

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПИЧЕСКОГО МАЯТНИКА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ

*Сарвилов К.Н.<sup>1</sup>, Смирнов А.С.<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>*Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
Санкт-Петербург;*

<sup>2</sup>*Институт проблем машиноведения Российской академии наук,  
Санкт-Петербург*

**Ключевые слова:** гироскопический маятник, карданов подвес, управляющие моменты, численное интегрирование.

**Аннотация.** В статье осуществляется численное интегрирование уравнений управляемого движения гироскопического маятника в кардановом подвесе. Обсуждаются шесть вариантов формирования управляющих воздействий, приводящих к различным конечным целям, и для них строятся графики зависимости ключевых величин от времени. Найденные результаты интересны для механики маятниковых конструкций и гироскопической техники.

## NUMERICAL SIMULATION OF CONTROLLED MOTION PROCESSES OF A GYROSCOPIC PENDULUM IN A GIMBAL SUSPENSION

*Sarvilov K.N., Smirnov A.S.*

*Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University, Saint-Petersburg;  
Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences,  
Saint-Petersburg*

**Keywords:** gyroscopic pendulum, gimbal suspension, control torques, numerical integration.

**Abstract.** The paper carries out the numerical integration of the equations of controlled motion of a gyroscopic pendulum in a gimbal suspension. Six options for the formation of control actions leading to various final goals are discussed, and graphs of the dependence of key quantities on time are plotted for them. The results found are of interest for the mechanics of pendulum structures and gyroscopic technology.

Гироскопический маятник (или маятник Лагранжа) является одной из наиболее известных твердотельных маятниковых систем, и исследование его динамического поведения представляет не только теоретический интерес, но и важное практическое значение, что подтверждается многими трудами [1-3]. Особое внимание привлекают задачи управления движением этой системы, где требуется формировать рациональные управляющие воздействия, позволяющие достичь различных целей. В качестве таких целей могут выступать, например, полное или частичное гашение движений системы, а также ее выведение на какой-либо желаемый режим движения [4, 5]. Настоящая работа относится к этому направлению, и в ней обсуждаются вопросы численного моделирования процессов управляемого движения гироскопического маятника в кардановом подвесе под действием управляющих моментов в трех шарнирах этого подвеса.

Рассмотрим гироскопический маятник в кардановом подвесе, который представляет собой тяжелое симметричное твердое тело с неподвижной точкой

$O$ . Положим, что оно обладает массой  $m$  и моментами инерции  $A$ ,  $A$  и  $C$  относительно главных осей 123, проходящих через точку  $O$ , а расстояние от нее до центра масс твердого тела будем считать равным  $l$  (рис. 1, а). Отклоненное положение системы определяется тремя кардановыми углами  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  (рис. 1, б).

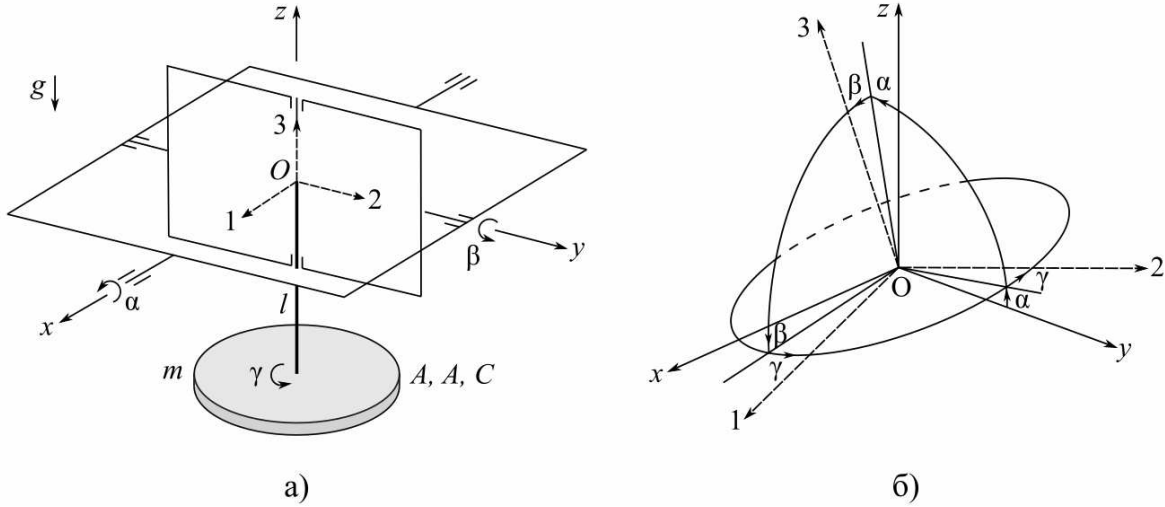


Рис. 1. Расчетная схема гироскопического маятника:

а) устройство карданова подвеса, б) кардановы углы и последовательность поворотов, переводящая неподвижные оси  $xuz$  в оси 123, связанные с телом

Уравнения управляемого движения гироскопического маятника под действием управляющих моментов  $M_\alpha$ ,  $M_\beta$  и  $M_\gamma$  в трех шарнирах карданова подвеса были получены в работе [4]. Для того чтобы приспособить их к численному интегрированию, введем в рассмотрение следующие величины:

$$k = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \tau = kt, \quad a = \frac{A}{ml^2}, \quad c = \frac{C}{ml^2}, \quad \mu_\alpha = \frac{M_\alpha}{mgl}, \quad \mu_\beta = \frac{M_\beta}{mgl}, \quad \mu_\gamma = \frac{M_\gamma}{mgl}. \quad (1)$$

Здесь  $k = \sqrt{g/l}$  – частота малых колебаний обычного математического маятника длиной  $l$ , необходимая для дальнейшего обезразмеривания;  $\tau$  – безразмерное время;  $a$  и  $c$  – безразмерные моменты инерции; а  $\mu_\alpha$ ,  $\mu_\beta$  и  $\mu_\gamma$  – обезразмеренные управляющие моменты. Тогда уравнения управляемого движения из работы [4] можно записать в виде одного матричного уравнения:

$$\mathbf{a}_0(\mathbf{q})\mathbf{q}'' + \mathbf{b}_0(\mathbf{q}, \mathbf{q}') + \mathbf{c}_0(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{q}, \mathbf{q}'). \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{q} = [\alpha, \beta, \gamma]^T$  – столбец обобщенных координат; штрихом обозначается производная по безразмерному времени  $\tau$ :  $(\quad)' = d/d\tau$ ;  $\mathbf{a}_0(\mathbf{q})$  – симметричная ( $\mathbf{a}_0^T = \mathbf{a}_0$ ) матрица кинетической энергии в безразмерном виде:

$$\mathbf{a}_0(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} a \cos^2 \beta + c \sin^2 \beta & 0 & c \sin \beta \\ 0 & a & 0 \\ c \sin \beta & 0 & c \end{bmatrix}; \quad (3)$$

столбцы  $\mathbf{b}_0(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$  и  $\mathbf{c}_0(\mathbf{q})$  имеют следующий вид:

$$\mathbf{b}_0(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \begin{bmatrix} 2(c-a)\cos\beta\sin\beta\alpha'\beta' + c\cos\beta\gamma'\beta' \\ a\cos\beta\sin\beta\alpha'^2 - c\cos\beta(\gamma' + \alpha'\sin\beta)\alpha' \\ c\cos\beta\alpha'\beta' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_0(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\beta\cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

причем  $\mathbf{c}_0(\mathbf{q})$  представляет собой столбец, отвечающий потенциальной энергии силы тяжести; и, наконец,  $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = [\mu_\alpha, \mu_\beta, \mu_\gamma]^T$  – столбец управляющих моментов в безразмерном варианте, которые формируются по принципу обратной связи как функции переменных состояния  $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ .

Поскольку матрица  $\mathbf{a}_0$  является невырожденной, то матричное уравнение (2) можно разрешить относительно столбца обобщенных ускорений:

$$\mathbf{q}'' = \mathbf{a}_0^{-1}(\mathbf{q})[\boldsymbol{\mu}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') - \mathbf{b}_0(\mathbf{q}, \mathbf{q}') - \mathbf{c}_0(\mathbf{q})]. \quad (5)$$

В результате мы будем иметь выражения для элементов столбца обобщенных ускорений  $\mathbf{q}'' = [\alpha'', \beta'', \gamma'']^T$  как функций переменных состояния, т. е.

$$\alpha'' = g_1(\mathbf{q}, \mathbf{q}'), \quad \beta'' = g_2(\mathbf{q}, \mathbf{q}'), \quad \gamma'' = g_3(\mathbf{q}, \mathbf{q}'). \quad (6)$$

Введем теперь столбец переменных состояния  $\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6]^T$ , где  $y_1 = \alpha, \quad y_2 = \alpha', \quad y_3 = \beta, \quad y_4 = \beta', \quad y_5 = \gamma, \quad y_6 = \gamma'$ .

$$y_1 = \alpha, \quad y_2 = \alpha', \quad y_3 = \beta, \quad y_4 = \beta', \quad y_5 = \gamma, \quad y_6 = \gamma'. \quad (7)$$

Принимая во внимание, что  $\mathbf{q} = [\alpha, \beta, \gamma]^T$ , а  $\mathbf{q}' = [\alpha', \beta', \gamma']^T$ , можно переписать соотношения (6) в следующем виде:

$$\alpha'' = G_2(\mathbf{y}), \quad \beta'' = G_4(\mathbf{y}), \quad \gamma'' = G_6(\mathbf{y}). \quad (8)$$

Кроме того, для удобства введем обозначения:

$$G_1(\mathbf{y}) = y_2, \quad G_3(\mathbf{y}) = y_4, \quad G_5(\mathbf{y}) = y_6. \quad (9)$$

Таким образом, уравнения управляемого движения гироскопического маятника с учетом формул (7)-(9) можно переписать в виде системы шести дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} y_1' = G_1(\mathbf{y}), \\ y_2' = G_2(\mathbf{y}), \\ y_3' = G_3(\mathbf{y}), \\ y_4' = G_4(\mathbf{y}), \\ y_5' = G_5(\mathbf{y}), \\ y_6' = G_6(\mathbf{y}), \end{cases} \quad (10)$$

т.е. в нормальной форме Коши, с которой и работают встроенные процедуры численного интегрирования в программных комплексах. В краткой матричной форме система уравнений (10) записывается в следующем виде:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{G}(\mathbf{y}), \quad (11)$$

где введено обозначение:  $\mathbf{G}(\mathbf{y}) = [G_1(\mathbf{y}), G_2(\mathbf{y}), G_3(\mathbf{y}), G_4(\mathbf{y}), G_5(\mathbf{y}), G_6(\mathbf{y})]^T$  – столбец правых частей уравнений (10). Остается лишь задать для уравнения (11) начальные условия движения  $\mathbf{y}_0 = [y_{10}, y_{20}, y_{30}, y_{40}, y_{50}, y_{60}]^T$  при  $\tau = 0$ , где

$$y_{10} = \alpha_0, \quad y_{20} = \alpha'_0, \quad y_{30} = \beta_0, \quad y_{40} = \beta'_0, \quad y_{50} = \gamma_0, \quad y_{60} = \gamma'_0. \quad (12)$$

В работе [4] также были получены выражения для ключевых величин, отражающих динамическое поведение системы:  $E$  (полная механическая энергия),  $p$  (момент количества движения относительно вертикальной оси  $z$ ) и  $\omega_3$  (проекция вектора угловой скорости на ось симметрии  $3$ ). Обезразмерим их так, как показано далее, принимая во внимание обозначения (1):

$$f_1 = \frac{E}{mgl} = \frac{1}{2}a(\alpha'^2 \cos^2 \beta + \beta'^2) + \frac{1}{2}c(\gamma' + \alpha' \sin \beta)^2 + 1 - \cos \alpha \cos \beta, \quad (13)$$

$$f_2 = \frac{P}{ml^2k} = a(\beta' \sin \alpha - \alpha' \cos \beta \sin \beta \cos \alpha) + c(\gamma' + \alpha' \sin \beta) \cos \alpha \cos \beta, \quad (14)$$

$$f_3 = \frac{\omega_3}{k} = \gamma' + \alpha' \sin \beta. \quad (15)$$

Перейдем теперь к численному интегрированию уравнений движения (10) при различном выборе безразмерных управляющих моментов  $\mu_\alpha$ ,  $\mu_\beta$  и  $\mu_\gamma$  в зависимости от переменных состояния, опираясь на работу [4]. Отметим, что качественное исследование режимов управляемого движения, которые будут рассматриваться ниже, детально проведено в работе [5], а в настоящей статье для них будет дана графическая иллюстрация на базе численного исследования. Для этого следует задать значения величин  $a$  и  $c$ , а также начальные условия движения  $\alpha_0$ ,  $\alpha'_0$ ,  $\beta_0$ ,  $\beta'_0$ ,  $\gamma_0$ ,  $\gamma'_0$  при  $\tau = 0$ . Во всех вариантах управления мы ограничимся построением зависимостей функций  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  от  $\tau$  согласно (13), (14) и (15) для одного фиксированного набора указанных выше величин.

1. В первом режиме управляющие моменты выбираются по формулам:

$$\mu_\alpha = -v \left[ (a \cos^2 \beta + c \sin^2 \beta) \alpha' + c \gamma' \sin \beta \right], \quad \mu_\beta = -va\beta', \quad \mu_\gamma = -vc(\gamma' + \alpha' \sin \beta), \quad (16)$$

где  $v$  здесь и далее – постоянный положительный безразмерный коэффициент. По рисунку 2, а видно, что величины  $f_1$ ,  $f_2$  и  $f_3$  с течением времени снижаются до нуля, и в конечном счете происходит полное гашение движений системы.

2. Во втором режиме примем управляющие моменты в следующем виде:

$$\mu_\alpha = -vc(\gamma' + \alpha' \sin \beta) \sin \beta, \quad \mu_\beta = 0, \quad \mu_\gamma = -vc(\gamma' + \alpha' \sin \beta). \quad (17)$$

Из рисунка 2, б ясно, что здесь величина  $f_1$  убывает, но не до нуля, а с течением времени она выходит на некоторое ненулевое значение. При этом величина  $f_2$  также стремится к ненулевому значению, и, наконец, величина  $f_3$  снижается до нуля. Отметим, что в данной ситуации с течением времени происходит выход на режим движения, аналогичный колебаниям сферического маятника.

3. В третьем режиме моменты в шарнирах подвеса примем следующими:

$$\mu_\alpha = -v \left[ (a \cos^2 \beta + c \sin^2 \beta) \alpha' + c \gamma' \sin \beta \right], \quad \mu_\beta = 0, \quad \mu_\gamma = -vc(\gamma' + \alpha' \sin \beta). \quad (18)$$

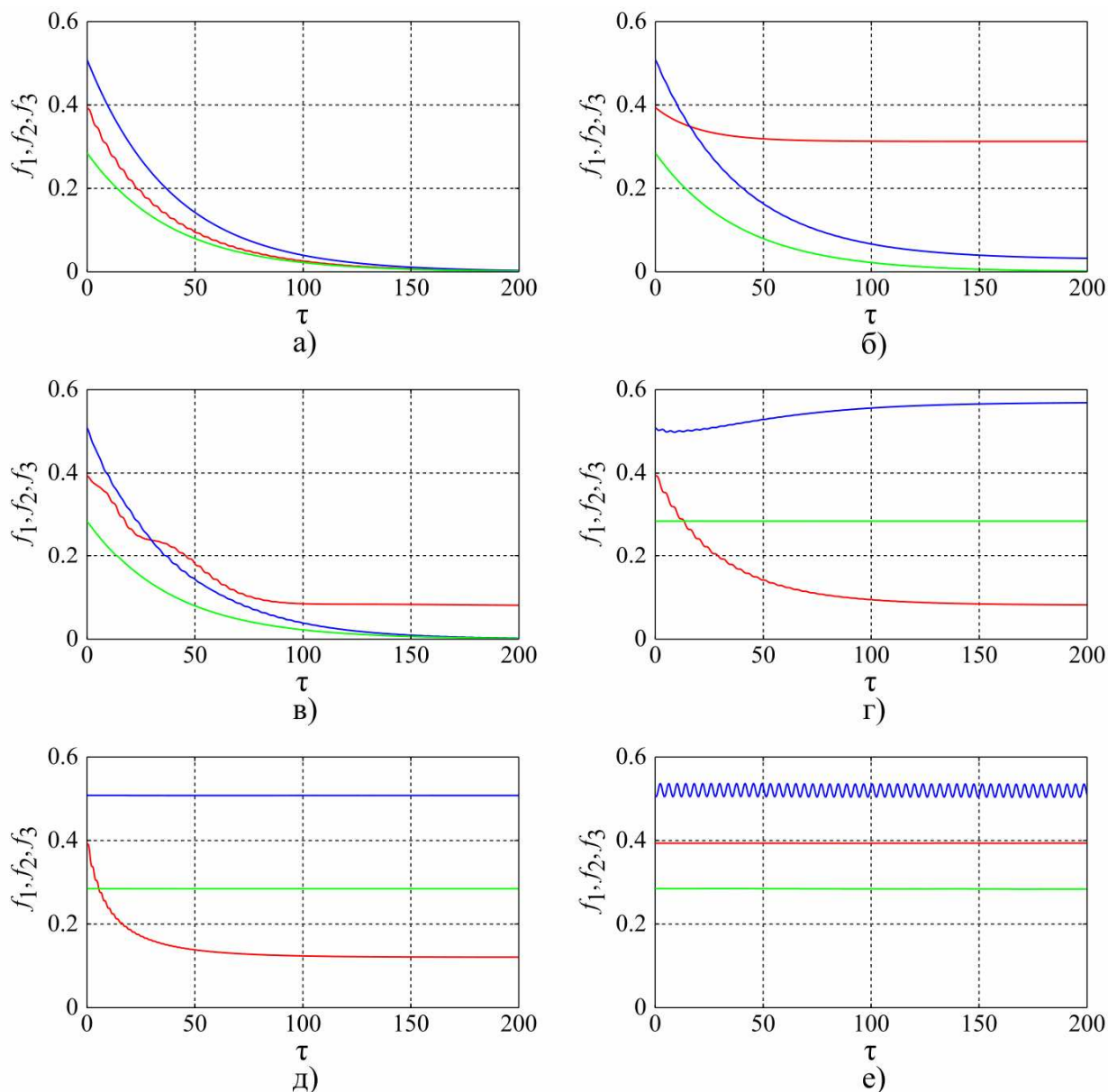


Рис. 2. Графики зависимости величин  $f_1$  (красный цвет),  $f_2$  (синий цвет) и  $f_3$  (зеленый цвет) от безразмерного времени  $\tau$ : а) в режиме 1, б) в режиме 2, в) в режиме 3, г) в режиме 4, д) в режиме 5, е) в режиме 6

Из рисунка 2, в видно, что величина  $f_1$  убывает, стремясь к ненулевому значению, величина  $f_2$  теперь стремится к нулю, а величина  $f_3$  по-прежнему убывает до нуля. В результате будет происходить выход движений системы на режим плоских колебаний подобно физическому маятнику.

4. В рамках четвертого режима управляющие воздействия имеют вид:

$$\mu_\alpha = -v\alpha', \quad \mu_\beta = -v\beta', \quad \mu_\gamma = 0. \quad (19)$$

По рисунку 2, г можно видеть, что величина  $f_1$  вновь убывает, но до ненулевого уровня, причем к ненулевому значению стремится и величина  $f_2$ . Наконец, величина  $f_3$  остается постоянной в течение всего времени движения. В этом случае конечным режимом движения будет вращение гироскопического маятника вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью.

5. В пятом режиме управляемого движения шарнирные моменты есть:

$$\begin{aligned}\mu_\alpha &= -v(\sin \alpha \cos \beta \alpha' + \sin \beta \cos \alpha \beta') \sin \alpha \cos \beta, \\ \mu_\beta &= -v(\sin \alpha \cos \beta \alpha' + \sin \beta \cos \alpha \beta') \sin \beta \cos \alpha, \quad \mu_\gamma = 0.\end{aligned}\quad (20)$$

По рисунку 2, д видно, что величина  $f_1$  убывает, стремясь к ненулевому значению, а величины  $f_2$  и  $f_3$  остаются постоянными. Конечным режимом движения является конический режим, т. к. на нем прекращается рассеивание энергии.

б. Наконец, в шестом режиме управляющие воздействия примем в виде:

$$\mu_\alpha = \eta \beta' \cos \beta, \quad \mu_\beta = -\eta \alpha' \cos \beta, \quad \mu_\gamma = 0, \quad (21)$$

где  $\eta$  – постоянный безразмерный коэффициент любого знака. Из рисунка 2, е видно, что здесь величины  $f_1$  и  $f_3$  постоянны, тогда как величина  $f_2$  обладает немонотонным характером во времени. В этой ситуации гироскопический маятник находится в режиме вынужденного консервативного движения.

Следует отметить, что численное интегрирование уравнений движения (10) осуществлялось в программном комплексе MATLAB с использованием метода численного интегрирования ode113, который реализует метод Адамса.

Изучая результаты, найденные с помощью численного интегрирования уравнений движения системы при различном выборе управляющих моментов, можно заключить, что они полностью подтверждают выводы, сделанные ранее аналитическим путем в работе [5]. Приведенная серия графиков дополняет качественную картину поведения управляемого гироскопического маятника, а выполненные построения могут быть полезными в дальнейших исследованиях.

### Список литературы

1. Лунц Я.Л. Введение в теорию гироскопов. – М.: Наука, 1972. – 296 с.
2. Магнус К. Гироскоп, теория и применение. – М.: Мир, 1974. – 526 с.
3. Меркин Д.Р., Смольников Б.А. Прикладные задачи динамики твердого тела. – СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, 2003. – 536 с.
4. Сарвилов К.Н., Смирнов А.С. Физические принципы формирования управляющих воздействий в задаче о гироскопическом маятнике // Молодежь и наука: актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований. Материалы VI Всероссийской национальной научной конференции молодых ученых. – Комсомольск-на-Амуре: КнАГУ, 2023. – Ч. 2. – С. 498-502.
5. Smirnov A., Sarvilov K. Controlled motion modes of a gyroscopic pendulum in a gimbal suspension // Cybernetics and Physics. 2023, vol. 12, no. 3, pp. 207-218. doi.org/10.35470/2226-4116-2023-12-3-207-218.

### Сведения об авторах:

*Сарвилов Константин Николаевич* – магистрант;

*Смирнов Алексей Сергеевич* – ассистент Высшей школы механики и процессов управления, младший научный сотрудник Лаборатории мехатроники.