

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОГО ТЕЛА СО СВЯЗЯМИ

Орлянская Т.И.

*Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет), Москва*

Ключевые слова: материальное тело, среда, взаимодействие, силы, связи, реакции связей, инерциальная система отсчета, неинерциальная система отсчета, абсолютное движение, относительное движение.

Аннотация. В статье рассматривается составление уравнений динамики с учетом взаимодействия материального тела с другими материальными телами и средой. В связи с этим, в общем анализируются все возможные взаимодействия в механике и выявляется характер, возникающих при этом сил. На простейшем примере рассматривается составление уравнений динамики абсолютного и относительного движений. Сопоставляются условия относительного равновесия с абсолютным. Выявляется, что движение материальных тел в относительном пространстве так же, как и в абсолютном, вызывается одними и теми же физическими силами.

DYNAMICS OF A MATERIAL BODY WITH CONNECTIONS

Orlyanskaya T.I.

Bauman Moscow State Technical University, Moscow

Keywords: material body, environment, interaction, forces, connections, reaction of connections, inertial reference frame, non-inertial reference frame, absolute motion, relative motion.

Abstract. The article discusses the compilation of dynamic equations considering the interaction of a material body with other material bodies and the environment. In this regard, in general, all possible interactions in mechanics are analyzed and the nature of the forces arising in this case is revealed. Using a simple example, we consider the compilation of equations for the dynamics of absolute and relative motions. The conditions of relative equilibrium are compared with absolute. It is revealed that the movement of material bodies in relative space, as well as in absolute space, is caused by the same physical forces.

Известно, что материальные тела в процессе движения взаимодействуют друг с другом и средой. В механике нас интересуют механические взаимодействия материальных тел, которые проявляются в тяготении друг к другу, взаимном сопротивлении и трении. Количественно мерой интенсивности и направленности механического взаимодействия являются силы.

При взаимодействии материальных тел со средой возникают силы тяготения, которые сообщают материальным телам ускорения, которые подчиняются второму закону Ньютона

$$m\bar{a} = \bar{F},$$

где m – масса тела, \bar{a} – абсолютное ускорение, которое сообщается материальному телу под действием силы \bar{F} , которая возникает при взаимодействии материального тела со средой.

Например, при взаимодействии материальных тел с гравитационным полем Земли, у материальных тел возникают силы притяжения к Земле, называемые

силами тяжести. Эти силы сообщают телам ускорения свободного падения $g = 9,82 \text{ м/с}^2$ [1].

В случае, когда среда создает сопротивление движению материальных тел, возникают силы аэро- и гидродинамического сопротивления.

При взаимодействии материальных тел друг с другом различают контактные и бесконтактные взаимодействия.

При бесконтактном взаимодействии материальных тел друг с другом возникают силы тяготения. Эти силы сообщают телам ускорения, которые зависят от относительного положения и относительных скоростей движения, взаимодействующих тел.

В случае контактного взаимодействия материальных тел, между ними возникает механическая связь. Механическая связь — это одно материальное тело или система материальных тел, которые ограничивают положение и движение контактирующих тел в пространстве.

Взаимодействие предполагает наличие двух тел. Одно тело называем данным телом, второе – сторонним телом. Наличие механической связи между взаимодействующими, т.е. контактирующими телами позволяет данное тело по отношению к стороннему рассматривать как «присоединенную массу» в случае, если механическая связь стационарная и как «присоединенную подвижную массу» в случае нестационарной механической связи.

В этом случае взаимодействие материальных тел друг с другом становится с начала в чем-то похожим на взаимодействие материального тела со средой. Со стороны стороннего тела на данное материальное тело действует сила

$$\bar{F}_1 = m\bar{a}_e,$$

где m – масса данного тела, \bar{a}_e – абсолютное ускорение движения стороннего тела в пространстве. Одновременно данное тело противодействует стороннему телу, создавая силу

$$\bar{F}_2 = -\bar{F}_1 = -m\bar{a}_e.$$

Сила \bar{F}_2 является ньютоновской силой инерции, приложена она к стороннему телу, которое сообщает данному телу ускорение \bar{a}_e . Ньютоновская сила инерции относится к классу физических сил [2].

Силы \bar{F}_1 и \bar{F}_2 являются внутренними силами взаимодействия между контактирующими телами и не оказывают влияние на их совместное движение в пространстве.

На положение и движение контактирующих тел в пространстве оказывают влияние связи. Любая связь, создавая ограничение на положение и движение контактирующих тел, действует на них с силами сопротивления движению.

Согласно классификации механических связей в механике различают голономные и неголономные связи, геометрические и кинематические, стационарные и нестационарные, удерживающие и не удерживающие [3]. Эти связи аналитически описываются уравнениями связей, которые учитываются при составлении уравнений динамики материальных тел со связями.

В рассматриваемом случае, помимо механической связи между контактирующими телами, есть еще и динамическое взаимодействие.

Динамическое взаимодействие обусловлено ускоренным движением стороннего тела. Динамическое взаимодействие тоже связь, а, следовательно, и оно создает сопротивление движению контактирующих тел в пространстве. На контактирующие тела действуют силы сопротивления движению, называемые динамическими реакциями.

На данное тело действует динамическая реакция, определяемая выражением

$$\bar{R}_e = -m\bar{a}_e.$$

Эта сила по модулю равна силе инерции, но таковой не является. Это физическая сила, так как является результатом природных взаимодействий между материальными телами.

Таким образом, динамическое взаимодействие контактирующих тел приводит к изменению движения данного тела в пространстве.

Задача о составлении уравнения динамики сводится к задаче о нахождении ускорения данного тела. Ускорение тела вызывается силами. Силы обусловлены действием на данное тело каких-либо других тел.

Задача о нахождении ускорения разделяется на две отдельные задачи:

1. определение сил, действующих на данное тело со стороны других тел;
2. составление уравнения динамики движения данного тела в соответствии со вторым и четвертым законами Ньютона.

Рассматриваем составление уравнений динамики на примере решения задачи.

Задача. Груз 1 массой m спускается вниз по гладкой боковой грани призмы 2, расположенной под углом α к горизонту. Призма движется по горизонтальной плоскости вправо с ускорением \bar{a}_e . Определить: 1) ускорение груза по отношению к призме; 2) абсолютное ускорение движения груза.

Решение. Вводим в рассмотрение две системы координат: $O_1x_1y_1$ – неподвижную (инерциальную); Oxy – подвижную (неинерциальную) жестко связанную с призмой (рис. 1). Верхнюю точку O боковой грани призмы принимаем за начало подвижной системы координат. Ось Ox направляем по боковой грани вниз. Ось Oy – перпендикулярно оси Ox . Положение груза на боковой грани определяем координатой x .

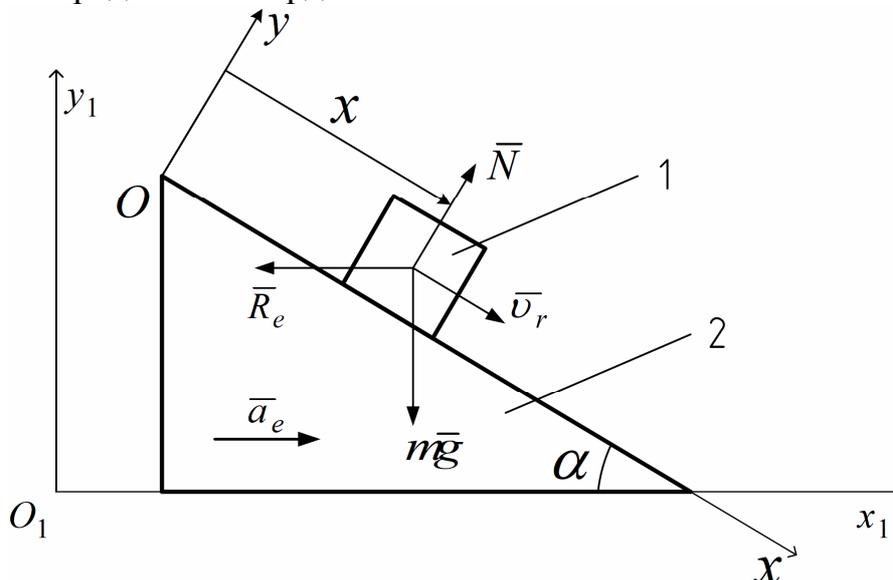


Рис. 1. К составлению уравнений динамики движения груза

Между грузом и призмой геометрическая нестационарная связь – груз скользит по боковой грани призмы. Уравнение связи в подвижной системе координат имеет вид: $y = 0$.

Определяем силы, действующие на груз: $m\bar{g}$ – сила тяжести; \bar{N} – нормальная реакция боковой грани; \bar{R}_e – динамическая реакция призмы, которая движется с ускорением \bar{a}_e , $\bar{R}_e = -m\bar{a}_e$.

Движение груза по боковой грани призмы определяется действием трех сил: $m\bar{g}, \bar{N}, \bar{R}_e$.

Составляем уравнение динамики относительного движения груза в соответствии со вторым и четвертым законами Ньютона

$$m\bar{a}_r = m\bar{g} + \bar{N} + \bar{R}_e, \quad (1)$$

где \bar{a}_r – относительное ускорение движения груза.

В проекциях на подвижные оси уравнение (1) имеет вид

$$x: ma_r = mg \sin \alpha - R_e \cos \alpha, \quad (2)$$

$$y: 0 = -mg \cos \alpha - R_e \sin \alpha + N. \quad (3)$$

Принимая во внимание, что $R_e = ma_e$, получаем уравнение (2) в виде

$$ma_r = mg \sin \alpha - ma_e \cos \alpha,$$

откуда

$$a_r = g \sin \alpha - a_e \cos \alpha.$$

В случае относительного равновесия, т.е. когда $a_r = 0$, получаем

$$a_e = \frac{g \sin \alpha}{\cos \alpha} = g \tan \alpha.$$

Это то ускорение призмы, при котором при заданном угле α груз будет оставаться в покое, если в начальный момент времени относительная скорость движения груза v_r была равна нулю.

Составляем уравнение динамики абсолютного движения груза.

Движение груза в абсолютном пространстве также определяется действием трех сил: $m\bar{g}, \bar{N}, \bar{R}_e$.

В соответствии со вторым и четвертым законами Ньютона получаем уравнение динамики абсолютного движения груза

$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{N} + \bar{R}_e, \quad (4)$$

где \bar{a} – абсолютное ускорение движения груза.

В проекциях на неподвижные оси уравнение (4) имеет вид

$$x_1: ma_x = N \sin \alpha - R_e, \quad (5)$$

$$y_1: ma_y = -mg + N \cos \alpha. \quad (6)$$

Принимая во внимание, что $R_e = ma_e$; $N = mg \cos \alpha + ma_e \sin \alpha$, получаем уравнения (5) и (6) в виде

$$ma_x = (mg \cos \alpha + ma_e \sin \alpha) \sin \alpha - ma_e,$$

$$ma_y = -mg + (mg \cos \alpha + ma_e \sin \alpha) \cos \alpha,$$

откуда

$$a_x = g \sin \alpha \cos \alpha + a_e \sin^2 \alpha - a_e = g \sin \alpha \cos \alpha - a_e (1 - \sin^2 \alpha) = \\ = g \sin \alpha \cos \alpha - a_e \cos \alpha = (g \sin \alpha - a_e) \cos \alpha = a_r \cos \alpha.$$

Аналогично, получаем

$$a_y = -a_r \sin \alpha$$

Полное значение абсолютного ускорения находим по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(a_r \cos \alpha)^2 + (-a_r \sin \alpha)^2} = a_r$$

В случае абсолютного равновесия необходимо, чтобы $\bar{a} = 0$, т.е. $a_x = a_r \cos \alpha = 0$; $a_y = -a_r \sin \alpha = 0$. Последние два равенства выполняются только в том случае, когда $a_r = 0$, т.е. когда $a_e = g \tan \alpha$.

Заключение

При составлении уравнений динамики материального тела со связями с учетом его взаимодействия с другими материальными телами получаем:

– уравнения динамики относительного и абсолютного движения тождественными;

– условия относительного и абсолютного равновесия одинаковыми.

Из чего следует вывод о том, что движение материальных тел в относительном и абсолютном пространствах вызывается одними и теми же физическими силами.

Статья может быть полезна преподавателям, студентам, аспирантам и даже школьникам при изучении механики, чтобы понять, как составляются уравнения динамики движения материального тела со связями.

Список литературы

1. Иродов И.Е. Механика. Основные законы. – 10-е изд., – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 309 с.
2. Ишлинский А.Ю. Классическая механика и силы инерции. – М.: Наука, 1987. – 320 с.
3. Дронг В.И., Дубинин В.В., Ильин М.М. и др. Курс теоретической механики: учебник для вузов / Под ред. К.С. Колесникова, В.В. Дубинина. – 5-е изд. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. – 580 с.

Сведения об авторе:

Орлянская Тамара Ивановна – к.т.н., доцент кафедры ФН-3 «Теоретическая механика».