

ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДВУХМАССОВОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПЯТЬЮ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ В ПОЛЕ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ СИЛ ИНЕРЦИИ

Савелькаев С.В.

Сибирский государственный университет геосистем и технологий, Новосибирск

Ключевые слова: двухмассовая механическая система, степени свободы, импульс, относительность времени, центральное поле относительных сил инерции.

Аннотация. В статье проведен динамический анализ механической системы, состоящей из двух взаимодействующих материальных тел, связанных прямолинейным жестким стержнем, концы которого закреплены на этих телах с помощью идеальных шарниров. Механическая система имеет пять степеней свободы. Ее тела по отношению к их центру масс, а также по отношению друг к другу совершают сложное переносно-относительное поступательное движение по траекториям в виде окружностей, которое формирует поле относительных сил инерции этих тел. Исходя из аксиомы связей для сил инерции и принципа Д'Аламбера записано уравнение движения каждого из тел механической системы в поле их относительных сил инерции в отдельности. Показано, что время в собственных системах отсчета взаимодействующих тел по отношению ко времени в системе отсчета их центра масс протекает по-разному и зависит от масс этих тел. Время в системе отсчета центра масс этих тел по отношению ко времени в любой инерциальной системе отсчета абсолютно.

FIELD OF RELATIVE INERTIAL FORCES OF A TWO-MASS MECHANICAL SYSTEM WITH FIVE DEGREES OF FREEDOM

Savel'kaev S.V.

Siberian State University of Geosystems and Technologies, Novosibirsk

Keywords: two-mass mechanical system, degrees of freedom, momentum, relativity of time, central field of relative inertial forces.

Abstract. The article presents a dynamic analysis of a mechanical system consisting of two interacting material bodies connected by a rectilinear rigid rod, the ends of which are fixed to these bodies by means of ideal hinges. The mechanical system has five degrees of freedom. Its bodies perform a complex translational-relative motion along trajectories in the form of circles in relation to their center of mass, as well as in relation to each other, which forms a field of relative inertial forces of these bodies. Based on the axiom of connections for inertial forces and the D'Alembert principle, the equation of motion of each of the bodies of the mechanical system in the field of their relative inertial forces separately is written. It is shown that time in proper reference systems of the interacting bodies in relation to time in the reference system of their center of mass proceeds differently and depends on the masses of these bodies. Time in the reference system of the center of mass of these bodies in relation to time in any inertial reference system is absolute.

Введение

В современной механике силы инерции рассматривают с различных точек зрения. Так, например, в работе [1] их рассматривают как фиктивные, что противоречит принципу Д'Аламбера [2], где они, в соответствии с законами Ньютона, являются реальными.

В работе [3] сила инерции рабочего (ускоряющего) тела приложена к опорному (ускоряемому) телу через их связь, вызывающую взаимодействие этих

тел. Показано, что эту связь можно условно отбросить от опорного тела, а ее реакцию заменить силой инерции рабочего тела, которой противодействует собственная сила инерции опорного тела. Это распространяет принцип Д’Аламбера на движение каждого из взаимодействующих тел и обеспечивает запись их уравнений движения с учетом относительных сил инерции.

В представленной работе силы инерции взаимодействующих материальных тел рассматриваются как их фундаментальное свойство, выражающееся в противодействии этих тел искривлению траекторий их движения силами взаимодействия любой природы (Ньютона, Кулона или Гука). При этом показано, что сложное переносно-относительное поступательное движение каждого из двух взаимодействующих материальных тел формируют центральное поле относительных сил инерции, оказывающее на систему этих тел силовое воздействие.

Целью работы является динамический анализ двухмассовой механической системы (МС2) с числом степеней свободы $N \leq 5$ в центральном динамическом поле относительных сил инерции ее взаимодействующих тел в диссипативной среде и вакууме.

Распределение импульсов МС2 при ее формировании

Выделим в пространстве замкнутую систему двух не взаимодействующих тел m_1 и m_2 , которая показана на рисунке 1.

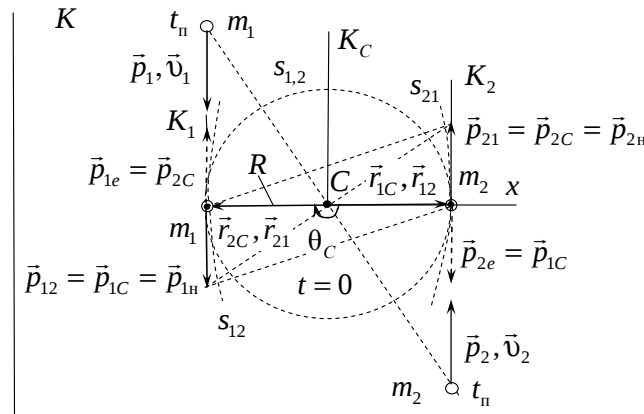


Рис. 1. Формирование МС2 в абсолютном пространстве

Ее тела m_1 и m_2 в прошлом времени $t_н$ (до начала их взаимодействия) совершают в лабораторной системе отсчета K прямолинейное и равномерное движение навстречу друг другу со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ и имеют импульсы $\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1$ и $\vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_2 = -m_1 \vec{v}_1$, так, что суммарный импульс $\vec{p}_C = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m \vec{v}_C = \sum_i m_i \vec{v}_i$ этой замкнутой системы тел сохраняется

$$d\vec{p}_C / dt = d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) / dt = 0, \quad (1)$$

где $\vec{v}_C = 0$ – скорость ее ЦМ C в системе отсчета K и $m = m_1 + m_2$ – суммарная масса ее тел.

Пусть в начальный момент времени $t=0$ тела m_1 и m_2 вступают во взаимодействие посредством прямолинейного идеального стержня с длиной $R = \text{const}$, концы которого для времени $t \geq 0$ закреплены на телах m_1 и m_2 посредством идеальных шарниров. Для времени $t > 0$ система тел m_1 и m_2 ,

взаимодействующих этим стержнем R , представляет собой замкнутую МС2, телам m_1 и m_2 которой в момент времени $t=0$ сообщены начальные импульсы $\vec{p}_{1н} = \vec{p}_1$ и $\vec{p}_{2н} = \vec{p}_2$ (см. рис. 1).

Для анализа движения сформированной замкнутой МС2 введем в момент времени $t=0$ собственные системы отсчета K_1 и K_2 ее тел m_1 и m_2 , а также систему отсчета K_C ее ЦМ C так, что оси координат x и y этих систем отсчета и системы отсчета K всегда параллельны.

Движение тел m_1 и m_2 вместе с их собственными системами отсчета K_1 и K_2 в системе отсчета K по траектории $s_{1,2}$ (общей для $m_1 = m_2$) будем рассматривать как переносное, а движение этих тел m_2 и m_1 в системах отсчета K_1 и K_2 по траекториям s_{12} и s_{21} (на рис. 1 показаны частично) – как относительное.

Переносные импульсы $\vec{p}_{1e}$ и $\vec{p}_{2e}$ тел m_1 и m_2 выразим через импульсы $\vec{p}_{1C}$ и $\vec{p}_{2C}$ этих тел в системе отсчета K_C в виде:

$$\vec{p}_{1e} = \vec{p}_{2C}; \vec{p}_{2e} = \vec{p}_{1C}. \quad (2)$$

Относительный импульс $\vec{p}_{12}$ тела m_1 в системе K_2 и одновременно его импульс $\vec{p}_{1C}$ в системе отсчета K_C определен его начальным импульсом $\vec{p}_{1н} = \vec{p}_1$ в момент времени $t=0$

$$\vec{p}_{12} = \vec{p}_{1C} = \vec{p}_{1н}. \quad (3)$$

Аналогично относительный импульс $\vec{p}_{21}$ тела m_2 в системе K_2 и одновременно его импульс $\vec{p}_{2C}$ в системе отсчета K_C определен его начальным импульсом $\vec{p}_{2н} = \vec{p}_2$ в этот же момент времени $t=0$

$$\vec{p}_{21} = \vec{p}_{2C} = \vec{p}_{2н}. \quad (4)$$

Равенство импульсов $\vec{p}_{12} = \vec{p}_{1C}$ и $\vec{p}_{21} = \vec{p}_{2C}$ в (3) и (4) будет обосновано, исходя из инвариантности событий в системах отсчета K , K_C , K_1 и K_2 при анализе их времени t , t_C , t_1 и t_2 .

Почленное суммирование (3) и (4) требует, чтобы импульсы $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, $\vec{p}_{1н}$, $\vec{p}_{2н}$, $\vec{p}_{12}$, $\vec{p}_{21}$, $\vec{p}_{1C}$ и $\vec{p}_{2C}$ удовлетворяли сохранности импульса до, во время и после начала взаимодействия тел m_1 и m_2 рассматриваемой замкнутой МС2

$$\vec{p}_C = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_{1н} + \vec{p}_{2н} = \vec{p}_{12} + \vec{p}_{21} = \vec{p}_{1C} + \vec{p}_{2C} = 0. \quad (5)$$

Сумма переносных $\vec{p}_{1e} = \vec{p}_{2C}$, $\vec{p}_{2e} = \vec{p}_{1C}$ и относительных $\vec{p}_{12}$, $\vec{p}_{21}$ импульсов тел m_1 и m_2 должна удовлетворять сохранности импульса МС2 в виде:

$$\vec{p}_C = \vec{p}_{1C} + \vec{p}_{21} + \vec{p}_{2C} + \vec{p}_{12} = 0, \quad (6)$$

что справедливо при одновременном выполнении следующих равенств [3]:

$$\begin{cases} \vec{p}_{2C} + \vec{p}_{12} = 0, \\ \vec{p}_{1C} + \vec{p}_{21} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

и соответствует тому, что абсолютные скорости

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{2C} + \vec{v}_{12}; \vec{v}_2 = \vec{v}_{1C} + \vec{v}_{21} \quad (8)$$

тел m_1 и m_2 в системе отсчета K при $t=0$ обращаются в нуль $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = 0$.

Для обоснования равенств (7) выразим переносные импульсы $\vec{p}_{1e} = \vec{p}_{2C}$ и $\vec{p}_{2e} = \vec{p}_{1C}$ в проекциях на ось координат x системы отсчета K_C и относительные импульсы $\vec{p}_{12}$ и $\vec{p}_{21}$ в проекциях на эту же ось координат x систем отсчета K_1 и K_2 в виде:

$$p_{1Cx} = m_1 \omega_C r_{1C} \cos \varphi_{1C}; p_{2Cx} = m_2 \omega_C r_{2C} \cos \varphi_{2C}; \quad (9)$$

$$p_{12x} = m_1 \omega_{12} r_{12} \cos \varphi_{12}; p_{21x} = m_2 \omega_{21} r_{21} \cos \varphi_{21},$$

где r_{1C} и r_{2C} – радиусы, определяющие траектории движения $s_{1,2}$ тел m_1 и m_2 в системе отсчета K_C , которые можно определить, используя известные уравнения $m_1 \vec{r}_{1C} + m_2 \vec{r}_{2C} = 0$ и $\vec{r}_{21} = \vec{r}_{2C} - \vec{r}_{1C}$ [2, 4], в виде:

$$\vec{r}_{1C} = -m_2 \vec{r}_{21} / m; \vec{r}_{2C} = m_1 \vec{r}_{21} / m; \quad (10)$$

$\omega_C = \omega_{1C} = \omega_{2C}$ – угловые скорости движения тел m_1 и m_2 в системе отсчета K_C , которые по отношению к системе отсчета K являются переносными; r_{12} и r_{21} – радиусы, определяющие траектории движения s_{12} и s_{21} тел m_1 и m_2 в системах отсчета K_2 и K_1 ; ω_{12} и ω_{21} – относительные угловые скорости движения этих тел в системах отсчета K_2 и K_1 .

Для диаметрального распределения

$$\theta_C = \varphi_{2C} - \varphi_{1C} = -\arccos(p_{1yH} / p_{2yH}) = -\pi \quad (11)$$

фаза φ_{1C} движения тела m_1 в системе отсчета K_C связана с фазой φ_{21} движения тела m_2 в собственной системе отсчета K_1 тела m_1 и по аналогии для тела m_2 преобразованиями [3]:

$$\varphi_{1C} = \varphi_{21} - \pi; \varphi_{2C} = \varphi_{12} - \pi, \quad (12)$$

что иллюстрируется рисунком 1. В выражении (11) $p_{1yH} = -p_{1H}$ и $p_{2yH} = p_{2H}$ – проекции начальных импульсов $\vec{p}_{1H}$ и $\vec{p}_{2H}$ на ось y систем отсчета K и K_C , которые в этих системах отсчета инвариантны.

Подстановка (9) в (7) с учетом (10) и (12) определяет угловые скорости:

$$\omega_{12} = m_2 \omega_C / m; \omega_{21} = m_1 \omega_C / m, \quad (13)$$

для которых равенства (7) удовлетворены.

Сохранность импульса (5) также выполняется и для переносных импульсов $\vec{p}_{1e} = \vec{p}_{2C}$ и $\vec{p}_{2e} = \vec{p}_{1C}$ тел m_1 и m_2 , так как по определению ЦМ C [2, 4]

$$\vec{p}_{1C} + \vec{p}_{2C} = 0, \quad (14)$$

где $\vec{p}_{1C} = m_1 \vec{v}_{1C}$ и $\vec{p}_{2C} = m_2 \vec{v}_{2C}$.

Аналогичное определение

$$\vec{p}_{12} + \vec{p}_{21} = 0 \quad (15)$$

справедливо и для относительных импульсов $\vec{p}_{12} = m_1 \vec{v}_{12}$ и $\vec{p}_{21} = m_2 \vec{v}_{21}$, которое следует из (6) и (14).

Равенства (7), (14) и (15) устанавливают связь между переносными $\vec{p}_{1e} = \vec{p}_{2C}$, $\vec{p}_{2e} = \vec{p}_{1C}$ и относительными $\vec{p}_{12}$, $\vec{p}_{21}$ импульсами рассматриваемой замкнутой МС2 в виде их распределения:

$$\vec{p}_{1C} = -\vec{p}_{21}; \vec{p}_{2C} = -\vec{p}_{12}; \vec{p}_{1C} = -\vec{p}_{2C}; \vec{p}_{12} = -\vec{p}_{21}, \quad (16)$$

где знак «минус» характеризует то, что распределение тел m_1 и m_2 в системе отсчета K_C диаметрально $\theta_C = -\pi$ (11), а выбор знака перед числом $\pm\pi$ соответствует вращательному движению тел m_1 и m_2 против хода часовой стрелки, принятому в работе (см. рис. 1).

Сформированная МС2 имеет пять степеней свободы: четыре независимые полярные координаты r_{1C} , φ_{1C} , r_{2C} , φ_{2C} тел m_1 и m_2 в системе отсчета K_C (независимость координат φ_{1C} и φ_{2C} будет обоснована при кинематическом анализе МС2) плюс одна дополнительная независимая координата φ_{12} или φ_{21} из двух зависимых полярных координат $\varphi_{12} = -\varphi_{21}$ тел m_1 и m_2 в системах отсчета K_2 и K_1 , что соответствует классическому определению числа степеней свободы МС2 $N = 3n - l = 6 - 1 = 5$, где $n = 2$ – количество тел МС2, участвующих в плоском движении, которые имеют по три степени свободы; $l = 1$ – количество связей тел m_1 и m_2 в виде прямолинейного стержня R .

Пятая степень свободы рассматриваемой МС2 характеризует относительное движение ее тел m_1 и m_2 с импульсами $\vec{p}_{12}$ и $\vec{p}_{21}$ в системах отсчета K_2 и K_1 . Исключение из рассмотрения пятой степени свободы и, следовательно, систем отсчета K_1 и K_2 сводит сформированную МС2 к твердому телу, движение которого в системе отсчета K подчиняется известным законам механики [2, 4].

Кинематический анализ МС2

Для удобства кинематического и дальнейшего динамического анализа сформированной МС2 (см. рис. 1) представим ее в виде, показанном на рисунке 2, а. Ее взаимодействующие тела m_1 и m_2 МС2 совершают в системе отсчета K сложное движение: переносное поступательное движение вместе с их собственными системами отсчета K_1 и K_2 , а также их относительное поступательное движение в собственных системах отсчета K_2 и K_1 так, что оси координат x и y всех этих систем отсчета, а также системы отсчета K_C , связанной с ЦМ C , и сопутствующей системы отсчета K_O , связанной с мгновенным центром O скоростей тел m_1 и m_2 , всегда параллельны друг другу. Поступательное движение тел m_1 и m_2 в системе отсчета K_C , являющееся по отношению к системе отсчета K переносным, совершается по окружности $s_{1,2}$ (общей для $m_1 = m_2$), которая определяется радиус-векторами $\vec{r}_{1C} = -\vec{r}_{2C}$ (10). Относительное поступательное движение тел m_1 и m_2 в системах отсчета K_2 и K_1 совершается по окружностям s_{12} и s_{21} (на рис. 2, а показаны частично), определяющимся радиус-векторами $\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21}$, модули которых равны длине стержня $R = r_{12} = r_{21}$.

Траекторией движения тел m_1 и m_2 в системе отсчета K так же, как и в системе отсчета K_C , является окружность $s_{1,2}$, так как система отсчета K_C неподвижна. Радиус-векторы $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, определяющие положение окружности $s_{1,2}$ в системе отсчета K не показаны.

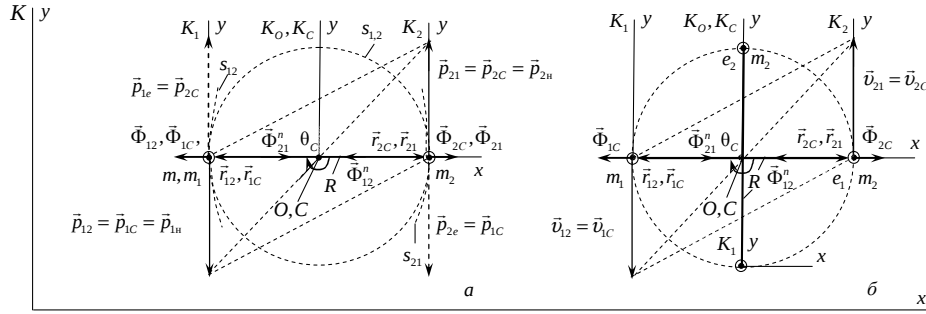


Рис. 2. Двухмассовая механическая система с диаметрально распределением тел m_1 и m_2 – a и карта событий e_1 и e_2 ее тела m_2 – b

При $m_1 \geq m_2$ тело m_1 можно рассматривать как опорное (укоряемое), а тело m_2 – как рабочее (ускоряющее); при $m_2 \geq m_1$ наоборот: m_2 – опорное и m_1 – рабочее, а при $m_1 = m_2$ выбор опорного и рабочего тел равноправен.

Поступательное движение $\vec{p}_{12} = \vec{p}_{1C} = \vec{p}_{1н}$ и $\vec{p}_{21} = \vec{p}_{2C} = \vec{p}_{2н}$ тел m_1 и m_2 в системах отсчета K_1, K_2 и K_C вызвано тем, что им в момент времени $t=0$ в системе отсчета K сообщены начальные импульсы $\vec{p}_{1н}$ и $\vec{p}_{2н}$, которые в проекциях на оси y и x координат этой системы отсчета составляют $p_{1ун} = -p_{1н}$, $p_{2ун} = p_{2н}$ и $p_{1хн} = p_{2хн} = 0$ (см. рис. 2, a).

Для начальных импульсов $p_{1ун} + p_{2ун} = 0$ тел начала координат C и O систем отсчета K_C ЦМ C и сопутствующей ей системы отсчета K_O , связанной с мгновенным центром O скоростей тел m_1 и m_2 , совпадают, что позволяет для случая $p_{1ун} + p_{2ун} = 0$ исключить из рассмотрения сопутствующую систему отсчета K_O . Эта система отсчета необходима для начальных импульсов $p_{1ун} + p_{2ун} \neq 0$, когда начала координат C и O систем отсчета K_C и K_O не совпадают и движение тел m_1 и m_2 для времени $t = dt \gg 0$ будет совершаться относительно мгновенного центра скоростей O совместно с ЦМ C тел m_1 и m_2 в системе отсчета K_O при их радиальном распределении $\theta_O \neq \pi$ относительно этого центра [3]. Возможность радиального распределения определяет независимость полярных координат ϕ_{1C} и ϕ_{2C} . Радиальное распределение тел m_1 и m_2 в настоящей работе не рассматривается.

Относительные угловые скорости ω_{12} и ω_{21} поступательного движения тел m_1 и m_2 в системах отсчета K_1 и K_2 можно выразить через начальные скорости $\vec{v}_{1н} = \vec{p}_{1н} / m$ и $\vec{v}_{2н} = \vec{p}_{2н} / m$ ЦМ C при $t=0$:

$$\omega_{12} = v_{1н} / r_{1C} = v_1 / R; \quad \omega_{21} = v_{2н} / r_{2C} = v_2 / R, \quad (17)$$

где v_1 и v_2 – скорости тел m_1 и m_2 до начала взаимодействия.

Угловые скорости $\omega_C = \omega_{1C} = \omega_{2C}$ поступательного движения тел m_1 и m_2 в системе отсчета K_C , являющиеся по отношению к системе отсчета K переносными, определяется суммой относительных угловых скоростей ω_{12} и ω_{21} (17) (обоснование дано в следующем разделе), и с учетом того, что $m_1 v_1 = m_2 v_2$, могут быть представлены в виде

$$\omega_C = \omega_{12} + \omega_{21} = v_1 / R + v_2 / R = \begin{cases} \frac{mv_1}{m_2 R} \text{ при } m_2 \geq m_1; \\ \frac{mv_2}{m_1 R} \text{ при } m_1 \geq m_2. \end{cases} \quad (18)$$

Относительность времени

Для жесткого соединения тел m_1 и m_2 стержнем R МС2 можно рассматривать как твердое тело. В этом случае угловые скорости плоского вращательного движения этих тел относительно начала C , O_1 и O_2 координат систем отсчета K_C, K_1 и K_2 (полюсов) являются инвариантами [2]

$$\omega_C = \omega_{12} = \omega_{21}, \quad (19)$$

где $\omega_C = \omega_{1C} = \omega_{2C}$ – угловая скорость вращательного движения тел m_1 и m_2 относительно полюса C ; $\vec{\omega}_{12}$ и $\vec{\omega}_{21}$ – угловые скорости вращательного движения этих тел относительно полюсов O_1 и O_2 (первый индекс угловой скорости указывает на номер тела, а второй – на номер полюса).

Для обеспечения инвариантности угловых скоростей (19) время t во всех системах отсчета K, K_C, K_1 и K_2 должно быть абсолютным, для которого угловые перемещения $\Delta\phi$ тел m_1 и m_2 во всех этих системах отсчета также являются инвариантами

$$\Delta\phi = \omega_C t = \omega_{12} t = \omega_{21} t, \quad (20)$$

где за начало отсчета времени принято время $t = t_1 = t_2 = 0$. Нарушение инвариантности угловых перемещений (20) эквивалентно разрушению твердого тела, что недопустимо, исходя из реальности его физического существования.

В рассматриваемом случае тела m_1 и m_2 закреплены на концах стержня R с помощью идеальных шарниров. В результате чего эти тела вместе с системами отсчета K_2 и K_1 совершают в системе отсчета K сложное движение: переносное поступательное движение с импульсами $\vec{p}_{1e} = \vec{p}_{2C}$, $\vec{p}_{2e} = \vec{p}_{1C}$ и относительное поступательное движение в этих системах отсчета K_2 и K_1 с импульсами $\vec{p}_{12}$, $\vec{p}_{21}$, как показано на рисунке 2, а.

Установим связь угловых скоростей $\omega_C = \omega_{1C} = \omega_{2C}$ переносного поступательного движения тел m_1 и m_2 в системе отсчета K_C с угловыми скоростями ω_{12} и ω_{21} их относительного поступательного движения в системах отсчета K_2 и K_1 .

Запишем связь между относительными импульсами $\vec{p}_{12} = -\vec{p}_{21}$ (16) в криволинейных координатах

$$m_1 \omega_{12} R = m_2 \omega_{21} R. \quad (21)$$

Из (21) с учетом (10) следует

$$r_{1C} / r_{2C} = m_2 / m_1 = \omega_{12} / \omega_{21}. \quad (22)$$

Также в криволинейных координатах запишем связь переносных и относительных импульсов $\vec{p}_{1e} = -\vec{p}_{21}$; $\vec{p}_{2e} = -\vec{p}_{12}$ (16):

$$m_1 \omega_{1C} r_{1C} = m_2 \omega_{21} R; \quad m_2 \omega_{2C} r_{2C} = m_1 \omega_{12} R. \quad (23)$$

Из (23) с учетом (10) следуют преобразования

$$\omega_{12} = m_2 \omega_C / m; \omega_{21} = m_1 \omega_C / m, \quad (24)$$

аналогичные полученным ранее (13).

Суммирование правых и левых частей преобразований (24) дает выражение (18)

$$\omega_C = \omega_{12} + \omega_{21}. \quad (25)$$

Преобразования (22), (24) и выражение для абсолютной угловой скорости ω_C (25) известны из работы [2], где они записаны для вращательного движения твердого тела (m_1 или m_2) относительно параллельных осей (осей координат у систем отсчета K_C , K_1 и K_2) в одинаковых направлениях (см. рис. 2, а, где оси координат у перпендикулярны плоскости чертежа).

Так как $\omega_C \neq \omega_{12} \neq \omega_{21}$ (25), для сохранения инвариантности угловых перемещений $\Delta\varphi$ (20), исключающей возможность разрушения стержня R , необходимо, чтобы собственное время t_1 и t_2 в системах отсчета K_1 и K_2 по отношению к времени t_C в системе отсчета K_C протекало по-разному

$$\Delta\varphi = \omega_C t_C = \omega_{12} t_2 = \omega_{21} t_1, \quad (26)$$

тогда как время t в лабораторной системе отсчета K и в системе отсчета K_C (которая при $p_{1y} + p_{2y} = 0$ неподвижна) является абсолютным $t_C = t$.

Угловой инвариант (26) характеризует то, что для любого углового перемещения $\Delta\varphi$ тела m_1 в системах отсчета K_C и K_2 , а также тела m_2 в системах отсчета K_C и K_1 , каждое из этих тел m_1 и m_2 находится в одной и той же точке траектории $s_{1,2}$ (общей для $m_1 = m_2$) в системе отсчета K как, например, для тела m_2 при $\Delta\varphi = \{0; \pi/2\}$ показано на рис. 2, б событиями e_1 и e_2 , что выполняется для $m_1 = m_2$ при:

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_{1C}; \vec{v}_{21} = \vec{v}_{2C}. \quad (27)$$

Равенства (27) позволяют определить преобразования (24) более наглядным способом. Выразим относительные v_{12} , v_{21} и переносные v_{1C} , v_{2C} скорости (27) в виде:

$$\begin{aligned} v_{12} &= (d\varphi_{12} / dt_2) r_{12}; v_{21} = (d\varphi_{21} / dt_1) r_{21}; \\ v_{1C} &= (d\varphi_{1C} / dt_C) r_{1C}; v_{2C} = (d\varphi_{2C} / dt_C) r_{2C}, \end{aligned} \quad (28)$$

где $d\varphi_{21} / dt_1 = \omega_{21}$, $d\varphi_{12} / dt_2 = \omega_{12}$ и $d\varphi_{1C} / dt_C = d\varphi_{2C} / dt_C = \omega_C$ – относительные угловые скорости в системах отсчета K_1 и K_2 , а также переносные угловые скорости $\omega_{1C} = \omega_{2C} = \omega_C$ в системе отсчета K_C ; t_1 – собственное время в системах отсчета K_1 и K_2 для относительного движения; t_C – собственное время в системе отсчета K_C для переносного движения.

Подстановка скоростей (28) в (27) с учетом радиусов (10) дает преобразования (24) в виде дифференциальных приращений:

$$dt_1 = \frac{m}{m_1} dt_C; dt_2 = \frac{m}{m_2} dt_C. \quad (29)$$

При этом непосредственное применение преобразований (24) к инварианту (26) определяет собственное время t_1 и t_2 в системах отсчета K_1 и K_2 :

$$t_1 = \frac{m}{m_1} t_C; t_2 = \frac{m}{m_2} t_C, \quad (30)$$

для которых импульс МС2 $\vec{p}_C = \vec{p}_{1C} + \vec{p}_{2C}$ в системе отсчета K сохраняется

$$d\vec{p}_C / dt = d\vec{p}_{21} / dt_1 + d\vec{p}_{12} / dt_2 = 0. \quad (31)$$

Таким образом, для сохранения инвариантности угловых перемещений $\Delta\varphi$ (26) когда тело m_2 находится в одной и той же точке во всех выбранных системах отсчета, отмеченной событием $e1$ или $e2$ (см. рис. 2, б), необходимо чтобы собственное время t_1 и t_2 в системах отсчета K_1 и K_2 по отношению ко времени t_C в системе отсчета K_C протекало по разному (30). Время в системе отсчета K_C и в какой-либо другой инерциальной системе отсчета абсолютно $t_C = t$.

Из (31) при $m_1 \rightarrow \infty$, $\vec{r}_{21} = \vec{r}_{2C}$, $\omega_{21} = \omega_C$ и $t_C = t$ следует уравнение

$$d\vec{p}_{21} / dt = d\vec{p}_{2C} / dt = \vec{R}_{21}, \quad (32)$$

которое характеризует вращательное движение тела m_2 относительно неподвижной оси (тела m_1), где $\vec{R}_{21}$ – реакция стержня R .

С учетом относительности времени (30) связь переносных $\vec{p}_{1C}$, $\vec{p}_{2C}$ и относительных $\vec{p}_{12}$, $d\vec{p}_{21}$ импульсов (16) можно выразить в следующей в дифференциальной форме:

$$\begin{aligned} d\vec{p}_{1C} / dt &= -d\vec{p}_{21} / dt_1; d\vec{p}_{2C} / dt = -d\vec{p}_{12} / dt_2; \\ d\vec{p}_{1C} / dt &= -d\vec{p}_{2C} / dt; d\vec{p}_{12} / dt_2 = -d\vec{p}_{21} / dt_1. \end{aligned} \quad (33)$$

Таким образом, введение собственного времени t_1 и t_2 (30) в системах отсчета K_1 и K_2 сохраняет инвариантность угловых перемещений $\Delta\varphi$ (26) в системах отсчета K_C, K_1 и K_2 , выбранных для динамического анализа МС2 с пятью $N = 5$ степенями свободы.

Энергетический анализ

С учетом абсолютных скоростей $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ (8) тел m_1 и m_2 суммарную энергию E МС2 и ее лагранжиан L выразим в виде

$$\left. \begin{aligned} E(+) \\ L(-) \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^2 + U(R) = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{2C}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{1C}^2 + \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{12}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{21}^2 \pm U, \quad (34)$$

где U – обобщенный потенциал [4]:

$$U = m_1 \vec{v}_{2C} \vec{v}_{12} + m_2 \vec{v}_{1C} \vec{v}_{21}, \quad (35)$$

учитывающий участие тел m_1 и m_2 в переносном $\vec{v}_{1e} = \vec{v}_{2C}, \vec{v}_{2e} = \vec{v}_{1C}$ и относительном $\vec{v}_{12r}, \vec{v}_{21r}$ движениях; $U(R)$ – потенциальная функция, зависящая от длины стержня R , которую для жесткого стержня с деформацией $\Delta R = 0$ можно отбросить.

Сумма первого и второго слагаемых $T_C = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{2C}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{1C}^2$ (34) является кинетической энергией МС2 в системе отсчета K_C .

Сумма третьего и четвертого слагаемых $T_r = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_{12}^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_{21}^2$ является кинетической энергией относительного движения тела m_1 в системе отсчета K_2 и тела m_2 в системе отсчета K_1 , а обобщенный потенциал U (35) представляет собой потенциальную функцию центрального динамического поля относительных сил инерции взаимодействующих тел m_1 и m_2 МС2, каждое из которых одновременно участвует в переносно-относительном поступательном движении $m_1\vec{v}_{2C}\vec{v}_{12}$ и $m_2\vec{v}_{1C}\vec{v}_{21}$.

Преобразуя векторное произведение $\vec{v}_{2C}\vec{v}_{12}$ и $\vec{v}_{1C}\vec{v}_{21}$ к скалярному виду $\vec{v}_{2C}\vec{v}_{12} = v_{2C}v_{12}\cos\varphi = -v_{12}v_{2C}\cos\varphi$ и $\vec{v}_{1C}\vec{v}_{21} = v_{1C}v_{21}\cos\varphi = -v_{1C}v_{21}\cos\varphi$, представим модуль обобщенного потенциала U (35) в виде

$$U = |m_1v_{2C}v_{12}\cos\varphi + m_2v_{1C}v_{21}\cos\varphi| = m_1\omega_C r_{2C}\omega_{12}r_{12} + m_2\omega_C r_{1C}\omega_{21}r_{21}, \quad (36)$$

где φ – угол между векторами $\vec{v}_{2C}\vec{v}_{12} = -\vec{v}_{12}\vec{v}_{2C}$ и $\vec{v}_{1C}\vec{v}_{21} = -\vec{v}_{21}\vec{v}_{1C}$, который для диаметрального распределения $\theta_C = -\pi$ (11) можно определить в виде $\varphi = -\vec{v}_{12}\vec{v}_{2C} = -\vec{v}_{21}\vec{v}_{1C} = -\pi$. В таком представлении этот угол учитывает запаздывание фазы φ_{1C} движения тела m_1 в системе отсчета K_C относительно фазы φ_{21} движения тела m_2 в собственной системе отсчета K_1 тела m_1 и определяет это запаздывание (и аналогичное запаздывание тела m_2) в виде преобразований (12):

$$\varphi_{1C} = \varphi_{21} + \varphi = \varphi_{21} - \pi, \quad \varphi_{2C} = \varphi_{12} + \varphi = \varphi_{12} - \pi. \quad (37)$$

Частный дифференциал от обобщенного потенциала U (36) по радиусам r_1 и r_2 при $\omega_C, \omega_{21} = \text{const}$ определяет относительные силы инерции тел m_1 и m_2 в системах отсчета K_2 и K_1 :

$$\begin{aligned} \vec{\Phi}_{12}^n &= dU / dr_{2C} = -m_1\vec{a}_{12} = m_1\omega_C\omega_{12}\vec{r}_{12}; \\ \vec{\Phi}_{21}^n &= dU / dr_{1C} = -m_2\vec{a}_{21} = m_2\omega_C\omega_{21}\vec{r}_{21}, \end{aligned} \quad (38)$$

которые являются результатом участия каждого из этих тел в переносно-относительном поступательном движении $m_1\vec{v}_{2C}\vec{v}_{12r}$ и $m_2\vec{v}_{1C}\vec{v}_{21r}$ с ускорениями $a_{12} = \omega_C\omega_{12}r_{12}$ и $a_{21} = \omega_C\omega_{21}r_{21}$.

Относительные силы инерции (38) удовлетворяют сохранности импульса и кинетического момента МС2 в виде:

$$d\vec{p}_C / dt = \vec{\Phi}_{21}^n + \vec{\Phi}_{12}^n = 0; \quad d\vec{K}_C / dt = 0. \quad (39)$$

Исключение систем отсчета K_1 и K_2 из рассмотрения эквивалентно исключению пятой степени свободы МС2, сводящее ее к твердому телу (когда ее тела m_1 и m_2 жестко закреплены на стержне R). Покажем это, используя преобразования (24), которые обеспечивают переход к системе отсчета K_C , где относительные силы инерции $\vec{\Phi}_{12}^n$ и $\vec{\Phi}_{21}^n$ (38) тел m_1 и m_2 с учетом (10) принимают классический вид:

$$\vec{\Phi}_{1C}^n = \frac{m_1m_2}{m}\omega_C^2\vec{r}_{12} = m_1\omega_C^2\vec{r}_{1C}; \quad \vec{\Phi}_{2C}^n = \frac{m_2m_1}{m}\omega_C^2\vec{r}_{21} = m_2\omega_C^2\vec{r}_{2C}, \quad (40)$$

для равномерного вращательного движения $\omega_C = \text{const}$ этих тел относительно их ЦМ C в абсолютном времени $t_C = t$.

В системе отсчета K_C импульсы $\vec{p}_{1C}$ и $\vec{p}_{2C}$ тел m_1 и m_2 теряют смысл переносных, а суммарное действие центрального поля относительных сил инерции $\vec{\Phi}_{1C}^n$ и $\vec{\Phi}_{2C}^n$ (40) для диаметрального распределения $\theta_C = -\pi$ (11) этих тел обращается в нуль

$$\vec{\Phi}_{1C}^n + \vec{\Phi}_{2C}^n = 0, \quad (41)$$

в результате чего импульс $d\vec{p}_C$ рассматриваемой замкнутой МС2 сохраняется $d\vec{p}_C / dt = \text{const}$ (39).

Значение лагранжиана L (34) для тестовых параметров МС2: $m_1 = m_2 = 1 \text{ кг}$; $R = 1 \text{ м}$; $r_{1C} = r_{2C} = 0.5 \text{ м}$; $\omega_C = 2 \text{ с}^{-1}$; $\omega_{12} = \omega_{21} = 1 \text{ с}^{-1}$ находится в минимуме $L = T_C + T_r - U = 0 \Rightarrow \min$. Это характеризует то, что движение МС2 удовлетворяет принципу наименьшего действия [2, 4], а ее тела m_1 и m_2 во всех системах отсчета K , K_C , K_1 и K_2 совершают движение по геодезическим траекториям $s_{1,2}$, s_{12} и s_{21} .

Аксиома связи для сил инерции двух взаимодействующих тел и принцип Д'Аламбера

Фазовое перераспределение переносных импульсов $d\vec{p}_{1C} / dt = -d\vec{p}_{2C} / dt$ (33) тел m_1 и m_2 в системе отсчета K , определяющих их собственные силы инерции $\vec{\Phi}_{1C} = -d\vec{p}_{1C} / dt$ и $\vec{\Phi}_{2C} = -d\vec{p}_{2C} / dt$ переносного движения (см. рис. 2, а), вызвано тем, что на тело m_1 через стержень R действует компонента $\vec{\Phi}_{21}^n$ относительной силы инерции $\vec{\Phi}_{21} = \vec{\Phi}_{21}^n + \vec{\Phi}_{21}^r = -dp_{21}/dt_1$ тела m_2 , и аналогично на тело m_2 в системе отсчета K через этот же стержень R действует компонента $\vec{\Phi}_{12}^n$ относительной силы инерции $\vec{\Phi}_{12} = \vec{\Phi}_{12}^n + \vec{\Phi}_{12}^r = -dp_{12}/dt_2$ тела m_1 так, что реакции стержня R для этих двух случаев определены равенствами $\vec{R}_{12} = \vec{\Phi}_{12}^n$ и $\vec{R}_{21} = \vec{\Phi}_{21}^n$.

Равенство тангенциальных компонент $\vec{\Phi}_{12}^r$ и $\vec{\Phi}_{21}^r$ относительных сил инерции $\vec{\Phi}_{12}$ и $\vec{\Phi}_{21}$ нулю $\vec{\Phi}_{12}^r = \vec{\Phi}_{21}^r = 0$ вызвано тем, что для начальных импульсов $p_{1\text{ун}} + p_{2\text{ун}} = 0$ время перехода МС2 в стационарное состояние с диаметральным распределением $\theta_C = -\pi$ (11) ее тел m_1 и m_2 можно считать мгновенным $t = dt \rightarrow 0$, а ее движение – всегда удовлетворяющим принципу наименьшего действия [2, 4]. При удовлетворении МС2 этому принципу поступательное движение тел m_1 и m_2 в системах отсчета K_C , K_1 и K_2 будет равномерным $\omega_{1C} = \omega_{1C} = \omega_{1C}, \omega_{12}, \omega_{21} = \text{const}$, так как тангенциальные компоненты $\vec{\Phi}_{12}^r$ и $\vec{\Phi}_{21}^r$ равны нулю $\vec{\Phi}_{12}^r = \vec{\Phi}_{21}^r = 0$ (см. рис. 2, а). При этом нормальные компоненты $\vec{\Phi}_{12}^n$ и $\vec{\Phi}_{21}^n$ всегда направлены вдоль стержня R и влияют на противофазное перераспределение фаз φ_{1C} и φ_{2C} переносных импульсов $\vec{p}_{1C} = m_1 \vec{v}_{1C}$ и $\vec{p}_{2C} = m_2 \vec{v}_{2C}$ между телами m_1 и m_2 , а тангенциальные $\vec{\Phi}_{12}^r$ и $\vec{\Phi}_{21}^r$ (в

случае длительного переходного процесса $t = dt \gg 0$) – на амплитудное p_{1C} и p_{2C} перераспределение этих импульсов $\vec{p}_{1C}$ и $\vec{p}_{2C}$.

Равенство реакций $\vec{R}_{12}$ и $\vec{R}_{21}$ стержня R и относительных сил инерции $\vec{R}_{12} = \vec{\Phi}_{12}$ и $\vec{R}_{21} = \vec{\Phi}_{21}$ позволяет распространить аксиому связи R двух взаимодействующих тел m_1 и m_2 на их относительные силы инерции $\vec{\Phi}_{12}$ и $\vec{\Phi}_{21}$: *«относительные силы инерции $\vec{\Phi}_{12}$ и $\vec{\Phi}_{21}$ двух взаимодействующих тел m_1 и m_2 взаимно приложены к этим телам и действуют на них через их связь, которую можно условно отбросить, а ее реакции $\vec{R}_{12}$ и $\vec{R}_{21}$ заменить относительными силами инерции $\vec{R}_{12} = \vec{\Phi}_{12}$ и $\vec{R}_{21} = \vec{\Phi}_{21}$ этих тел».*

Дифференциальное перераспределение переносных и относительных импульсов $d\vec{p}_{1C} / dt = -d\vec{p}_{21} / dt_1$ и $d\vec{p}_{2C} / dt = -d\vec{p}_{12} / dt_2$ (33) можно представить в системе отсчета K в виде принципа Д'Аламбера:

$$\vec{\Phi}_{1C} + \vec{\Phi}_{21} = 0; \vec{\Phi}_{2C} + \vec{\Phi}_{12} = 0. \quad (42)$$

Почленное суммирование выражений (42) с учетом того, что тангенциальные компоненты $\vec{\Phi}_{12}^r, \vec{\Phi}_{21}^r$ и сумма радиальных компонентов $\vec{\Phi}_{21}^n, \vec{\Phi}_{12}^n$ одновременно равны нулю $\vec{\Phi}_{21}^r = \vec{\Phi}_{12}^r = 0$ и $\vec{\Phi}_{21}^n + \vec{\Phi}_{12}^n = 0$, позволяет выразить сохранность импульса и кинетического момента МС2 в центральном поле относительных сил инерции в компонентной форме (39).

Проверим удовлетворение введенной аксиомы связи для сил инерции и преобразований (24) принципу Д'Аламбера (42). Для этого выразим силы инерции этого принципа в криволинейных координатах:

$$\vec{\Phi}_{1C} = -m_1 \vec{a}_{1C}; \vec{\Phi}_{2C} = -m_2 \vec{a}_{2C}; \vec{\Phi}_{12} = -m_1 \vec{a}_{12}; \vec{\Phi}_{21} = -m_2 \vec{a}_{21}, \quad (43)$$

где $\vec{a}_{1C} = -\omega_C^2 \vec{r}_{1C}$; $\vec{a}_{2C} = -\omega_C^2 \vec{r}_{2C}$ и $\vec{a}_{12} = -\omega_C \omega_{12} \vec{r}_{12}$; $\vec{a}_{21} = -\omega_C \omega_{21} \vec{r}_{21}$ – переносные ускорения тел m_1 и m_1 в системе отсчета K_C и относительные ускорения этих тел в системе отсчета K от их переносного ω_C и относительных ω_{12} и ω_{21} движений (38).

Составляя принцип Д'Аламбера (42) в криволинейных координатах:

$$m_1 \omega_C^2 r_{1C} = m_2 \omega_C \omega_{21} R; m_2 \omega_C^2 r_{2C} = m_1 \omega_C \omega_{12} R \quad (44)$$

и применяя к нему преобразования (24), получим известные радиусы (10)

$$r_{1C} = m_2 R / m; r_{2C} = m_1 R / m, \quad (45)$$

для которых, совместно с преобразованиями (24), принцип Д'Аламбера (42) в виде (44) удовлетворен.

Таким образом, введенная аксиома связи для сил инерции и преобразования (24) удовлетворяют принципу Д'Аламбера (42). Кроме того, преобразования (24) устанавливают связь между переносными $\vec{p}_{1e} = \vec{p}_{2C}$, $\vec{p}_{2e} = \vec{p}_{1C}$ и относительными $\vec{p}_{12}$, $\vec{p}_{12}$ импульсами (16), для которой их сумма удовлетворяет сохранности импульса $\vec{p}_C = \overrightarrow{\text{const}}$ (6) замкнутой МС2 с пятью степенями свободы.

Взаимодействие тел m_1 и m_2 МС2 посредством стержня R (что также справедливо для их взаимодействия по закону Ньютона или Кулона) приводит к

искривлению траекторий движения $s_{1,2}$, s_{12} и s_{21} этих тел (см. рис. 2, а). При этом каждое из тел оказывается вовлеченным в переносное и относительное движения $m_1 \vec{v}_{2C} \vec{v}_{12}$ и $m_2 \vec{v}_{1C} \vec{v}_{21}$, что формирует центральное поле относительных сил инерции $\vec{\Phi}_{12}$ и $\vec{\Phi}_{21}$ которое для диаметрального распределения $\theta_C = -\pi$ (11) образует уравновешенную систему сил $\vec{\Phi}_{21}^n + \vec{\Phi}_{12}^n = 0$ (39), так что импульс МС2 $\vec{p}_C$ сохраняется $d\vec{p}_C / dt = \text{const}$.

Уравнения движения

Запишем принцип Д'Аламбера (42) в системе отсчета K в виде уравнений движения для каждого из тел m_1 и m_2 отдельно:

$$d\vec{p}_{1C} / dt = \vec{\Phi}_{21}; \quad d\vec{p}_{2C} / dt = \vec{\Phi}_{12}, \quad (46)$$

где $d\vec{p}_{1C} / dt = -\vec{\Phi}_{1C}$ и $d\vec{p}_{2C} / dt = -\vec{\Phi}_{2C}$ – силы инерции переносного движения тел m_1 и m_2 в системе отсчета K ; $\vec{\Phi}_{12} = -d\vec{p}_{12} / dt_1$ и $\vec{\Phi}_{21} = -d\vec{p}_{21} / dt_1$ – относительные силы инерции тел m_1 и m_2 в системах отсчета K_2 и K_1 .

Уравнения (46) записаны для замкнутой МС2 с пятью степенями свободы $N=5$. Если к телам m_1 и m_2 приложить какие-либо внешние силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ и просуммировать правые и левые части этих уравнений, то их можно свести к известному уравнению динамики ЦМ C МС2 [1, 2]

$$d\vec{p}_C / dt = \vec{F} \quad (47)$$

где согласно (6) $d\vec{p}_C / dt = d(\vec{p}_{1C} + \vec{p}_{21} + \vec{p}_{2C} + \vec{p}_{12}) / dt = d(\vec{p}_{1C} + \vec{p}_{2C}) / dt - \vec{\Phi}_{12} - \vec{\Phi}_{21}$; $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ – главный вектор внешних сил $\vec{F}_i$, действующих на МС2.

Для отыскания частного решения уравнений (46), например, первого в системе отсчета K_C , выпишем ускорения $\vec{a}_{1C}$ и $\vec{a}_{21}$ (43) тел m_1 и m_2 в системах отсчета K_C и K_1 :

$$\vec{a}_{1C} = -\omega_C^2 \vec{r}_{1C}; \quad \vec{a}_{21} = -\omega_C \omega_{21} \vec{r}_{21}. \quad (48)$$

Тогда первое уравнение (46) в проекциях на ось координат x системы отсчета K_C можно записать в виде

$$-m_1 \omega_C^2 r_{1C} \cos \varphi_{1C} = m_2 \omega_C \omega_{21} R \cos \varphi_{21}, \quad (49)$$

или с учетом преобразований (37)

$$-m_1 \omega_C^2 r_{1C} \sin \varphi_{1C} = -m_2 \omega_C \omega_{21} R \sin \varphi_{1C}. \quad (50)$$

Интегрирование правой и левой части уравнения (50) по времени t определяет связь переносного и относительного импульсов $\vec{p}_{1e} = -\vec{p}_{21r}$ (16) в проекциях на ось x системы отсчета K_C в виде

$$\vec{p}_{1Cx} + \vec{p}_{21x} = 0, \quad (51)$$

$$\text{где} \quad p_{1Cx} = -m_1 r_{1C} \omega_C \sin \varphi_{1C}; \quad p_{21x} = m_2 R \omega_{21} \sin \varphi_{1C}, \quad (52)$$

Подстановка (52) в (51) дает амплитуды:

$$A_1 = c_1 \omega_{21r} / \omega_C, \quad A_2 = c_2 \omega_{12r} / \omega_C, \quad (53)$$

где $c_1 = m_2 R / m_1$ и $c_2 = m_1 R / m_2$ – амплитудные коэффициенты, причем амплитуда A_2 приведена без представления аналогичного решения для второго

уравнения (46).

Преобразования (24) сводят амплитуды (53) к радиусам (10), широко известным в механике [2, 4]:

$$A_1 = r_{1C} = m_2 R / m; A_2 = r_{2C} = m_1 R / m. \quad (54)$$

По амплитудам (54) с учетом того, что $\varphi_{12} = -\varphi_{21}$, нетрудно выразить решение уравнений (46) в системе отсчета K_C :

$$\begin{aligned} x_{1C} &= -A_1 \cos \varphi_{21}; y_{1C} = -A_1 \sin \varphi_{21}; \\ x_{2C} &= -A_2 \cos \varphi_{12} = A_2 \cos \varphi_{21}; y_{2C} = -A_2 \sin \varphi_{12} = A_2 \sin \varphi_{21}, \end{aligned} \quad (55)$$

которые представлены как функции от инвариантных угловых перемещений $\varphi_{12} = -\omega_C t = -\omega_{12} t_1$ и $\varphi_{21} = \omega_C t = \omega_{21} t_1$ (26).

Если сумма абсолютных импульсов тел m_1 и m_2 до начала их взаимодействия при $t = 0$ не равна нулю $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 \neq 0$ (см. рис. 1), то скорость ЦМ C замкнутой МС2 при $t > 0$ в соответствии с (1) составляет

$$\vec{v}_C = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) / m \neq 0. \quad (56)$$

Тогда решения первого уравнения (46) с учетом (55) в системе отсчета K для $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 \neq 0$ при $t > 0$ можно представить в виде:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{Cn} - A_1 \cos \varphi_{21}; y_1 = y_{Cn} - A_1 \sin \varphi_{21}; \\ \dot{x}_1 &= v_{Cx} + A_1 \omega_{21} \sin \varphi_{21}; \dot{y}_1 = v_{Cy} + A_1 \omega_{21} \cos \varphi_{21}, \end{aligned} \quad (57)$$

где x_{Cn} и y_{Cn} – начальные координаты ЦМ в системе отсчета K в момент времени $t = 0$; v_{Cx} и v_{Cy} – скорости ЦМ C (56) в проекциях на оси координат x и y системы отсчета K ; $\varphi_{21} = \omega_C t = \omega_{21} t_1$ – угловое перемещение, производная от которого $\omega_{21} = d\varphi_{21} / dt_1$ ищется по времени t_1 .

На практике необходимость в использовании решения второго уравнения (46) относительно x_{2C} и y_{2C} (55) отсутствует, так как координаты тела m_2 , его траекторию движения и скорость можно определить непосредственно по координатам тела m_1 с помощью известных преобразований координат: $x_{2C} = x_{1C} + R \cos \varphi_{21}$ и $y_{2C} = y_{1C} + R \sin \varphi_{21}$.

Таким образом, решения (55) являются частными решениями неоднородных дифференциальных уравнений (46) в системе отсчета K_C . Тела m_1 и m_2 при $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 \neq 0$ и $t > 0$ будут двигаться в системе отсчета K по спиральным траекториям, что следует из (57).

Сведение задачи двух тел к задаче одного тела

Переход к задаче одного тела можно выполнить в случае, когда МС2 имеет число степеней свободы $N \leq 3$ [3]. Предположим, что тело m_2 рассматриваемой МС2 (рис. 2, а) жестко закреплено на стержне R . В этом случае его собственную систему отсчета K_2 можно исключить из рассмотрения, поскольку в ней относительная угловая скорость ω_{12} тела m_1 равна нулю: $\omega_{12} = 0$. Тогда из (25) следует равенство угловых скоростей

$$\omega_{21} = \omega_C, \quad (58)$$

и одновременно из инварианта (26) то, что время в системах отсчета K , K_C и K_1 абсолютно

$$t_1 = t_C = t. \quad (59)$$

Введем декартовы обобщенные координаты x_1, y_1 и x_2, y_2 тел m_1 и m_2 в системе отсчета K , а также полярную обобщенную координату $\varphi_{21} = \omega_{21}t$ тела m_2 в системе отсчета K_1 , где ω_{21} – угловая скорость вращательного движения тела m_2 относительно опорного тела m_1 . Тогда кинетическую энергию T МС2 с числом степеней свободы $N = 3$ в системе отсчета K можно выразить в виде

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2), \quad (60)$$

где скорости $\dot{x}_1, \dot{y}_1$ и $\dot{x}_2, \dot{y}_2$ тел m_1 и m_2 можно определить через их координаты:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1; x_2 = x_1 + R \cos \varphi_{21}; \dot{x}_1 = \dot{x}_1; \dot{x}_2 = \dot{x}_1 - R\omega_{21} \sin \varphi_{21}; \\ y_1 &= y_1; y_2 = y_1 + R \sin \varphi_{21}; \dot{y}_1 = \dot{y}_1; \dot{y}_2 = \dot{y}_1 + R\omega_{21} \cos \varphi_{21}. \end{aligned} \quad (61)$$

Подстановка скоростей (61) в кинетическую энергию T (60) при $\omega_{21} = \text{const}$ дает лагранжиан рассматриваемой МС2 в виде

$$L = T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\omega_{21}^2R^2 - U, \quad (62)$$

где $m = m_1 + m_2$ – суммарная масса МС2, условно сосредоточенная в рабочем теле m_1 (см. рис. 1 и [3]); U – обобщенный потенциал [4]:

$$U = m_2\omega_{21}R(\dot{x}_1 \sin \varphi_{21} - \dot{y}_1 \cos \varphi_{21}). \quad (63)$$

На основе лагранжиана L (62) можно получить два координатных уравнения:

$$m\ddot{x}_1 = m_2\omega_{21}^2R \cos \varphi_{21}; m\ddot{y}_1 = m_2\omega_{21}^2R \sin \varphi_{21}, \quad (64)$$

которые для замкнутой МС2 с тремя степенями свободы $N = 3$ по аналогии с (3.46) можно записать в виде

$$m d^2 \vec{r}_1 / dt^2 = \vec{\Phi}_{21}, \quad (65)$$

где $\vec{\Phi}_{21} = -d\vec{p}_{21} / dt = m_2\omega_{21}^2\vec{r}_{21}$ – относительная сила инерции тела m_2 в системе отсчета K_1 .

Так как для начальных условий $N = 3$ переходный процесс МС2 отсутствует, то решениями уравнения (65) являются частные решения (55).

В работах [3-6] найдено решение уравнения (65) в системе отсчета K в виде

$$m d^2 \vec{r}_1 / dt^2 = \vec{\Phi}_{21} + \vec{F}_1, \quad (66)$$

для МС2 с тремя степенями свободы $N = 3$ в диссипативной среде, где $\vec{F}_1 = \mu_1\vec{v}_1$ – диссипативная сила, создаваемая внешней средой с вязким линейным сопротивлением μ_1 движению опорного тела m_1 со скоростью $\vec{v}_1$. При опускании в частном решении (3.55) координат x_{2C} и y_{2C} число степеней свободы МС2 уменьшится до $N = 2$.

Заключение

Таким образом, получены уравнения движения МС2 в поле относительных сил инерции ее взаимодействующих тел. Эти уравнения в сравнении с уравнением движения ее ЦМ S позволяют анализировать движение каждого из

тел и ЦМ S $MC2$ в отдельности при числе степеней ее свободы $N \leq 5$ так, например, при $N = 3$ он записан для вакуума (65) и диссипативной среды (66), а при $N = 5$ – для вакуума (46).

Согласно принципу эквивалентности гравитации и инерции по Эйнштейну [5], движение тел m_1 и m_2 по траекториям $s_{1,2}$ и s_{12}, s_{21} можно рассматривать как движение по замкнутым геодезическим траекториям [6] в поле относительных сил инерции, например, при взаимодействии этих тел тяготением Ньютона. В случае когда $R = \text{const}$ для решения задачи двух тел [2], находящихся в какой-либо неоднородной диссипативной среде, обозначенной инерциальной системой отсчета, можно использовать уравнение (66).

Список литературы

1. Гулия Н.В. Инерция: Предисловие А. Ю. Ишлинского. – М.: Наука. Серия Наука и технический прогресс, 1982. – 152 с.
2. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1990. – 607 с.
3. Савелькаев С.В. Динамический анализ двухмассовой механической системы в диссипативной среде с учетом сил инерции // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2024. – №87. – С. 135-149. – DOI: 10.17223/19988621/ 87/11.
4. Савельев И.В. Основы теоретической физики. Механика и электродинамика. – М.: Наука, 1991. – Т. 1. – 496 с.
5. Эйнштейн А. О специальной и общей теории относительности // Собрание научных трудов в 4-х томах. Т. 1. – М.: Наука, 1965. – 563 с.
6. Савелькаев С.В. Динамическая гравитация как эквивалент инерции в механике и единица ее измерения // Новосибирск: Вестник СГУГиТ. – 2025. –Т. 30, №1. – С. 169-185. – doi.org/10.33764/2411-1759-2025-30-1-169-185.

Сведения об авторе:

Савелькаев Сергей Викторович – д.т.н., доцент, профессор кафедры специальных устройств инноватики и метрологии.