УДК 532.5.031 https://doi.org/10.26160/2542-0127-2024-14-81-89

КРАТКИЙ ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ ТЕОРИИ КУМУЛЯЦИИ, ОСНОВАННОЙ НА МЕТОДАХ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА

Тукмаков Д.А.
Институт механики и машиностроения Казанского научного центра Российской академии наук, Казань

Ключевые слова: механика жидкости и газа, математическое моделирование, комплексный потенциал, плоские течения, теория кумуляции, высшее профессиональное образование.

Аннотация. Развитие промышленных технологий требует развития и расширения соответствующих программ высшего образования. В вопросах преподавания для специальности «Механика и математическое моделирование», «Прикладная математика», а также других специальностей, связанных с изучением гидродинамических процессов, помимо классических курсов, изучающих течения жидких и газообразных сред, необходима разработка учебных курсов, касающихся некоторых нестандартных разделов механики жидкости и газа, в том числе ударно-волновых и детонационных процессов. Целью данной работы является обзор результатов классической теории кумуляции − линейной теории кумуляции, основанной на теории функций комплексного переменного, а также определение пределов применимости линейной теории. Описанные в работе разделы линейной теории могут быть использованы при разработке учебного курса по специальностям высшего профессионального образования.

A BRIEF REVIEW OF THE RESULTS OF THE CUMULATION THEORY BASED ON COMPREHENSIVE ANALYSIS METHODS

Tukmakov D.A.
Institute of Mechanics and Mechanical Engineering of the Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Kazan

Keywords: fluid and gas mechanics, mathematical modeling, complex potential, plane flows, cumulation theory, higher professional education.

Abstract. The development of industrial technologies requires the development and expansion of relevant higher education programs. In matters of teaching for the specialty "Mechanics and Mathematical Modeling", "Applied Mathematics", as well as other specialties related to the study of hydrodynamic processes, in addition to classical courses studying liquid and gaseous flows, it is necessary to develop training courses related to some non-standard sections of fluid and gas mechanics, including shock-wave and detonation processes. The purpose of this work is to review the results of the classical theory of cumulation − the linear theory of cumulation based on the theory of functions of a complex variable, as well as to determine the limits of applicability of the linear theory. The sections of the linear theory described in the work can be used in developing a course in the specialties of higher professional education.

Введение. Одной из проблем профессионального образования является взаимодействие предметного образования с отраслями науки и промышленности. В работе [1] изложены результаты включения элементов динамики неоднородных сред в образовательную программу специальности «Прикладная математика». В статье [2] к системе уравнений динамики многофазной среды применяется описанный в работе [1] метод упрощения параметров динамики моделируемого течения, чтобы свести решение нелинейной системы уравнений в частных производных к линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Актуальным является внедрение в программы высшего образования неклассических элементов научных дисциплин. Целью данной работы является описание результатов, полученных теорией комплексного потенциала, применительно к исследованию процессов кумуляции. Новизна работы заключается в том, что представлены основные достижения линейной теории кумуляции, ограничения линейной теории, а также возможные направления преодоления ограничений, выходящие за рамки теории комплексного потенциала.

Методология и обзор результатов

1. Физические предпосылки теории

Одно из наиболее обширных приложений комплексного потенциала находится в механике жидкости и газа [3]. Приближение идеальной жидкости позволяет реализовать теорию потенциала в различных естественнонаучных и технических областях: геофизике, гидрологии, гидрогеологии, аэродинамике летательных аппаратов. Также теория комплексного потенциала применяется для математического моделирования пробивания поверхности кумулятивным зарядом [3]. Процессы кумуляции связаны с проблемами детонации взрывчатых веществ [4]. Так как формирование кумулятивной струи происходит при таких химических превращениях, в которых твердые вещества переходят в газообразное агрегатное состояние почти мгновенно, а давление газа столь велико, что способно разрушать даже прочные материалы.

В работе [3] в качестве иллюстрации рассмотрен следующий физический эксперимент. Над пластиной расположены взрывчатые заряды цилиндрической формы и одинаковых размеров (рис. 1). Некоторые заряды сплошные, другие заряды имеют коническую выемку со стороны, обращенной к пробиваемой поверхности, в последних двух зарядах (рис. 1, д, е) в выемку вставлены металлические конусы, с одинаковой толщиной металлической облицовки. Заряды (рис. 1, а, в, д) расположены на поверхности пластины, заряды (рис. 1, б, г, е) приподняты над поверхностью пластины.

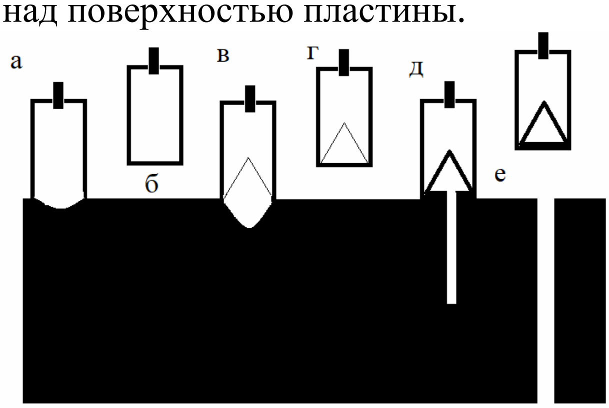

Рис. 1. Схематичное изображение результатов воздействия на поверхность различной компоновки заряда

На рисунке 1 представлено воздействие зарядов на пластину при их подрыве. Когда вогнутая поверхность покрыта металлом увеличивается пробивное действие заряда. Увеличение пробивного воздействия также наблюдается при удалении заряда от пробиваемой поверхности. Увеличение проникающего воздействия на пластину при наличии выемки (рис. 1, заряд в) называется кумулятивным эффектом. В основе теории кумуляции лежит исследование процессов, связанных с зарядом, имеющим металлическую поверхность выемки типа (рис. 1, е). На рисунке 2 изображен такой заряд в более крупном виде.

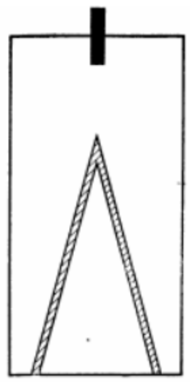

Рис. 2. Схема кумулятивного заряда

Теория кумуляции, основанная на методах комплексного анализа, предполагает следующие утверждения [3]: 1) процесс детонации происходит мгновенно, воздействие взрывчатого вещества на оболочку сводится к импульсу, направленному перпендикулярно поверхности конуса; 2) материал оболочки и пробиваемая поверхность, считается идеальной несжимаемой жидкостью.

Гипотезы 1)-2) обосновываются тем, что начальное давление на оболочку имеет такую величину, при которой прочностные и пластические силы не менее чем в сотню раз меньше инерционных сил. В таком случае влияние прочностных сил не будет существенным и возможно ими пренебречь, пользуясь моделью идеальной жидкости. В начальный момент времени элементы жидкой конической оболочки двигаясь в направлении оси конуса приобретают скорость на порядок выше скорости звука. Происходит обжатие металлического конуса и утолщение его стенок. В процессе подхода элемента конуса к оси части этого элемента, выдвигаясь вперед, будут выжиматься. При обжатии конуса происходит вытекание струи, так называемой проволоки, изображенной на рисунке 3.

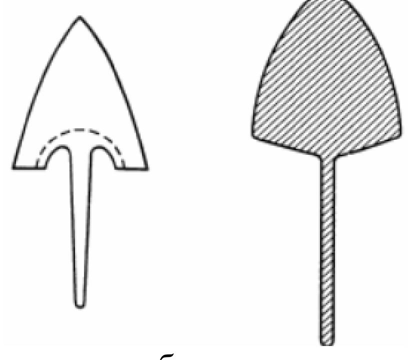

Рис. 3. Схематичное изображение кумулятивной струи

Проволока, взаимодействуя с твердой поверхностью, воздействует на поверхность сверхвысоким давлением.

2. Аналитическая теория течения кумулятивных струй. В расчетах применяется схема первого приближения. Построения расчетных формул основаны на вспомогательных задачах из теории струй [3, 5]. Такая постановка предполагает рассмотрение двухмерного случая и трехмерного случая с осесимметричным течением. Исследуется стационарное движение идеальной жидкости в среде с постоянным давлением, которое удовлетворяет ряду условий. Течение описывается в системе координат где y – поперечная координата и x – продольная координата. Вдоль оси симметрии по оси x , при $x \to -\infty$ радиус потока составляет величину – R, при $x \to +\infty$ радиус потока имеет величину – r. Слева при $x \to -\infty$ скорость потока $-V_1$ и направлена вправо, справа при $x \to +\infty$ скорость потока − V_2 направлена влево, плотности жидкости соответственно ρ_1 и ρ_2. Описанная задача это задача соударения струй с общей осью, схематично изображенная на рисунке 4.

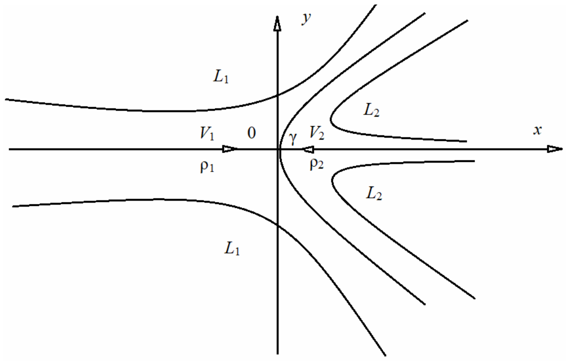

Рис.4. Схема потока до и после соударения струй

Поток имеет две свободные поверхности L_1 и L_2 и разделяющею поверхность γ. Справа от γ – жидкость, приходящая из $+\infty$, слева от γ жидкость приходящая из $-\infty$. Из предположения стационарности движения, по закону Бернулли давление потока − p с плотностью ρ, движущегося со скоростью V определяется выражением:

$$p = C - \frac{\rho}{2} V^2, \qquad (1)$$

где C – константа, равная давлению при $V = 0$, в данном случае в точке оси x на поверхности раздела, предположим в точке $x = 0$.

Отсюда и из условия постоянства давления среды вдоль L_1 имеем (2):

$$V = V_1, \qquad (2)$$

а вдоль γ для скоростей потоков справедливы соотношения (3):

$$\rho_1 \left(V^+\right)^2 = \rho_2 \left(V^-\right)^2, \qquad (3)$$

где V^+, V – скорости потоков, имеющих плотности ρ_1 и ρ_2 соответственно. Из соотношения (3) следует, что вдоль L_2 скорость потока V определяется выражением (4):

$$V = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} V_1. \qquad (4)$$

Формула (4) определяется скорость встречного потока V_2 (5) при $x \to +\infty$:

$$V_2 = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} V_1. \qquad (5)$$

Поставленная задача имеет решение как для плоского течения, так и для течения с осевой симметрией [3].

2.1. Плоский случай. Для плоского случая потенциалы течений комплексной переменной $z=x+iy$ для каждого из встречных потоков $-w_1$, w_2 обозначаются выражениями (6):

$$w_1(z)=f_1(z)=\varphi_1+i\psi_1\ ,\ w_2(z)=f_2(z)=\varphi_2+i\psi_2\,. \tag{6}$$

Здесь $f_1(z)$, φ_1,ψ_1, $f_2(z)$, φ_2,ψ_2 − функции комплексных перемененных их вещественные и мнимые части для первого и второго потоков соответственно. Вектор скорости каждого из потоков будет равен вектору, сопряженному производной от комплексной функции потока (7):

$$V_1=\overline{f}_1{}'(z),\ V_2=\overline{f}_2{}'(z). \tag{7}$$

Рассмотрим такие части течений, при которых функции (6) будут реализовывать конформные отображения области этих течений на две полосы (8) (рис. 5):

$$0<\psi_1<h_1,\ -h_2<\psi_2<0, \tag{8}$$

где h_1 и h_2 равны расходам в каждом из двух потоков (9):

$$h_1=V_1R,\ h_2=V_2r. \tag{9}$$

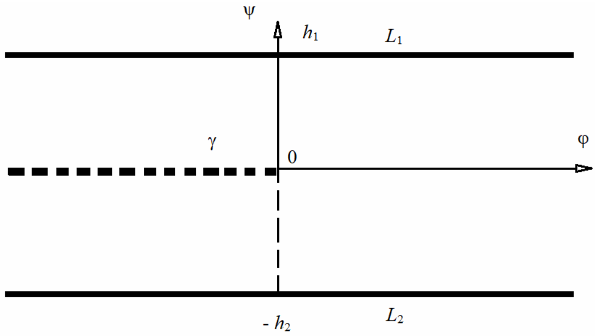

Рис. 5. Схема верхнего и нижнего течений

При этом вещественные постоянные могут быть выбраны таким образом, что точка $z=0$ (точка разветвления потоков) будет при обоих отображениях переходить в точку $w_1(z)=w_2(z)=0$. Задача заключается в том, что бы построить L_1, L_2, γ таким образом, чтобы при указанных отображениях вдоль линии L_1, переходящей в прямую $\psi=h_1$, выполнялось условие (10):

$$\left|\overline{f}_1{}'(z)\right|=V_1 \tag{10}$$

вдоль линии L_2, переходящей в прямую $\psi=-h_2$, выполнялось условие (11):

$$\left|\overline{f}_2{}'(z)\right|=V_2=\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}V_1 \tag{11}$$

вдоль поверхности γ, переходящей в положительную часть оси φ (12):

$$\left|\overline{f}_2{}'(z)\right|=\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\left|\overline{f}_2{}'(z)\right|=0\,. \tag{12}$$

В таких отображениях левая и правая часть оси x соответственно переходят в нижний и верхний края отрицательной части оси φ.

2.2. Осесимметричный трехмерный случай. Задача о соударении струй в трехмерном случае с осевой симметрией является более сложной. Если рассмотреть процесс (рис.4) как осевое сечение искомого потока, а через V как и прежде обозначить потенциал скоростей, то задача сводится к краевой задаче для системы уравнений [3, 6]:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}. \tag{14}$$

Здесь аналогично плоскому случаю в качестве независимой переменной можно взять комплексное число $w = \varphi + i\psi$, где φ и ψ соответственно вещественная и мнимые компоненты функции. Искомую функцию можно обозначить через $F + i\beta$, где $F = ln\ V$, а β – наклон линий тока.

Согласно теории квазиконформных отображений, функции F и β удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial F}{\partial\psi} = -y\frac{\partial\beta}{\partial\varphi} - y\ \mathrm{e}^{2F}\sin\beta, \tag{15}$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial\psi} = y\frac{\partial F}{\partial\varphi} + e^{F}\sin\beta. \tag{16}$$

Проблема интегрирования системы уравнений (15)-(16) в работе [6] сводится к вопросам квазиконформных отображений. Но система (15)-(16) не является принадлежащей к классу однородных эллиптических систем, где имеет место общая теорема существования и единственности квазиконформных отображений [3]. С целью упрощения поиска решения в работе [3] произведен переход от более общей нелинейной системы уравнений в частных производных (15)-(16), интегрирование которой требует применения численных методов, к системе линейных уравнений (13)-(14). Рассматривались отображения, соответствующие системе уравнений (13)-(14), множества полос $0 < y_0(x) < y < y_1(x)$ на полосу $0 < \psi < h$. При этом относительно функций $y_0(x), y_1(x)$ предполагалось, что они обладают тремя первыми ограниченными производными, причем выполняется неравенство $k_0 h < |y_1(x)\text{-}y_0(x)| < k_1 h$. Здесь k_0 и k_1 – некоторые вещественные константы, h – некоторое малое вещественное число. С помощью полученных аналитических решений выявлен ряд свойств моделируемого процесса.

1. Определена форма кривой к которой асимптотически приближаются линии L_1 и L_2, когда $x \to +\infty$.

2. Получены формулы аналитического решения, позволяющие определить ширину полосы пробивания.

3. Из существования асимптотического конуса и теоремы о постоянстве количества движения можно получить связь между диаметрами потоков, а также их плотностями и углом раствора конуса.

На основе аналитических решений, описывающих течения кумулятивных струй, были построены расчетные формулы теории пробивания.

3. Теория пробивания. В рамках теории движения пробивающей кумулятивной струи была разработана теория пробивания. Предполагается, что процесс пробивания может быть описан как процесс взаимодействия двух жидких цилиндрических стержней, ударяющихся соосно. При этом диаметр проникающей струи существенно меньше её длины. Для вывода уравнений теории пробивания применяются вариационные методы механики сплошной среды [7].

В теории пробивания выведены аналитические выражения, позволяющие оценить влияние плотности материала струи на скорость проникновения.

Аналитические выражения позволили определить, что если плотность струи и плотность пробиваемой поверхности одинаковы, то глубина пробития равна той длине струи, что израсходована на пробитие. Опираясь на расчетные выражения теории пробивания, возможно более тщательно исследовать процесс пробивания жидкой массы жидкой струей.

4. Теория формирования кумулятивной струи. Теория пробивания позволяет разработать теорию формирования кумулятивной струи. Так как на основе схемы соударения двух струй могут быть разработаны формулы расчетов параметров кумулятивной струи. Для этого течение, изображенное на рис.4, рассматривается в подвижной системе координат таким образом, чтобы асимптотический конус двигался по нормали к своей поверхности. С этой целью начало координат считается двигающимся со скоростью $V/cos\alpha$, где α − угол раствора конуса, в отрицательном направлении.

Теоретические результаты демонстрируют, что при величине $\alpha \to 0$ радиус струи стремится к нулю. Расчетные выражения также позволяют вычислить диаметр и скорость проволоки. Теория формирования кумулятивной струи также демонстрирует, что длина струи будет равна длине образующей конуса.

Используя полученные формулы теории кумулятивного пробивания, можно дать расчет первого приближения для работы произвольной металлической оболочки с произвольным распределением импульса для случая осевой симметрии [3].

5. Ограничения линейной теории. Теория первого приближения имеет экспериментальное подтверждение большим количеством физических экспериментов [3]. При этом существует ряд физических явлений не объяснимых с точки зрения линейной теории [3].

а) Согласно выводам теории кумуляции, чем меньше угол при вершине конуса, тем меньше диаметр струи и тем больше скорость струи. Таким образом уменьшая угол, можно теоретически получить, сколь угодно большие скорости, а в зоне образования струи, согласно закону Бернулли, давление определяется выражением – $p = C - \frac{\rho}{2} V^2$. Что означает возможность получить сколь угодно большие давления. Но данный теоретический вывод не был подтвержден экспериментально [3].

б) Процесс пробивания считается законченным, когда вся кумулятивная струя полностью теряет свою кинетическую энергию. Но в схеме идеальной жидкости полученное жидкостью движение будет продолжаться так, что диаметр отверстия будет неограниченно расти. Таким образом, теория кумулятивного пробивания, основанная на гидродинамической теории идеальной жидкости, не позволяет определить итоговый диаметр отверстия. Что приводит к необходимости моделирования течений в вязкоупругой среде [8].

в) Физические эксперименты выявили, что для конуса облицовки кумулятивного заряда, в зависимости от его геометрических параметров и химических свойств взрывчатого вещества, существует относительное расстояние заряда от пробиваемой поверхности, при котором получается наилучшее пробитие.

6. Расширение классической теории, позволяющие преодолеть ограничения классической теории. В классической теории кумуляции процесс моделируется на основе гидродинамики идеальной жидкости. Методика математического моделирования, основанная на моделях динамики идеальной жидкости, не позволяет учесть вязких напряжений в металле, находящемся в вязко-текучем состоянии [8]. Но предположение об идеальном течении кумулятивной струи позволяет применить хорошо развитую теорию потенциала плоского поля. При использовании математических моделей гидромеханики вязкой жидкости, необходимо было бы решать нелинейные системы уравнений в частных производных второго порядка [9]. Подобные системы в общем случае имеют только численное решение. Идеальная постановка задачи определялась тем, что во времена возникновения классической теории кумуляции, вычислительная техника была, не столь развита, чтобы решить численно задачу в вязкой постановке. Современная гидромеханика не испытывает таких трудностей с вычислительной техникой [9-13]. При этом вычислительная гидродинамика располагает численными алгоритмами, позволяющими построить оптимальные по затратам машинной памяти вычислительные процессы [9].

С точки зрения физики процесса кумуляции была бы более содержательна модель движения многофазной среды [11-13], включающей в себя жидкую и газообразную фазы, причем в подобной модели жидкость может описываться как вязкая среда [14-16]. Такое расширение учета физических эффектов в математической модели приводит к еще большему усложнению системы за счет увеличения числа уравнений и учета слагаемых, описывающих межфазное взаимодействие. Усложнение математической модели процесса делает еще более востребованным решение, основанное на методах вычислительной математики. Таким образом, благодаря развитию вычислительной техники и методов вычислительной математики большее внимание привлекает разработка математических моделей процесса кумуляции, основанной на численных алгоритмах.

Благодаря методам теории функций комплексного переменного, разработана математическая теория кумуляции, выявлены основные закономерности данного физического процесса, но уточнение и детализация этих закономерностей должна быть осуществлена методами вычислительной математики.

Выводы. В работе представлены основные результаты классической теории кумуляции, основанной на решении уравнений динамики стационарного потока идеальной жидкости методами комплексного анализа. Описана методология моделирования динамики пробивающей струи, также приведены методы математического моделирования процесса пробивания. Помимо теоретических результатов перечислены физические эффекты, выходящие за рамки теории приближения первого порядка, а также возможное расширение методологии теории кумуляции, позволяющее преодолеть ограничения линейной теории. Результаты и проблемы линейной теории кумуляции излагаются в такой последовательности, в какой они могут быть изложены в учебном курсе. Описанные в работе методы теории кумуляции могут быть использованы при разработке курсов дисциплин в учебных программах высшего специального образования по специальностям «Механика и математическое моделирование», «Прикладная математика».

Финансирование. Работа выполнялась в рамках государственного задания Федерального исследовательского центра Казанского научного центра Российской академии наук.

Список литературы

1. Тукмаков Д.А. Методика преподавания элементов динамики многокомпонентных и многофазных сред для специальности «Прикладная математика» // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2021. – № 9. – С.1-12.
2. Тукмаков Д.А. Аналитическая модель нестационарного течения несжимаемой монодисперсной газовзвеси с одномерной геометрией потока // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2021. – № 3. – С. 57-70.
3. Лаврентьев М.А. Избранные труды. Математика и механика. – М.: Наука, 1990. – 600 с.
4. Поздняков З.Г., Росси Б.Д. Справочник по промышленным взрывчатым веществам и средствам взрывания. – Москва: «Недра», 1977. – 253 с.
5. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. – М.: Наука, 1979. – 536 с.
6. Белинский П.П. Общие свойства квазиконформных отображений. – М.: Наука. 1974. – 100 с.
7. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. – М.: Наука, 1983. – 447 с.
8. Огибалов П.М., Мирзаданзаде А.Х. Нестационарные движения вязкопластичных сред. – М.: МГУ им. М.В.Ломоносова, 1970. – 415 с.
9. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2-х томах: Т. 1: Пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 504 с.
10. Кедринский В.К. Гидродинамика взрыва: эксперимент и модели. – Новосибирск: Издательство СО РАН, 2000. – 435 с.
11. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. – М.: Наука, 1978. – 336 с.
12. Кутушев А.Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах. – СПб.: Недра, 2003. – 284 с.
13. Тукмаков А.Л., Тонконог В.Г. Численное моделирование вскипающих потоков в каналах переменного сечения. – Казань: Печать-Сервис, 2012. – 114 с.
14. Тукмаков Д.А. Влияние учета межкомпонентного взаимодействия на параметры течения газа при математическом моделировании истечения газовзвеси в вакуум // Вестник Российского нового университета. Серия: Сложные системы: модели, анализ и управление. – 2020. – № 3. – С. 51-59.
15. Тукмаков Д.А., Ахунов А.А. Численное исследование распространения ударной волны малой интенсивности из чистого газа в электрически заряженную запылённую среду // Чебышевский сборник. – 2020. – Т. 21, №4. – С. 360-372.
16. Тукмаков А.Л. , Тукмаков Д.А. Численное исследование влияния параметров дисперсных частиц на осаждение твердой фазы электрически заряженной полидисперсной газовзвеси // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2022. – Т. 22, № 1. – С. 90-102.

Сведения об авторе:

Тукмаков Дмитрий Алексеевич – к.ф.-м.н., научный сотрудник лаборатории механики сплошной среды.