УДК 531.8 https://doi.org/10.26160/2542-0127-2024-14-36-41

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПОЛУЧЕНИЮ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Орлянская Т.И.
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), Москва

Ключевые слова: тело, относительное движение, уравнение динамики, неинерциальная система отсчета, связи, реакции связей, силы, силы инерции.
Аннотация. В статье рассматривается подход к получению уравнения динамики движения тела относительно неинерциальной системы отсчета, в основу которого положены: самое главное утверждение механики Ньютона, которое гласит о том, что изменение скорости тела (т.е. ускорение) всегда вызывается воздействием на него каких-либо других тел; принцип освобождаемости от связей, который заключается в том, что действие одного тела на другое можно заменить реакцией связи, т.е. силой; второй закон Ньютона – закон пропорциональности силы и ускорения; третий закон Ньютона – о равенстве действия и противодействия, четвертый закон Ньютона – о независимости действия сил. В статье также рассматривается как в неинерциальной системе отсчета работает первый закон Ньютона – закон инерции.

ON ONE APPROACH TO OBTAINING THE EQUATION OF DYNAMICS OF RELATIVE MOTION

Orlyanskaya T.I.
Bauman Moscow State Technical University, Moscow

Keywords: body, relative motion, equation of dynamics, non-inertial frame of reference, connections, reactions of connections, forces, inertial forces.
Abstract. The article discusses an approach to obtaining the equation of the dynamics of body motion relative to a non-inertial reference frame, which is based on: the most important statement of Newtonian mechanics, which states that a change in the speed of a body (i.e. acceleration) is always caused by the influence of some other bodies on it; the principle of liberation from bonds, which lies in the fact that the action of one body on another can be replaced by the reaction of a connection, i.e. by force; Newton's second law - the law of proportionality of force and acceleration; Newton's third law is about the equality of action and reaction, Newton's fourth law is about the independence of the action of forces. The article also discusses how Newton’s first law of inertia, the law of inertia, works in a non-inertial frame of reference.

Известен подход к составлению уравнения динамики относительного движения, описываемый в литературе по физике [1-4] и теоретической механике [5-10]. Из анализа этих источников выясняется, что вопрос о получении уравнения динамики относительного движения в них ставится так: «Как следует изменить основное уравнение динамики, чтобы оно оказалось справедливым и для неинерциальных систем?» По сути, сразу ставится задача о преобразовании ускорений и сил при переходе от инерциальной системы отсчета к любой неинерциальной.

В результате тех или иных преобразований основного уравнения динамики с учетом кинематического уравнения связи по ускорениям, в [1-10] получается уравнение динамики относительного движения в общем в виде уравнения

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + (-m\bar{a}_e) + (-m\bar{a}_k), \tag{1}$$

где m – масса материальной точки; $\bar{F} = \sum \bar{F}_k$ – равнодействующая активных сил, прикладываемых к материальной точке; $\bar{a}_r, \bar{a}_e, \bar{a}_k$ – соответственно относительное, переносное и кориолисово ускорения движения материальной точки.

В уравнении (1) слагаемые в скобках в правой части имеют размерность силы, их обозначают и называют $\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e$ – переносной и $\bar{\Phi}_k = -m\bar{a}_k$ – кориолисовой силами инерции.

С учетом принятых обозначений уравнение (1) принимает вид

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_k. \tag{2}$$

Уравнение (2) показывает, что введение сил инерции позволяет сохранить по форме основное уравнение динамики для неинерциальных систем: слева – произведение массы материальной точки на ее ускорение (но уже по отношению к неинерциальной системе отсчета), справа – силы [1].

Правильность полученного уравнения динамики относительного движения не вызывает сомнений, оно работает при решении практических задач.

Однако, в связи с выбранным подходом к получению этого уравнения, возникает много вопросов.

И так, правая часть уравнения (2) содержит существенно различные силы. Сила $\bar{F}$ является результатом взаимодействия материальных тел с материальной точкой. В механике эти силы взаимодействия называются активными, они не меняются при переходе от одной системы отсчета к любой другой. Совсем другой характер вырисовывается у двух других сил $\bar{\Phi}_e$ и $\bar{\Phi}_k$. Эти две силы появляются в результате преобразований, зависят от вида и характера движения неинерциальной системы отсчета, а также от относительного положения и относительной скорости материальной точки в данный момент времени. Таким образом, эти силы зависят от перехода от одной неинерционной системы отсчета к другой. А так как эти силы не являются результатом взаимодействия тел, то в этом смысле, их часто называют «фиктивными» или «псевдосилами».

Принимая во внимание утверждение о том, что для сил инерции не выполняется третий закон Ньютона, и, что уравнение динамики относительного движения составлено не в строгом соответствии со вторым законом Ньютона, а с учетом каких-то преобразований, очевидно поэтому в литературе по классической механике Ньютона существует утверждение о том, что в неинерциальных системах отсчета второй и третий законы Ньютона не выполняются.

Так как полученное уравнение динамики относительного движения работает на практике, а фиктивность сил $\bar{\Phi}_e$ и $\bar{\Phi}_k$ все еще не подтверждена, возникает проблема поиска альтернативного подхода к получению уравнения динамики относительного движения, который бы дал ответ на вопросы:

«реальные» или «фиктивные» эти силы? Работают ли законы Ньютона в неинерциальных системах отсчета?

Рассмотрим предлагаемый подход к получению уравнения динамики относительного движения тела.

Тело будем рассматривать как материальную точку M. Введем в рассмотрение две системы отсчета: неподвижную инерциальную $Oxyz$ жестко связанную с каким-нибудь неподвижным телом и подвижную неинерциальную O_1XYZ, жестко связанную с телом, которое известным образом движется относительно инерциальной системы $Oxyz$ и от движения данной материальной точки не зависит (рис. 1).

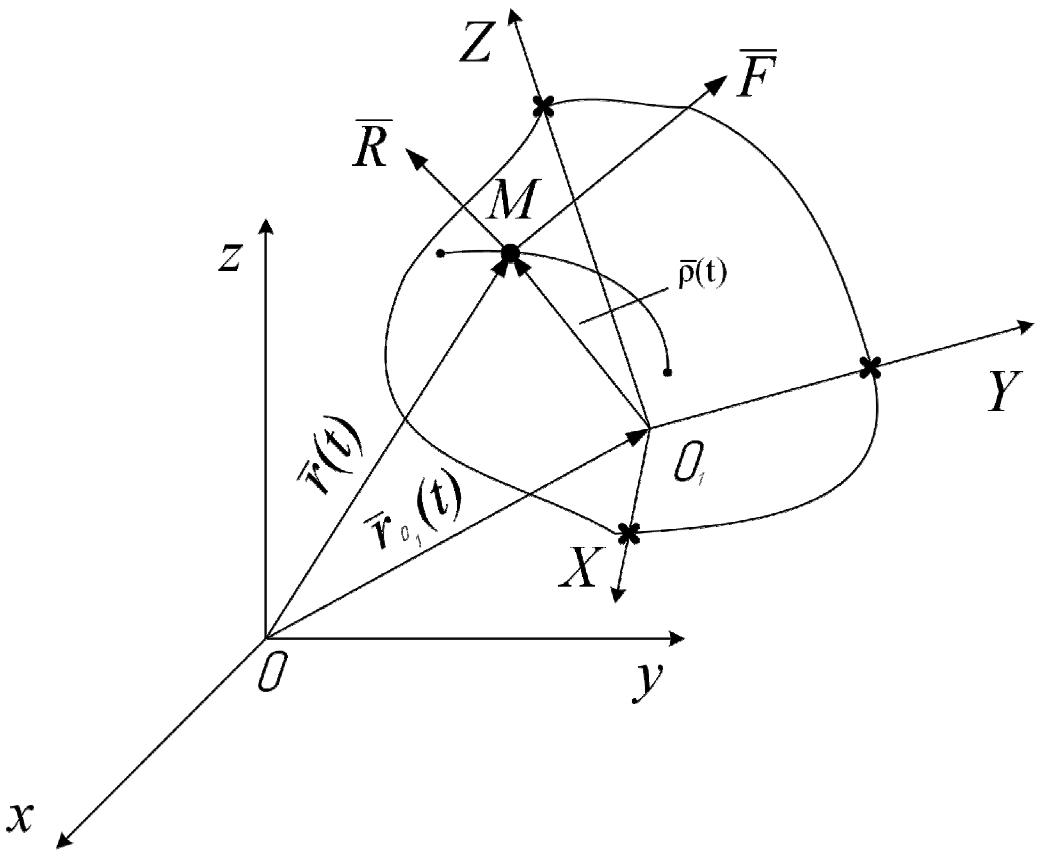

Рис. 1. Относительное движение материальной точки

Положение материальной точки в инерциальной системе $Oxyz$ определяется радиус-вектором $\overline{r}(t)$, проведенным из точки O. Положение материальной точки относительно подвижной неинерциальной системы O_1XYZ определяется радиус-вектором $\overline{\rho}$, проведенным из точки O_1. Положение точки O_1 относительно инерциальной системы $Oxyz$ определяется радиус-вектором $\overline{r}_{O_1}(t)$, проведенным из точки O.

Предположим, что m масса материальной точки и на нее со стороны других тел действуют только активные силы, равнодействующая $\overline{F}$ которых определяется выражением

$$\overline{F} = \sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k , \tag{3}$$

где N – число активных сил, действующих со стороны других тел.

Масса m точки известна и тогда, для того чтобы получить уравнение динамики относительного движения, нужно найти ее ускорение $\overline{a}_r$ в неинерциальной системе O_1XYZ .

Согласно главному утверждению механики Ньютона следует, что изменение скорости материальной точки (т.е. ускорение) всегда вызывается воздействием на данную материальную точку каких-либо других тел.

Известно, что ускорение при фиксированном положении материальной точки и окружающих тел не может быть любым, его значение однозначно, так как диктуется законами природы.

Фиксируем момент времени и выясняем воздействия со стороны каких тел на материальную точку имеют место. В механике эти тела часто называют другими.

Действие других тел на материальную точку учитывается. На материальную точку со стороны других тел действует равнодействующая $\overline{F}$ активных сил.

Однако есть еще одно неучтенное в окружении материальной точки тело. Это тело, с которым связана неинерциальная система O_1XYZ , в которой рассматривается движение материальной точки.

Между материальной точкой и телом, с которым связана неинерциальная система отсчета, существует связь, которая зависит от времени, от относительных координат и относительной скорости материальной точки. Эта связь является голономной нестационарной удерживающей и описывается уравнением вида

$$f(t, \overline{\rho}, \dot{\overline{\rho}}) = 0, \tag{4}$$

где $\overline{\rho}$ – радиус-вектор положениям материальной точки в неинерциальной системе O_1XYZ ; $\dot{\overline{\rho}}$ – вектор относительной скорости материальной точки в неинерциальной системе O_1XYZ . Причем эта связь может быть как контактной, так и безконтактной.

Наличие связи указывает на то, что возможно взаимодействие, т.е. возникновение сил между материальной точкой и телом, с которым связана неинерциальная система O_1XYZ .

Таким образом, материальная точка не является свободной в неинерциальной системе O_1XYZ , на нее в процессе движения всегда действуют как активные силы, так и сила реакции связи.

Тогда, чтобы составить уравнение динамики относительного движения несвободной материальной точки используем принцип освобождаемости от связей: связь мысленно отбрасываем и действие связи на материальную точку заменяем силой $\overline{R}$, которая при движении с голономными нестационарными связями называется силой противодействия связи. Эта сила разумеется «реальная», это сила взаимодействия.

В соответствии со вторым и четвертым законами Ньютона уравнение динамики относительного движения материальной точки принимает вид

$$m\overline{a}_r = \overline{F} + \overline{R}. \tag{5}$$

Из уравнения (5) следует, что все силы в правой части уравнения являются силами взаимодействия материальной точки с окружающими телами.

Для того, чтобы количественно определить значение силы противодействия связи $\overline{R}$, введем в рассмотрение основное уравнение динамики материальной точки

$$m\overline{a} = \overline{F} \tag{6}$$

и кинематическое уравнение связи по ускорениям, которое получается при рассмотрении сложного движения материальной точки в инерциальной системе $Oxyz$

$$a = \overline{a}_r + \overline{a}_e + \overline{a}_k, \tag{7}$$

где $\overline{a}, \overline{a}_r, \overline{a}_e, \overline{a}_k$ – соответственно абсолютное, относительное, переносное и кориолисово ускорение движения точки.

Рассматриваем уравнения (5)-(7).

Из уравнения (5) выражаем силу противодействия связи

$$\overline{R} = m\overline{a}_r - \overline{F}. \tag{8}$$

Выражение (7) подставляем в (6) и результат записываем в виде

$$\overline{F} = m(\overline{a}_r + \overline{a}_e + \overline{a}_k). \tag{9}$$

Далее выражение (9) подставляем в (8), раскрываем скобки, сокращаем подобные, которые отличаются только знаком, и получаем

$$\overline{R} = (-m\overline{a}_e) + (-m\overline{a}_k). \tag{10}$$

Из выражения (10) следует, что сила $\overline{R}$ противодействия связи является динамической силой, так как зависит от ускорений движения материальной точки.

Кроме того, принимая во внимание, что $\overline{\Phi}_e = -m\overline{a}_e$ и $\overline{\Phi}_k = -m\overline{a}_k$, выражение (10) окончательно принимает вид

$$\overline{R} = \overline{\Phi}_e + \overline{\Phi}_k. \tag{11}$$

Из (11) следует, что сила противодействия связи $\overline{R}$ численно равна сумме переносной $\overline{\Phi}_e$ и кориолисовой $\overline{\Phi}_k$ сил инерции.

Подставляя (11) в (5), получаем уравнение в виде

$$m\overline{a}_r = \overline{F} + \overline{\Phi}_e + \overline{\Phi}_k. \tag{12}$$

Уравнение (12) является уравнением динамики относительного движения материальной точки.

Частные случаи относительного движения материальной точки известны и хорошо отписаны в литература по теоретической механике [5, 7-10].

По сути, выполнение первого закона Ньютона – закона инерции связано как раз с одним из частных случаев относительного движения материальной точки, когда тело, с которым связана неинерциальная система O_1XYZ движется равномерно и прямолинейно, т.е. когда $\overline{\omega}_e = 0, \overline{\varepsilon}_e = 0, \overline{a}_e = 0, \overline{a}_k = 0$. В этом случае уравнение динамики относительного движения принимает вид

$$m\overline{a}_r = \overline{F},$$

аналогичный основному уравнению динамики. Это происходит потому, что подвижная система отсчета в этом случае становится инерциальной, а во всех инерциальных системах отсчета уравнение динамики записывается одинаково.

Выводы

1. Полученное уравнение динамики относительного движения совпадает с рассматриваемым изначально, это свидетельствует о том, что предлагаемый подход к получению уравнения является альтернативным.

2. Материальная точка, имеющая голономную нестационарную удерживающую связь с телом, с которым связана неинерциальная система отсчета, всегда является несвободной в этой системе.

3. Противодействием голономной нестационарной удерживающей связи на материальную точку в процессе движения всегда является «реальная» сила.

4. Учитывая, что при предлагаемом подходе к составлению уравнения динамики относительного движения, используются второй, третий и четвертый законы Ньютона, а для полученного уравнения выполняется и первый закон Ньютона, делаем вывод о том, что законы Ньютона выполняются в неинерциальных системах отсчета.

Статья может быть полезна преподавателям, студентам, аспирантам и даже школьникам при изучении механики, чтобы понять, как выполняются законы Ньютона в неинерциальных системах отсчета.

Список литературы

1. Иродов И.Е. Механика. Основные законы. – 10-е изд., – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 309 с.
2. Савельев И.В. Курс общей физики: учебник в 3-х томах. Т. 1. Механика. Молекулярная физика. – 14-е изд., стер. – СПб.: Изд-во «Лань», 2018. – 432 с.
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики: учебное пособие для вузов в 5-ти томах. Т. 1. Механика. – 4-е изд., стер. – М.: Изд-во МФТИ, 2002. – 560 с.
4. Балашов М.М., Гомонова А.И., Долицкий А.Б. и др. Физика. Механика. 10 класс: учебник для углубленного изучения физики / Под ред. Г.Я. Мякишева. – 6-е изд. – М.: Дрофа, 2004. – 496 с.
5. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: учебник. – 8-е изд., стер. – СПб.: Изд-во «Лань», 2016. – 720 с.
6. Ишлинский А.Ю. Классическая механика и силы инерции. – М.: Наука, 1987. – 320 с.
7. Дронг В.И., Дубинин В.В., Ильин М.М. и др. Курс теоретической механики: учебник для вузов / Под ред. К.С. Колесникова, В.В. Дубинина. – 5-е изд. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. – 580 с.
8. Лойцанский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики: в 2-х томах. Т. II. Динамика. – 6-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1983. – 640 с.
9. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: учебник. – 21-е изд. – М.: Ленанд, 2018. – 424 с.
10. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1996. – 411 с.

Сведения об авторе:

Орлянская Тамара Ивановна – к.т.н., доцент кафедры ФН-3 «Теоретическая механика».