УДК 539.3 https://doi.org/10.26160/2542-0127-2024-14-111-118

КИНЕМАТИКА ДЕФОРМИРОВАННОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

Гукасян А.А.
Институт механики НАН Республики Армения, Ереван

Ключевые слова: деформированное тело, кинематика, криволинейные координаты, коэффициенты (матрицы) Ламе, скорость, ускорение.

Аннотация. В рамках линейной теории упругости исследована кинематика движения деформированного твердого тела в криволинейной системе координат. Криволинейные координаты представлены в зависимости от обобщенных координат, определяющих положение абсолютно твердого тела в пространстве и от параметров, обусловленных упругостью тела. Получены обобщенные выражения для скорости и ускорения движений точек упругого тела через элементы обобщенной матрицы Ламе. Результаты исследования позволяют легко определить кинематические величины и оценить дополнительные слагаемые, обусловленные упругостью.

KINEMATICS OF A DEFORMED SOLID BODY IN CURVILINEAR COORDINATES

Ghukasyan A.A.
Institute of Mechanics of NAS Republic of Armenia, Yerevan

Keywords: deformed body, kinematics, curvilinear coordinates, Lame coefficients (matrices), velocity, acceleration.

Abstract. Within the framework of the linear theory of elasticity, the kinematics of the motion of a deformed solid body in a curvilinear coordinate system is investigated. Curvilinear coordinates are presented depending on the generalized coordinates determining the position of an absolutely rigid body in space and on the parameters determined by the elasticity of the body. Generalized expressions for the velocity and acceleration of the motion of points of an elastic body through the elements of the generalized Lame matrix are obtained. The results of the study make it easy to determine the kinematic quantities and estimate additional terms determined by elasticity.

1. Введение. Положение произвольной точки A^* деформированного твердого тела (рис. 1) в инерциальной системе координат $O_0X_0Y_0Z_0$ определяется радиус-вектором $\boldsymbol{\rho}_{A^*} = \boldsymbol{\rho}_{A^*}(X,Y,Z)$ [1]. Исследование движения деформированного твердого тела во многих случаях более удобно определять с помощью некоторых криволинейных координат. Под криволинейными координатами подразумевают три величины (s_1,s_2,s_3), через которые однозначно выражаются декартовые координаты точки тела [2-4]:

$$X = X_{A^*}(s_1,s_2,s_3), Y = Y_{A^*}(s_1,s_2,s_3), Z = Z_{A^*}(s_1,s_2,s_3),$$

или
$$\boldsymbol{\rho}_{A^*} = \boldsymbol{\rho}_{A^*}(s_1,s_2,s_3) \tag{1.1}$$

Предполагается также, что выражения (1.1) разрешимы относительно криволинейных координат s_1,s_2,s_3 и эти решения однозначны:

$$s_1 = s_1(X,Y,Z), s_2 = s_2(X,Y,Z), s_3 = s_3(X,Y,Z). \tag{1.2}$$

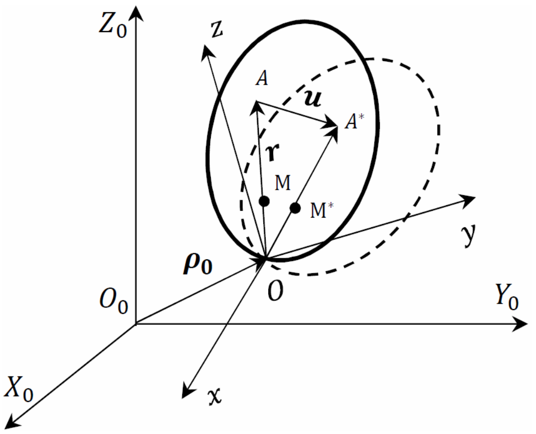

Рис. 1. Деформируемое тело

Для удобства дальнейшего исследования, декартовые координаты произвольной точки представим в виде [5-6]

$$X = X(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u}), Y = Y(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u}), Z = Z(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u}) \tag{1.3}$$

Через компоненты вектора $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)^T$ обозначены все параметры, определяющие положение абсолютно твердого тела в пространстве, а через компоненты вектора $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_m)^T$ – все параметры, которые обусловлены упругостью тела.

Следовательно, из (1.2) и (1.3) имеем

$$\begin{aligned} s_1 &= s_1(X(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u}), Y(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u}), Z(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})) = s_1^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u}) \\ s_2 &= s_2(X(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u}), Y(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u}), Z(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})) = s_2^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u}) \\ s_3 &= s_3(X(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u}), Y(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u}), Z(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})) = s_3^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u}) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Несколько слов о построении криволинейной системы координат: из равенства (1.2) непосредственно следует, что приравнивание одного из координат $s_p\,(p = 1,2,3)$ к постоянной величине приводит к уравнению координатной поверхности, например $s_p(X,Y,Z) = c_p$. Пересечение двух координатных поверхностей дает координатную линию, вдоль которой изменяется только одна координата. Например, пересечение поверхностей $s_1(X,Y,Z) = c_1$, $s_2(X,Y,Z) = c_2$ дает координатную линию, вдоль которой изменяется только координата s_3 (рис. 2). Если через точку пересечения координатных линий провести касательные к координатным линиям в направлении возрастания величин s_1, s_2, s_3, получим оси криволинейных координат $(s_1),(s_2),(s_3)$. Линии этих осей могут образовать как ортогональную, так и не ортогональную систему координат. Совокупность векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, которые характеризуют направление криволинейных осей, будем считать линейно независимыми и назовем координатным базисом.

Отметим, что модули базисных векторов криволинейных координат могут быть и не равны единице, но при этом всегда можно нормировать. В дальнейшем, для определенности, будем считать, что криволинейные координаты являются ортогональными.

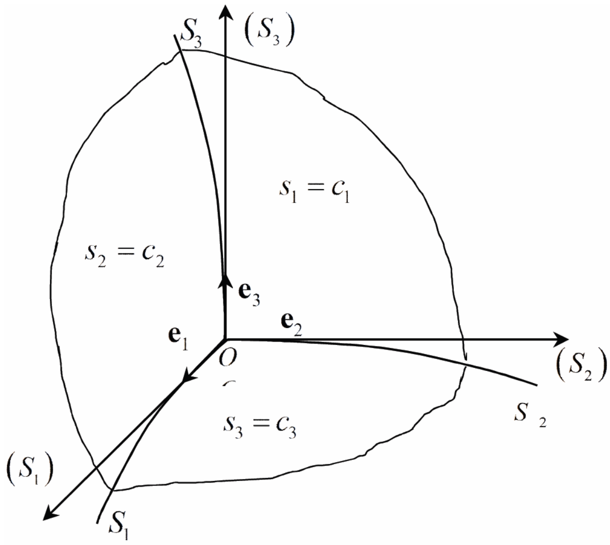

Рис. 2. Криволинейные координаты

Для описания движения в криволинейных координатах величины (s_1, s_2, s_3) следует считать функциями времени.

2. Скорость движения деформированного твердого тела в криволинейных координатах. Производная по времени от радиус-вектора $\boldsymbol{\rho}_{A^*} = \boldsymbol{\rho}_{A^*}(s_1, s_2, s_3)$ произвольной точки деформированного тела, с учетом (1.4), определяет скорость движения точек A^*

$$\mathbf{v} = \frac{d\boldsymbol{\rho}_{A^*}}{dt} = \sum_{p=1}^{3} \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_{A^*}(s_1, s_2, s_3)}{\partial s_p} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u})}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u})}{\partial u_j} \dot{u}_j \right]. \quad (2.1)$$

Так как при составлении каждой из производных $\dfrac{\partial \boldsymbol{\rho}_{A^*}(s_1, s_2, s_3)}{\partial s_p} (p = 1, 2, 3)$ переменной считается только данная координата $s_p (p = 1, 2, 3)$, то отвечающая ей координатная базисная линия $\mathbf{e}_p (p = 1, 2, 3)$ оказывается годографом вектора $\boldsymbol{\rho}_{A^*}(s_1, s_2, s_3)$.

$$\mathbf{e}_p = \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_{A^*}(s_1, s_2, s_3)}{\partial s_p} = \left| \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_{A^*}(s_1, s_2, s_3)}{\partial s_p} \right| \cdot \mathbf{s}_p^0, \ \left| \mathbf{s}_p^0 \right| = 1, (p = 1, 2, 3), \quad (2.2)$$

где

$$H_p = \left| \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_{A^*}}{\partial s_p} \right| = \left[\left(\frac{\partial X(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u})}{\partial s_p} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u})}{\partial s_p} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u})}{\partial s_p} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.3)$$

H_p – называются коэффициентами Ламе, а s_p^0 – орты криволинейных координат.

Вектор скорости (2.1) с учетом (2.2) и (2.3) представим в виде

$$\mathbf{v} = \sum_{p=1}^{3} H_p(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}) \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u})}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u})}{\partial u_j} \dot{u}_j \right] \mathbf{s}_p^0 \quad (2.4)$$

или $\quad \mathbf{v} = v_1 \mathbf{s}_1^0 + v_2 \mathbf{s}_2^0 + v_3 \mathbf{s}_3^0,$

$$v_p = H_p(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})}{\partial \alpha_i}\dot{\alpha}_i + \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})}{\partial u_j}\dot{u}_j\right](p=1,2,3), \qquad (2.5)$$

v_p – проекция вектора $\mathbf{v}$ по направлению координатной линии (s_p).

Формулу (2.4) можно представить в более удобном виде, вводя обобщенные матрицы Ламе $\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u}),\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})$, элементы которых зависят от коэффициентов Ламе $H_p(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})(p=1,2,3)$, от параметров $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)^T$, определяющих положение абсолютно твердого тела и от упругих характеристик тела $\mathbf{u}=(u_1,u_2,...,u_m)^T$ [1, 5, 6].

Матрицы $\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u}),\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})$ имеют вид

$$\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} H_1(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})\frac{\partial s_1^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})}{\partial \alpha_1} & H_1(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})\frac{\partial s_1^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})}{\partial \alpha_2} & \cdots & H_1(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})\frac{\partial s_1^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})}{\partial \alpha_n} \\ H_2(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})\frac{\partial s_2^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})}{\partial \alpha_1} & H_2(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})\frac{\partial s_2^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})}{\partial \alpha_2} & \cdots & H_2(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})\frac{\partial s_2^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})}{\partial \alpha_n} \\ H_3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})\frac{\partial s_3^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})}{\partial \alpha_1} & H_3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})\frac{\partial s_3^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})}{\partial \alpha_2} & \cdots & H_3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})\frac{\partial s_3^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})}{\partial \alpha_n} \end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})$ имеет размерность $(3\times n)$ с общим элементом

$$H_{1(ij)}^* = H_i\frac{\partial s_i^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})}{\partial \alpha_j}(i=1,2,3;\ j=1,2,...,n)$$

$$\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} H_1(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})\frac{\partial s_1^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})}{\partial u_1} & H_1(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})\frac{\partial s_1^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})}{\partial u_2} & \cdots & H_1(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})\frac{\partial s_1^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})}{\partial u_m} \\ H_2(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})\frac{\partial s_2^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})}{\partial u_1} & H_2(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})\frac{\partial s_2^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})}{u_2} & \cdots & H_2(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})\frac{\partial s_2^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})}{\partial u_m} \\ H_3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})\frac{\partial s_3^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})}{\partial u_1} & H_3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})\frac{\partial s_3^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})}{\partial u_2} & \cdots & H_3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})\frac{\partial s_3^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})}{\partial u_m} \end{pmatrix}$$

Матрица $\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})$ имеет размерность $(3\times m)$ с общим элементом

$$H_{2(ij)}^* = H_i\frac{\partial s_i^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})}{\partial u_j},(i=1,2,3;\ j=1,2,...,m).$$

Введением матриц $\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u}),\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})$, вектор скорости (2.4) точек деформированного твердого тела можно представить в компактном виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})\dot{\mathbf{u}}. \qquad (2.6)$$

Из определения матриц $\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})$, $\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})$ следует, что при $u_j=0\ (j=1,2,...,m),\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha},0)=\mathbf{H}^*(\boldsymbol{\alpha})$, $\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha},0)\equiv 0$ и $\mathbf{v}=\mathbf{H}^*\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ – совпадает со скоростью движения абсолютно твердого тела.

Из условия ортогональности криволинейных систем координат имеем

$$\mathbf{s}_i^0 \cdot \mathbf{s}_j^0 = \begin{cases} 0, i \neq j, \\ 1, i = j\left(i, j = 1,2,3\right), \end{cases} \qquad (2.7)$$

или из (2.2) и (2.3)

$$\frac{\partial X}{\partial s_i} \cdot \frac{\partial X}{\partial s_j} + \frac{\partial Y}{\partial s_i} \cdot \frac{\partial Y}{\partial s_j} + \frac{\partial Z}{\partial s_i} \cdot \frac{\partial Z}{\partial s_j} = 0, i \neq j, \qquad (2.8)$$

$$\frac{1}{H_i^2}\left[\left(\frac{\partial X}{\partial s_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial s_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial s_i}\right)^2\right] = 1, i = j.$$

Напомним, что связь между единичным вектором ортогональной криволинейной системы координат и единичным вектором декартовой системы координат определяются из условий

$$\mathbf{s}_p^0 = \frac{1}{H_p}\left(\left(\frac{\partial X\left(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u}\right)}{\partial s_p}\right)\cdot \mathbf{i} + \left(\frac{\partial Y\left(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u}\right)}{\partial s_p}\right)\cdot \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Z\left(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u}\right)}{\partial s_p}\right)\cdot \mathbf{k}\right)\left(p = 1,2,3\right) \qquad (2.9)$$

где $\left(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\right)$ – единичный вектор прямоугольной декартовой системы координат.

Связь между ортогональной криволинейной системой и декартовой системой координат определяется направляющими косинусами (табл. 1) между осями названных систем координат, которые для рассматриваемого случая будут

$$\cos\left(\mathbf{s}_p^0 \cdot \mathbf{i}\right) = \frac{1}{H_p} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_{A^*}}{\partial s_p} \cdot \mathbf{i} = \frac{1}{H_p} \cdot \frac{X\left(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u}\right)}{\partial s_p},$$

$$\cos\left(\mathbf{s}_p^0 \cdot \mathbf{j}\right) = \frac{1}{H_p} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_{A^*}}{\partial s_p} \cdot \mathbf{j} = \frac{1}{H_p} \cdot \frac{\partial Y\left(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u}\right)}{\partial s_p}, \qquad (2.10)$$

$$\cos\left(\mathbf{s}_p^0 \cdot \mathbf{k}\right) = \frac{1}{H_p} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_{A^*}}{\partial s_p} \cdot \mathbf{k} = \frac{1}{H_p} \cdot \frac{\partial Z\left(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u}\right)}{\partial s_p}, \left(p = 1,2,3\right).$$

Табл. 1. Направляющие косинусов, в соответствии с выражениями (2.10)

	(s_1)	(s_2)	(s_3)
X_0	$\frac{1}{H_1}\frac{\partial X\left(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u}\right)}{\partial s_1}$	$\frac{1}{H_2}\frac{\partial X\left(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u}\right)}{\partial s_2}$	$\frac{1}{H_3}\frac{\partial X\left(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u}\right)}{\partial s_3}$
Y_0	$\frac{1}{H_1}\frac{\partial Y\left(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u}\right)}{\partial s_1}$	$\frac{1}{H_2}\frac{\partial Y\left(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u}\right)}{\partial s_2}$	$\frac{1}{H_3}\frac{\partial Y\left(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u}\right)}{\partial s_3}$
Z_0	$\frac{1}{H_1}\frac{\partial Z\left(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u}\right)}{\partial s_1}$	$\frac{1}{H_2}\frac{\partial Z\left(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u}\right)}{\partial s_2}$	$\frac{1}{H_3}\frac{\partial Z\left(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u}\right)}{\partial s_3}$

Для оценки слагаемых в (2.6) в рамках принятой модели упругого тела пользуемся разложением функций $s_p = s_p^*\left(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u}\right)$ и $H_p = H_p\left(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u}\right)$ по формуле Тейлора относительно $u_j\left(j = 1,2,...,m\right)$ с точностью $o\left(\varepsilon^2\right)$

$$s_p = s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial u_j} u_j + o(\varepsilon^2),$$
$$H_p = H_p(\boldsymbol{\alpha},0) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial H_p(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial u_j} u_j + o(\varepsilon^2). \tag{2.11}$$

Подставляя (2.11) в (2.5), после некоторых вычислений, для компонентов вектора скорости движения упругого тела с точностью ε^2 получим следующее выражение

$$v_p = H_p(\boldsymbol{\alpha},0)\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial \alpha_i}\dot{\alpha}_i + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial u_j}\dot{u}_j\right] + H_p(\boldsymbol{\alpha},0)\times$$
$$\times\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left[\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial u_j} u_j\right]\dot{\alpha}_i + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial H_p(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial u_j} u_j \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial \alpha_i}\dot{\alpha}_i\right], p = 1,2,3 \tag{2.12}$$

Компоненты вектора скорости $\mathbf{v}$ представим в виде двух слагаемых

$$v_p = v_p^1 + v_p^2, v_p^1 = H_p(\boldsymbol{\alpha},0)\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial \alpha_i}\dot{\alpha}_i, v_p^2 = H_p(\boldsymbol{\alpha},0)\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial u_j}\dot{u}_j +$$
$$+H_p(\boldsymbol{\alpha},0)\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left[\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial u_j} u_j\right]\dot{\alpha}_i + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial H_p(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial u_j} u_j \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial \alpha_i}\dot{\alpha}_i\right], \tag{2.13}$$
$$p = 1,2,3$$

или $\mathbf{v} = \mathbf{v}^1 + \mathbf{v}^2$, где
$$\mathbf{v}^1 = \sum_{p=1}^{3}\left[H_p(\boldsymbol{\alpha},0)\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial \alpha_i}\dot{\alpha}_i\right]\mathbf{s}_p^0, \tag{2.14}$$

$$\mathbf{v}^2 = \sum_{p=1}^{3}\left\{H_p(\boldsymbol{\alpha},0)\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial u_j}\dot{u}_j + H_p(\boldsymbol{\alpha},0)\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left[\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial u_j} u_j\right]\dot{\alpha}_i +\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial H_p(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial u_j} u_j \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial \alpha_i}\dot{\alpha}_i\right]\right\}\mathbf{s}_p^0. \tag{2.15}$$

Здесь вектор $\mathbf{v}^1$ определяет скорость движения абсолютно твердого тела, а вектор скорости $\mathbf{v}^2$ обусловлен упругостью тела и имеет порядок ε^2.

Представим компоненты вектора скорости (2.14), (2.15) в матричном виде. Введем матрицу $\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha},0)$ с элементами

$$\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha},0) = \left\{H_p(\boldsymbol{\alpha},0)\frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial \alpha_i}\right\}_{p,i=1}^{3,n}. \tag{2.16}$$

Компоненты вектора скорости движения абсолютно твердого тела представим в виде

$$v_p^1 = \left(\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha},0)\dot{\boldsymbol{\alpha}}\right)_p (p = 1,2,3). \tag{2.17}$$

Аналогичным образом, вводя матрицы

$$\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha},0)=\left\{H_p(\boldsymbol{\alpha},0)\frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial u_j}\right\}_{p,j=1}^{3,m},$$

$$\mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})=\left\{H_p(\boldsymbol{\alpha},0)\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left[\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial u_j}u_j\right]+\frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial\alpha_i}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial H_p(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial u_j}u_j\right)\right\}_{p,i=1}^{3,n},$$

имеем $$v_p^2=\left[\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha},0)\dot{\mathbf{u}}+\mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})\dot{\boldsymbol{\alpha}}\right]_p,(p=1,2,3) \quad (2.18)$$

Следовательно,

$$\mathbf{v}=\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha},0)\dot{\boldsymbol{\alpha}}+\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha},0)\dot{\mathbf{u}}+\mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})\dot{\boldsymbol{\alpha}}\text{, где при } \mathbf{u}=0,\ \mathbf{v}^2\equiv 0. \quad (2.19)$$

3. Ускорение движений деформированного твердого тела в криволинейных координатах. Вектор ускорения произвольной точки деформированного твердого тела A^* (рис. 1) в ортогональной криволинейной системе координат представим в виде

$$\mathbf{W}=\sum_{p=1}^{3}W_p\mathbf{s}_p^0. \quad (3.1)$$

Компоненты W_p вектора $\mathbf{W}$ с учетом (2.2), можно представить в виде

$$W_p=\mathbf{W}\cdot\mathbf{s}_p^0=\frac{1}{H_p}\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_{A^*}}{\partial s_p}. \quad (3.2)$$

Выражение (3.2) с учетом правила дифференцирования, можно также представить следующим образом

$$W_p=\frac{1}{H_p}\left[\frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_{A^*}}{\partial s_p}\right)-\mathbf{v}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_{A^*}}{\partial s_p}\right],\ (p=1,2,3). \quad (3.3)$$

Поскольку радиус-вектор произвольной точки тела зависит от криволинейных координат $\boldsymbol{\rho}_{A^*}=\boldsymbol{\rho}_{A^*}(s_1,s_2,s_3)$, то имеем

$$\mathbf{v}=\frac{d\boldsymbol{\rho}_{A^*}}{dt}=\sum_{p=1}^{3}\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_{A^*}}{\partial s_p}\cdot\dot{s}_p \text{ и } \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\dot{s}_p}=\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_{A^*}}{\partial s_p},\ (p=1,2,3). \quad (3.4)$$

Учитывая выражения (3.4), первое слагаемое в скобках (3.3) представим в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_{A^*}}{\partial s_p}\right)=\frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\dot{s}_p}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{s}_p}\frac{v^2}{2}\right),\ (p=1,2,3). \quad (3.5)$$

Преобразуем второе слагаемое следующим образом

$$\mathbf{v}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_{A^*}}{\partial s_p}=\mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial s_p}\frac{d\boldsymbol{\rho}_{A^*}}{dt}=\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial s_p}=\frac{\partial}{\partial s_p}\frac{v^2}{2},(p=1,2,3). \quad (3.6)$$

Подставляя (3.5) и (3.6) в (3.3), для проекции вектора ускорения получим следующее выражение

$$W_p=\frac{1}{H_p}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{s}_p}\frac{v^2}{2}\right)-\frac{\partial}{\partial s_p}\frac{v^2}{2}\right],\ (p=1,2,3). \quad (3.7)$$

где вектор скорости движения точек деформированного твердого тела в произвольной ортогональной криволинейной системе координат, в рамках принятой линейной модели с точностью ε^2, представляется в виде

$$\begin{gathered}\mathbf{v}=\sum_{p=1}^{3}\left\{H_p(\boldsymbol{\alpha},0)\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial\alpha_i}\dot{\alpha}_i\right]\right\}s_p^0+\sum_{p=1}^{3}\left\{H_p(\boldsymbol{\alpha},0)\left[\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial u_j}\dot{u}_j\right]\right\}s_p^0+ \\ +\sum_{p=1}^{3}\left\{H_p(\boldsymbol{\alpha},0)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\alpha_i}\left[\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial u_j}u_j\right]\dot{\alpha}_i+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial H_p(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial u_j}u_j\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial\alpha_i}\dot{\alpha}_i\right]\right\}s_p^0.\end{gathered} \tag{3.8}$$

По формулам (2.19) и (3.8) определены кинематические величины движения двухзвенного упругого манипулятора [1], и приведен сравнительный анализ кинематических величин, полученных с применением методов теоретической механики и асимптотического метода малого параметра.

Заключение. Криволинейные координаты представлены в зависимости от обобщенных координат, определяющих положение абсолютно твердого тела в пространстве и от параметров, обусловленных упругостью тела. Получены обобщенные выражения для скорости и ускорения движений точек упругого тела через элементы обобщенной матрицы Ламе. Результаты исследования позволяют легко определить кинематические величины движения деформированного твердого тела и оценить дополнительные слагаемые, обусловленные упругостью тела.

Список литературы

1. Гукасян А.А. Движение деформированного твердого тела. – Ереван: Изд-во НАН РА, Гитутюн, 2024. – 190 с.
2. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Наука, 1961. – 824с.
3. Суслов Г.К. Теоретическая механика. – М.-Л.: ГОСТЕХИЗДАТ, 1946. – 655с.
4. Поляхов Н.Н., Зегжда С.А., Юшков М.П. Теоретическая механика. – Л.: Изд-во Лен. ун-та, 1985. – 536 с.
5. Гукасян А.А. О моделях многозвенных манипуляторов // Мехатроника, автоматика и робототехника. – 2023. – №12. – С. 9-13.
6. Гукасян А.А. Кинематика упругого манипулятора в криволинейной системе координат // Доклады НАН Армении. – 2014. – Т. 114, №3. – С. 222-229.

Сведения об авторе:
Гукасян Артуш Апресович – д.ф.-м.н., профессор, ведущий научный сотрудник.