность точек вершин тетраэдра твердому телу, что позволяет считать их особым образом заданной системой координат, которая может быть как связана, так и не связана с твердым телом. Силы, обозначенные α , β , δ , γ , расставленные в вершинах тетраэдра используются при рассмотрении примера применения условия равновесия. Отмечается для примера, что силы α , β , δ , γ , приложены в соответствующих вершинах А, В, С, D тетраэдра, направлены перпендикулярно плоскости тетраэдра, противоположной вершине и по величине пропорциональны площадям этих плоскостей.

Рассмотрим приведенное Аппелем разъяснение, приведенное в [9]: «*В самом деле, допустим, что оно [условие] выполняется для [произвольного] тетраэдра ABCD. Тогда, так как суммы моментов относительно трех ребер АВ, АС, АД, выходящих из вершины А, равны нулю, то и главный момент относительно точки А равен нулю. Следовательно, все силы либо приводятся к одной равнодействующей, проходящей через точку А, либо находится в равновесии [в случае, когда равнодействующая равна нулю]. Так как эти рассуждения справедливы для каждой вершины, то силы находятся в*

равновесии, ибо они не могут иметь равнодействующую, проходящую одновременно через четыре вершины».

Приведенное обоснование представляется необходимым раскрыть подробнее.

Действительно, если принять, что условие выполняется для всех ребер тетраэдра, то можно рассмотреть отдельно результат приведения моментов системы сил для любого сочетания ребер из имеющихся 6-ти. Рассмотрим в рамках подхода, предложенного Аппелем, последовательно возможные варианты.

1. Рассмотрим сумму моментов системы сил относительно одного ребра, например АВ (рис. 1). Если сумма моментов равна нулю, то равнодействующая системы сил или равна нулю, или не создает момента относительно оси, содержащей ребро, то есть вектор равнодействующей и ребро лежат в одной плоскости, а прямая вдоль которой направлена равнодействующая либо пересекает ось, содержащую ребро, либо параллельна ей. Таким образом равенство нулю приведенного момента системы сил относительно одного ребра является недостаточным для равновесия твердого тела.

2. Рассмотрим сумму моментов системы сил одновременно относительно двух ребер, исходящих из одной общей вершины, например ребер АВ и АС (рис. 1). В этом случае для равенства нулю момента равнодействующей она должна лежать в плоскости, построенной на двух ребрах, которая является единственной. При этом равнодействующая либо пересекает обе оси, содержащие ребра, либо пересекает одну из них и параллельна другой. Таким образом, равенство нулю суммы моментов одновременно относительно двух ребер, исходящих из общей вершины, является недостаточным для равновесия твердого тела.

3. Рассмотрим сумму моментов системы сил одновременно относительно трех ребер, исходящих из одной общей вершины, например АВ, АС и АД (рис. 1). В этом случае плоскости, образованные ребрами АВ и АС, а также ребрами АС и АД не совпадают и пересекаются по линии, содержащей общее для этих сторон ребро АС. Единственным вариантом, когда равнодействующая принадлежит обоим плоскостям является случай, когда она лежит на линии пересечения этих плоскостей, то есть на оси, содержащей общее ребро, при заданных условиях это ребро АС. При чем важно, что линия скольжения равнодействующей обязательно проходит через точку А, а значит момент равнодействующей – главный момент – относительно точки А равен нулю (что совпадает с выводом Аппеля). Эти соображения применимы и для сочетания плоскостей определенных по другому сочетанию ребер – по ребрам АВ и АД с ребрами АД и АС при общем ребре пересечения АД, а также ребрам АД и АВ с ребрами АВ и АС при общем ребре АВ. Очевидно, что равнодействующая не может одновременно располагаться на трех разных ребрах, что означает

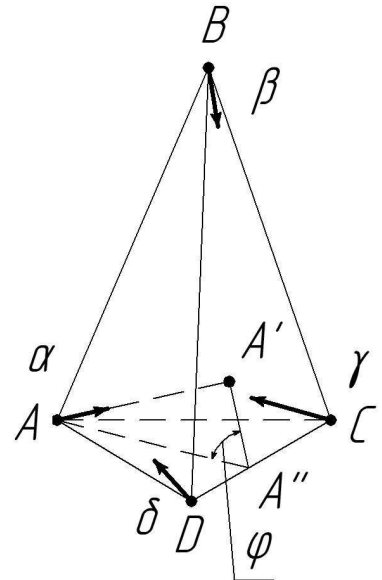


Рис. 1. Иллюстрация к условию равновесия твердого тела по Аппелю по [8, 9]

равенство равнодействующей нулю, то есть равновесие системы сил, следовательно равновесие твердого тела. Однако имеется неопределенность в возможном расположении равнодействующей, так как она может быть получена на одном из трех ребер, в то время как на двух других она будет равна нулю. Таким образом сумма моментов относительно трех ребер, исходящих из общей вершины тетраэдра, является необходимым, но не достаточным условием для равновесия твердого тела. Этот вывод по форме отличается от предложенного Аппелем в [8], но по существу является эквивалентным.

4. Рассмотрим сумму моментов системы сил относительно четырёх ребер из 6-ти (рис. 2). При этом независимо от выбора четвертого ребра, можно отметить, что три ребра из четырех образуют треугольник одной из сторон тетраэдра. Так, для рассматриваемых в предыдущих случаях ребер AB, AC и AD, выбор четвертого ребра BD образует треугольник ABD, выбор ребра BC образует треугольник ABC, выбор ребра DC образует треугольник ADC. Рассмотрим случай выбора четвертым ребра DC с образованием треугольника ADC.

Чтобы равнодействующая давала нулевой момент относительно ребер треугольника ADC она должна лежать в плоскости этого

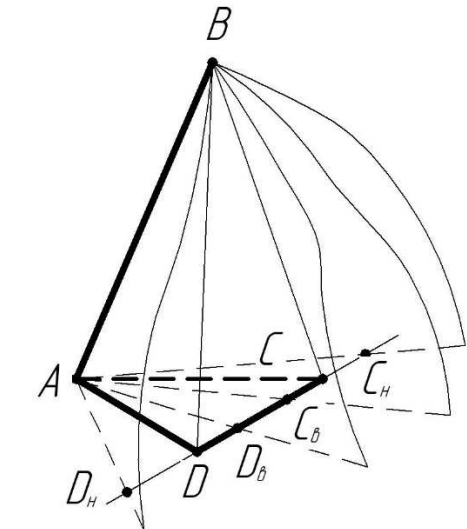


Рис. 2. Анализ суммы моментов относительно четырех ребер тетраэдра

треугольника. При этом она должна давать нулевой момент и относительно ребра AB, что возможно только в случае, если она располагается на линии пересечения плоскости, содержащей ребро AB, с плоскостью, содержащей треугольник ADC.

При этом через ребро AB можно провести множество плоскостей, пересекающих плоскость треугольника ADC с образованием следов как внутри треугольника (отрезки AC_B , AD_B), так с снаружи (отрезки AC_H , AD_H). В том числе к таким плоскостям относятся и плоскости, содержащие соответствующие стороны тетраэдра ABD (след пересечения – ребро AD) или ABC (след пересечения – ребро AC). Равнодействующая в любом случае обязательно проходит через точку A, то есть главный момент равнодействующей системы сил относительно точки A равен нулю.

Аналогичные рассуждения можно выполнить для других сочетаний по четыре ребра из 6-ти. В результате можно снова отметить невозможность одновременного прохождения равнодействующей через все вершины тетраэдра, что вновь указывает на неопределенность положения равнодействующей. Таким образом сумма моментов относительно произвольно выбранных четырёх ребер тетраэдра не является достаточным условием для равновесия твердого тела.

5. Рассмотрим сумму моментов системы сил относительно пяти из 6-ти ребер тетраэдра (рис. 3). При этом выбор пятого ребра приведет к образованию еще одного треугольника на второй стороне тетраэдра. То есть выбор пяти ребер приводит к выбору двух сторон тетраэдра. А любые две стороны тетраэдра пересекаются по общему ребру. Например, как и в анализе ранее, рассмотрим

ребра AB , AC , AD , DC , которые образовывали треугольник ADC первой стороны тетраэдра, и к ним добавим пятое ребро BD , которое образует треугольник ABD второй стороны тетраэдра. Плоскости, содержащие треугольники ADC и ABD пересекаются по линии, содержащей ребро AD .

Для того, чтобы момент системы сил был равен нулю относительно одновременно пяти ребер тетраэдра равнодействующая должна лежать на линии пересечения сторон, то есть на прямой, содержащей ребро AD .

Повторяя эти рассуждения для всех шести переборов по пять ребер тетраэдра из 6-ти, аналогично вариантам 3 и 4 приходим к невозможности одновременного прохождения равнодействующей через все шесть ребер и, следовательно, к неопределенности расположения равнодействующей.

Таким образом, равенство нулю моментов системы сил относительно пяти ребер также не является достаточным условием равновесия твердого тела.

6. Рассмотрим сумму моментов системы сил относительно всех шести ребер тетраэдра (рис. 1). Из анализа варианта 5 видно, что равнодействующая для 5-ти ребер всегда лежит на прямой, содержащей одно из ребер, общее для двух соответствующих сторон тетраэдра (рис. 3). При этом 6-е ребро всегда является скрещивающимся с ребром, полученным пересечением сторон, не включающих это ребро. Рассмотрим случай как для варианта 5, когда ребра AB , AC , AD , DC , BD образуют два треугольника сторон тетраэдра ADC и ABD , пересекающиеся по общему ребру AD вдоль которого проходит равнодействующая системы (рис. 3).

Оставшееся шестое ребро BC скрещивается с ребром AD , то есть прямые, содержащие эти ребра не пересекаются (рис. 4). Это означает, что любая по величине равнодействующая для пяти ребер всегда будет создавать некоторый по величине момент относительно шестого ребра. Равенство нулю момента равнодействующей системы сил для пяти ребер относительно шестого ребра может быть только тогда, когда эта равнодействующая равна нулю, т.е. система сил уравновешена.

Такие же выводы можно сделать и для других сочетаний по пять ребер из шести.

Общий вывод для варианта шести ребер – равнодействующая равна нулю. Это является необходимым и достаточным для равновесия твердого тела. Таким образом, форма равновесия твердого тела, предложенная Аппелем и изложенная в [8, 9] подтверждена.

На основе проведенного анализа можно уточнить формулировку Аппеля следующим образом: «Для равновесия твердого тела необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов сил относительно каждого из шести ребер произвольного тетраэдра равнялась нулю, так как в этом случае равнодействующая всегда равна нулю».

Покажем, как условие равновесия Аппеля для твердого тела применимо для силового расчета станочных приспособлений.

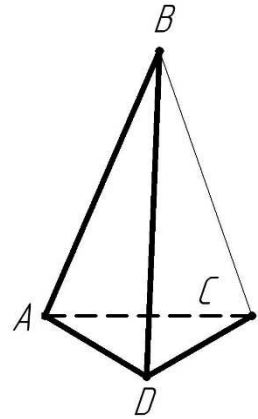


Рис. 3. Анализ суммы моментов относительно пяти ребер тетраэдра

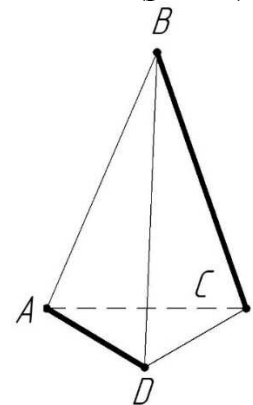


Рис. 4.

Скрещивающиеся ребра тетраэдра

Простейшим способом сохранить неподвижность заготовки при обработке является ее прижим некоторой зажимной силой Q к опоре (рис. 5), при этом смещение заготовки под действием обрабатывающей силы (силы резания) P предотвращается уравновешивающей силой трения F , обеспечиваемой реакцией в опоре N .

Наиболее надежным случаем контакта заготовки и опоры является контакт «плоскость-плоскость» (рис. 5). Однако ввиду множественности точек контакта для реальных плоских поверхностей возникает некоторая неопределенность положения заготовки. Для увеличения определенности положения заготовки на плоской опоре ее заменяют минимумом точечных опор (рис. 6). Для плоской схемы это две точечные опоры. Надежность зажима обеспечивается тем, что зажимная сила проходит между опорами и всегда ими уравновешивается. Причем, так как направление зажимной силы на практике может иметь небольшие отклонения, точечные опоры располагаются максимально удаленно друг от друга.

При пространственном рассмотрении схемы зажима минимальное количество точечных опор – 3 (рис. 7). Зажимная сила Q должна проходить внутри треугольника, заданного опорами. При этом она определяет величину реакций в опорах N_1, N_2, N_3 обеспечивающих возникновение сил трения F_1, F_2, F_3 , которые уравновешивают горизонтальную составляющую силы резания P_h . Также сила Q обеспечивает уравновешивание вертикальной составляющей силы резания P_v .

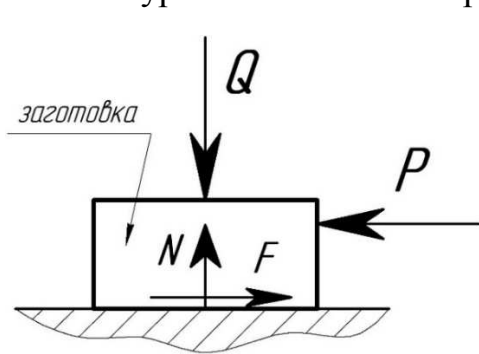


Рис. 5. Схема зажима заготовки

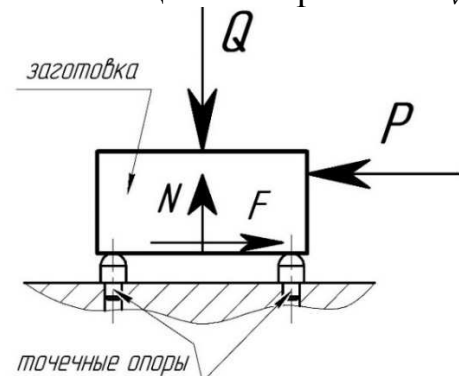


Рис. 6. Введение точечных опор

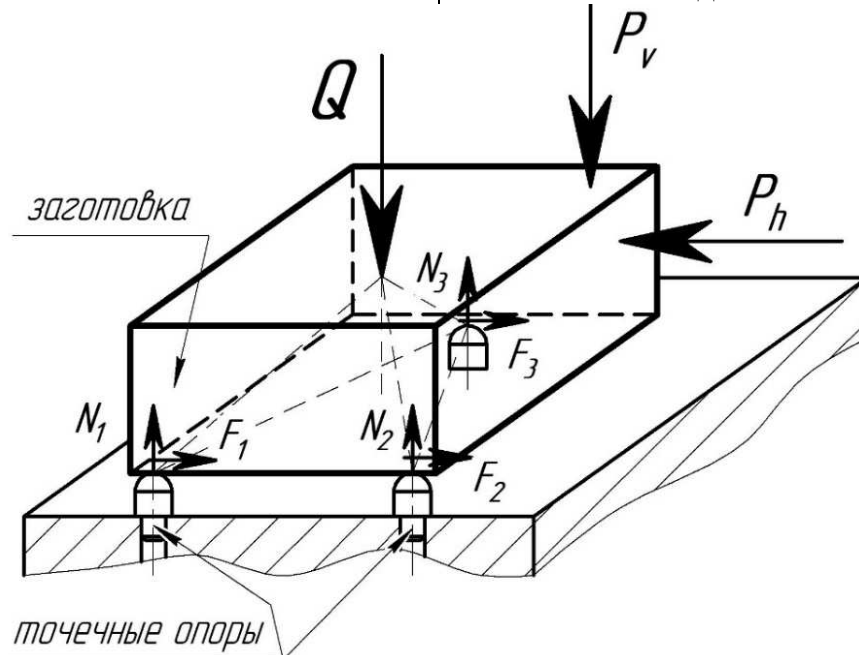


Рис. 7. Пространственная схема зажима

Пространственная расчетная схема зажима (рис. 7) позволяет принять в качестве аксиомы для силового расчета станочного приспособления то, что при надежном зажиме в структуре конструкции однозначно определяется тетраэдр опорно-зажимных точек (трех опорных и одной зажимной) относительно которого удобно рассматривать равновесие обрабатываемой заготовки как твердого тела. Геометрические параметры такого тетраэдра достаточно просто определяются для конкретной конструкции. Таким образом, применение формы условий равновесия Аппеля создает предпосылки для унификации подходов к анализу равновесия заготовки при составлении расчетных схем, а также обобщению и распространению опыта проектирования отдельных конструкций на все множество конструкций.

Заключение

Равновесие заготовки в станочных приспособлениях представляет интерес для апробации рассматриваемых теоретической механикой различных форм равновесия систем сил, действующих на твердое тело.

Выявленное впервые структурное подобие формы условия равновесия твердого тела, предложенная Аппелем [8, 9], и пространственной расчетной схемы зажима указывает на необходимость дальнейшей теоретической разработки практической применимости условия Аппеля в силовом расчете станочных приспособлений.

Список литературы

1. Корсаков В.С. Расчеты и конструирование приспособлений в машиностроении. – М.: Машгиз, 1959. – 216 с.
2. Корсаков В.С. Основы конструирования приспособлений: Учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1983. – 277 с.
3. Шишкин В.П., Закураев В.В. Основы проектирования станочных приспособлений. Теория и задачи: Учебное пособие / Под ред. А.Е. Беляева. – М.: НИЯУ МИФИ, 2010. – 288 с.
4. Горохов В.А. Проектирование и расчет приспособлений: Учеб. пособие для студентов вузов машиностроительных спец. – Мн.: Выш. шк., 1986. – 238 с.
5. Евгеньева Е.А., Дмитриев С.И. Технологическая оснастка в машиностроении: учебное пособие. – Москва; Вологда: Инфра-Инженерия, 2024. – 156 с.
6. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: Учебник для машиностроит. и приборостроит. спец. вузов. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1990. – 607 с.
7. Зинченко А.М., Лавренчук К.П., Пипкин Ю.В. Погрешность профиля поверхностей как критерий качества работы фрезерных станочных приспособлений // Машиностроение и техносфера XXI века: Сборник трудов XXXI Международной научно-технической конференции, Севастополь, 16-22 сентября 2024 года. – Донецк: ДонНТУ, 2024. – С. 119-123.
8. Аппель П.Э. Теоретическая механика. Том 1. Статика. Динамика точки / Пер. с франц. И.Г. Малкина. – М.: Гос. изд. физ.-мат. лит-ры, 1960. – 515 с.
9. Appel P. Traite de mecanique rationnelle. Tome premier. Statique–Dynamique du point. – Paris: Gauthers et films, Imprimeurs-Libraires, 1893. – 560 p.

Сведения об авторе:

Пипкин Юрий Владимирович – к.т.н., доцент кафедры технологии и организации машиностроительного производства.