

ОПТИМАЛЬНОЕ ПЕРЕНОСНОЕ ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ОБЪЕКТА С УЧЕТОМ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Бохонский А.И.¹, Варминская Н.И.²

¹*Севастопольский государственный университет, Севастополь;*

²*Черноморское высшее военно-морское училище имени П.С. Нахимова,
Севастополь*

Ключевые слова: оптимальное управление, универсальные аналитические зависимости, частные случаи управлений, учет сопротивлений, экономия энергии.

Аннотация. На простом примере системы с одной степенью свободы показано, что снижение энергии при росте степени полинома ускорения (управления) наблюдается не только без учета сопротивления движению, но и при его учете в виде линейно-вязкого и сухого трения. Численные примеры приведены для двух управлений – классического и реверсионно конструируемого. Также управления являются частными случаями, которые появляются из универсальной аналитической зависимости при задании степени полинома управления (переносного ускорения).

OBJECT OPTIMAL TRANSLATIONAL MOTION TAKING INTO ACCOUNT RESISTANCE

Bokhonsky A.I.¹, Varminskaya N.I.²

¹*Sevastopol State University, Sevastopol;*

²*P.S. Nakhimov Black Sea Higher Naval School, Sevastopol*

Keywords: optimal control, universal analytical dependencies, special cases of controls, taking into account resistances, energy saving.

Abstract. A simple example of a system with one degree of freedom shows that a decrease in energy with an increase in the degree of the acceleration (control) polynomial is observed not only without taking into account the resistance to motion, but also when taking it into account the linear-viscous and dry friction. Numerical examples are given for two controls – classical and reversively constructed. Also, controls are special cases that appear from a universal analytical dependence when specifying the degree of the control polynomial (translational acceleration).

Введение

Теории оптимального управления движением объектов посвящены работы [1-11] и другие. Решение обратных задач динамики линейных и нелинейных систем дано в монографиях [2, 3].

Исследование конструирования оптимальных управлений содержится в [12-20]. В ряде публикаций показано, что при увеличении степени полинома управления (переносного ускорения) наблюдается снижение энергии для достижения поставленной цели оптимального управляемого движения, но сопротивление движению, как правило, не учитывалось. Остается актуальной задача оценки энергии при использовании реверсионно конструируемых управлений с учетом линейно-вязкого и сухого трения.

Конструируемое реверсионно (решение полной обратной задачи вариационного исчисления) управление движением объекта с учетом линейно-

вязкого сопротивления в рассматриваемом случае описывается наиболее простым уравнением:

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} = U_1(t) - k \frac{dS}{dt}, \quad (1)$$

где m – масса объекта; k – коэффициент линейно-вязкого сопротивления; $U_1(t)$ – управление с учетом сопротивления. Из (1) при $m = 1$ кг следует управление:

$$U_1(t) = \frac{d^2 S}{dt^2} + k \frac{dS}{dt}. \quad (2)$$

При конструировании управлений согласно реверсионному принципу оптимальности (РПО) после аналитических экспериментов и обобщений выявлены универсальные аналитические зависимости:

$$S(t) = \frac{L}{2T(n+1)} \cdot \left(\frac{(T-2t)^{n+2}}{T^{n+1}} + 2nt + 4t - T \right),$$

$$V(t) = \frac{dS(t)}{dt} = \frac{L(n+2)}{T(n+1)} \cdot \left(1 - \left(\frac{T-2t}{T} \right)^{n+1} \right), \quad (3)$$

$$U(t) = \frac{dV(t)}{dt} = \frac{L(2n+4)}{T^{n+2}} \cdot (T-2t)^n.$$

В выражениях (3) принято: L – максимальное перемещение; T – общее время движения; n – нечетная степень полинома ($n = 1, 3, 5, 7, \dots$).

Характерной особенностью аналитических зависимостей (3) является случай (при $n = 1$), который представляет собой классическое управление при квадратичном критерии оптимальности (задача Лагранжа):

$$U(t) = \frac{6L}{T^2} \cdot \left(\frac{T-2t}{T} \right), V(t) = \frac{3L}{2T} \cdot \left(1 - \left(\frac{T-2t}{T} \right)^2 \right), S(t) = \frac{L}{4T} \cdot \left(\frac{(T-2t)^3}{T^2} + 6t - T \right). \quad (4)$$

Из (4) следует:

$$\text{при } t = 0, U(0) = \frac{6L}{T^2}, V(0) = 0, S(0) = 0; \quad (5)$$

$$\text{при } t = T, U(t) = -\frac{6L}{T^2}, V(T) = 0, S(T) = L.$$

Зависимости (4) и (5) свидетельствуют о том, что объект перемещается на расстояние L из состояния покоя в конечное состояние покоя за время T .

На рисунке 1 показаны графики $S(t)$, $V(t)$, $U(t)$ при $T = 1$ с, $L = 1$ м, $m = 1$ кг.

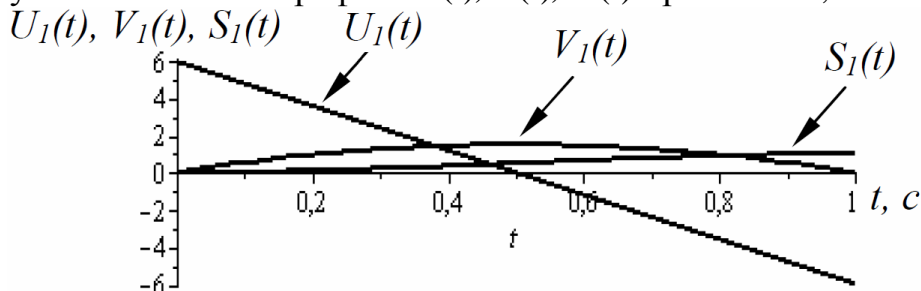


Рис. 1. Графики функции $U_1(t)$, $V_1(t)$, $S_1(t)$ при $n = 1$ и $k = 1$

Без учета сопротивления энергия, затрачиваемая на достижение цели движения, в этом случае равна: $A_1 = 2 \int_0^{T/2} U(t)V(t)dt = 2,25$ Дж.

Если принять, например, $k = 0,5$ кг/с, то график $U_1(t)$ примет вид, изображенный на рисунке 2; он не кососимметричный и общая энергия, затрачиваемая на достижение прежней цели движения, примет вид:

$$A_{1k} = \int_0^{t_1} U_1(t)V(t)dt - \int_{t_1}^T U_1(t)V(t)dt = 2,317 \text{ Дж}, \quad (6)$$

где $t_1 = 0,55$ с.

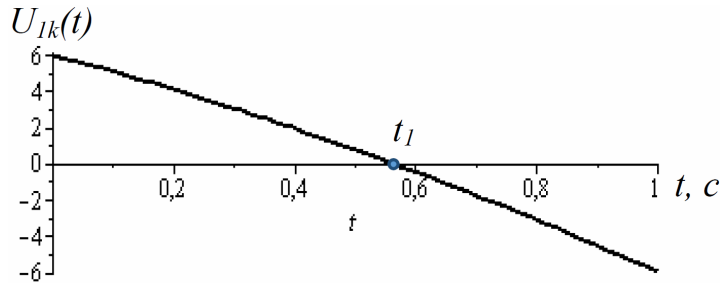


Рис. 2. График $U_{1k}(t)$ при $n = 1$ и $k = 0,5$

Естественно, что некоторое увеличение энергии связано с преодолением силы сопротивления движению.

Для нового типа управления со степенью полинома $n = 3$ с ростом сопротивления (по сравнению со случаем $n = 1$) энергия уменьшается.

Как было установлено без учета сопротивления, с ростом степени полинома n затрачиваемая энергия для достижения прежней цели движения уменьшается. Итак, при $n = 3$ без сопротивления следует:

$$U_3(t) = \frac{10L}{T^2} \left(\frac{T - 2t^2}{T} \right)^3, \quad V_3(t) = \frac{5L}{4T} \left(1 - \frac{T - 2t}{T} \right)^4. \quad (7)$$

Графики $U_3(t)$ и $V_3(t)$ изображены на рисунке 3.

С учетом прежних исходных данных энергия

$$A_3 = 2 \int_0^{T/2} U(t)V(t)dt = 1,5625 \text{ Дж}, \text{ т.е. } \Delta A = 2,25 - 1,56 = 0,69 \text{ Дж}. \quad (8)$$

Если учесть сопротивление (график $U_{3k}(t)$ изображен на рисунке 4), то для энергии следует $A_{3k} = \int_0^{t_3} U_1(t)V(t)dt - \int_{t_3}^T U_1(t)V(t)dt = 1,793$ Дж.

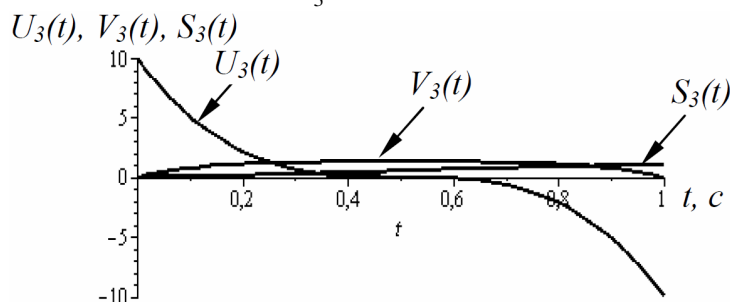
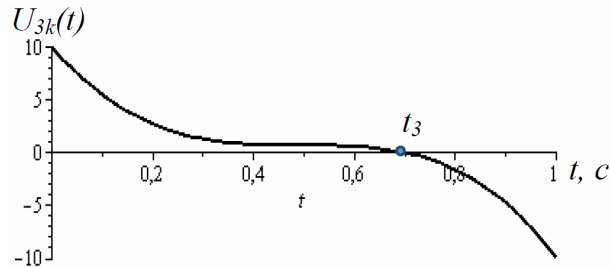


Рис. 3. Графики функции $U_3(t)$, $V_3(t)$, $S_3(t)$ при $n = 3$ и $k = 0$

Рис. 4. Графики $U_{3k}(t)$ при $n = 3$ и $k = 0,5$

В связи с сопротивлением требуемая энергия для достижения цели движения возрастает. При сравнении с управлением $n=1$ и учете сопротивления приращение энергии:

$$\Delta A = 2,317 - 1,793 = 0,52 \text{ Дж.} \quad (9)$$

Из (9) следует, что при учете линейно-вязкого сопротивления также наблюдается тенденция снижения энергии на достижение цели движения.

Учет сопротивления в виде сухого трения.

При исследуемом характере движения знак скорости не меняется, и поэтому уравнение ($m = 1$ кг) записывается так

$$\frac{d^2 S(t)}{dt^2} = U(t) - F, \quad (10)$$

где F – сила трения. Из (10) следует $U(t) = \frac{d^2 S(t)}{dt^2} + F$.

Численный пример выполнен согласно приведенному ранее алгоритму при $F = 1$ Н. В этом случае для прежних исходных данных приращение энергии:

$$\Delta A = \left[\int_0^{t_1} U_{1k}(t)V dt - \int_{t_1}^T U_{1k}(t)V(t) dt \right] - \left[\left(\int_0^{t_3} U_{3k}(t)V(t) dt - \int_{t_3}^T U_{3k}(t)V(t) dt \right) \right] = 2,374 - 1,995 = 0,3793 \text{ Дж.}$$

Итак, и в данном случае с ростом степени полинома ускорения наблюдается снижение общей энергии для достижения цели движения и при учете сопротивления. Однако, следует отметить, что движение начинается с преодолением силы трения.

Заключение. Теоретически доказано, что, несмотря на сопротивление движению (линейно-вязкого или сухого трения), удается экономить энергию для достижения цели движения при использовании реверсионно конструируемых управлений переносным движением объектов из исходного в конечное состояние покоя. Оценка действительных потерь энергии на преодоление сил трения должна даваться при непосредственной экспериментальной проверке модели рассмотренного оптимального управления.

Список литературы

1. Понtryгин Л.С., Болтынский В.Г., Гамкрелидзе Р.В. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1983. – 391 с.

2. Черноусько Ф.Л., Акуленко П.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
3. Гуляев В.И., Баженов В.А., Кошкин В.П. Оптимальное управление движением механических систем. – К.: УМК ВО, 1988. – 235 с.
4. Троицкий В.А. Оптимальные процессы колебаний механических систем. – Л.: Машиностроение, 1976. – 248 с.
5. Теория автоматического управления. В 2-х ч. Ч. II. Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления / Под ред. А.А. Воронова. – М.: Высш. шк., 1977. – 288с.
6. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: линейные модели. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
7. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: нелинейные модели. – М.: Наука, 1988. – 326 с.
8. Солодовников В.В., Плотников В.Н., Яковлев А.В. Основы теории и элементы систем автоматического регулирования: учеб. пособие для вузов. – М.: Машиностроение, 1985. – 536 с.
9. Дорф Г. Бишоп Р. Современные системы управления / Пер. с англ. Б.И. Крылова. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 832 с.
10. Карновский И.А., Почтман Ю.М. Методы оптимального управления колебаниями деформируемых систем. – М.: Вища школа, 1982. – 116 с.
11. Красовский Н.Н. Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 476 с.
12. Бохонский А.И., Варминская Н.И., Мозолевский М.И. Оптимальное управление переносным движением деформируемых объектов: теория и технические приложения. – Севастополь: СевНТУ, 2007. – 296с.
13. Бохонский А.И., Варминская Н.И. Вариационное и реверсионное исчисление в механике. – Севастополь: СевНТУ, 2012. – 212 с.
14. Бохонский А.И. Актуальные задачи вариационного исчисления. – Palmarium Academic Publishing, 2013. – 77 p.
15. Бохонский А.И. Реверсионный принцип оптимальности. – М.: Вузовский учебник Инфра – М, 2016. – 174 с.
16. Bokhonsky A.I., Zolkiewski S.Y. Modeling and analysis of elastic systems in motion. – Gliwice: Wydawnictwo Politechniki, 2011. – 171 p.
17. Bokhonsky A., Buchacz A., Placzek M., Wrobel A. Modeling and investigation of discrete-continuous vibrating mechanic systems with damping. – Gliwice: Wydawnictwo Politechniki, 2011. – 171 p.
18. Бохонский А.И. Управление переносным движением упругих систем // Динамические системы. – Симферополь: КФТ, 2004. – Вып. 18. – С. 56-63.
19. Бохонский А.И., Варминская Н.И. Оптимальное переносное движение упругих объектов // Динамические системы. – Симферополь: ТНУ, 2005. – Вып. 19. – С.3-10.
20. Бохонский А.И., Варминская Н.И., Мозолевский М.И. Оптимальное управление переносным движением деформируемых объектов: теория и технические приложения. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2007. – 296 с.

Сведения об авторах:

Бохонский Александр Иванович – д.т.н., профессор, профессор кафедры «Цифровое проектирование»;

Варминская Наталья Ивановна – к.т.н., доцент, заведующий кафедрой физики и общетехнических дисциплин.