

## ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ В НАГРУЖЕННЫХ ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ ПОЛЫХ ЦИЛИНДРАХ

*Зеньков Е.В., Толмачева И.А.*

*Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск*

**Ключевые слова:** теория упругости, вычислительный эксперимент, модельная задача, задача Ламе, напряжённо-деформированное состояние, метод конечных элементов.

**Аннотация.** В статье описывается решение модельной задачи теории упругости о распределении напряжений в полом цилиндре, нагруженном внутренним давлением (решением задачи Ламе), рассматриваемое в рамках освоения дисциплины теории упругости. Решение указанной задачи осуществляется с применением вычислительного моделирования методом конечных элементов. Полученные в ходе такого моделирования напряжённо-деформированное состояние позволяет повысить наглядность и понимание физических процессов в упруго-деформируемых телах типа полых цилиндров (труб), нагруженных внутренним давлением. Выполнен сравнительный анализ результатов расчета и данных аналитического решения указанной задачи.

## STUDY OF MECHANICAL STRESSES IN HOLLOW CYLINDERS LOADED WITH INTERNAL PRESSURE

*Zenkov E.V., Tolmacheva I.A.*

*Irkutsk State Transport University, Irkutsk*

**Keywords:** elasticity theory, computational experiment, model problem, Lamé's problem, stress-strain state, finite element method.

**Abstract.** The article describes the solution of a model problem of elasticity theory on the distribution of stresses in a hollow cylinder loaded with internal pressure (solution of the Lamé problem), considered within the framework of mastering the discipline of elasticity theory. The solution of this problem is carried out using computational modeling by the finite element method. The stress-strain state obtained in the course of such modeling allows to increase the visibility and understanding of physical processes in elastic-deformable bodies such as hollow cylinders (pipes) loaded with internal pressure. A comparative analysis of the calculation results and data of the analytical solution of this problem is performed.

В рамках проведения лабораторных работ по дисциплине «Теория упругости» обучающимися выполняется комплекс задач на основе использования вычислительного моделирования физических процессов в упруго-деформируемых телах методом конечных элементов (МКЭ) с целью определения напряжённо-деформированного состояния (НДС) этого тела. При этом рассматривается оценка НДС тел, описываемое аналитическим решением теории упругости [1, 2]. Полученное в ходе такого моделирования напряжённо-деформированное состояние позволяет повысить информативность и понимание физических процессов в рассматриваемых деформируемых телах.

Рассмотрим решение задачи теории упругости о распределении напряжений в полом цилиндре, нагруженном внутренним давлением (решением задачи Ламе) [1, 3]. В работе поставлена цель – исследование особенностей НДС таких распространённых несущих элементов конструкций, как полые цилиндры

(трубы), нагруженные внутренним давлением. Таким образом, план работы включает следующие этапы:

1) изучить аналитическое решение задачи Ламе о нагружении полого цилиндра внутренним давлением, а также котельные формулы, получаемые из решения Ламе при стремлении коэффициента толстостенности цилиндра (величины  $\beta = r_n/r_e$ , где  $r_n$  наружный радиусом полого цилиндра,  $r_e$  – внутренний), к единице;

2) построить дискретную модель деформирования полого цилиндра под внутренним давлением для случая плоской деформации ( $\epsilon_z = 0$ ), соответствующую значениям  $r_e = 1$  м,  $r_n = 2$  м, при длине цилиндра  $l = 1$  м, модуле продольной упругости  $E = 2E11$  Па и коэффициенте Пуассона  $\mu = 0,3$ ;

3) сформулировать выводы об уровне напряжений и особенностях численного решения задачи.

Рассмотрим решение такой задачи подробно. Рассматривается прямоугольная пластина (рис. 1, а), изготовленная из конструкционной стали (модуль продольной упругости  $E = 2,0E11$  Па, значение коэффициента Пуассона  $\nu = 0,3$ ) размером  $20\text{м} \times 20\text{м}$ , толщиной  $0,2$  м с эллиптическим отверстием с соотношением полуосей  $a = 1$  м (большая полуось эллипса  $a$  направлена вдоль оси  $x$ ) и  $b = 0,5$  м (малая полуось эллипса  $b$  направлена вдоль оси  $y$ ). Пластина нагружена по наружному краю заданными растягивающими равномерно распределёнными нормальными напряжениями  $\sigma_y = \sigma_\infty$  (рис. 1). В силу осевой симметрии задачи о нагружении полого цилиндра внутренним давлением при его построении в расчетной программе рассматривается только его четверть.

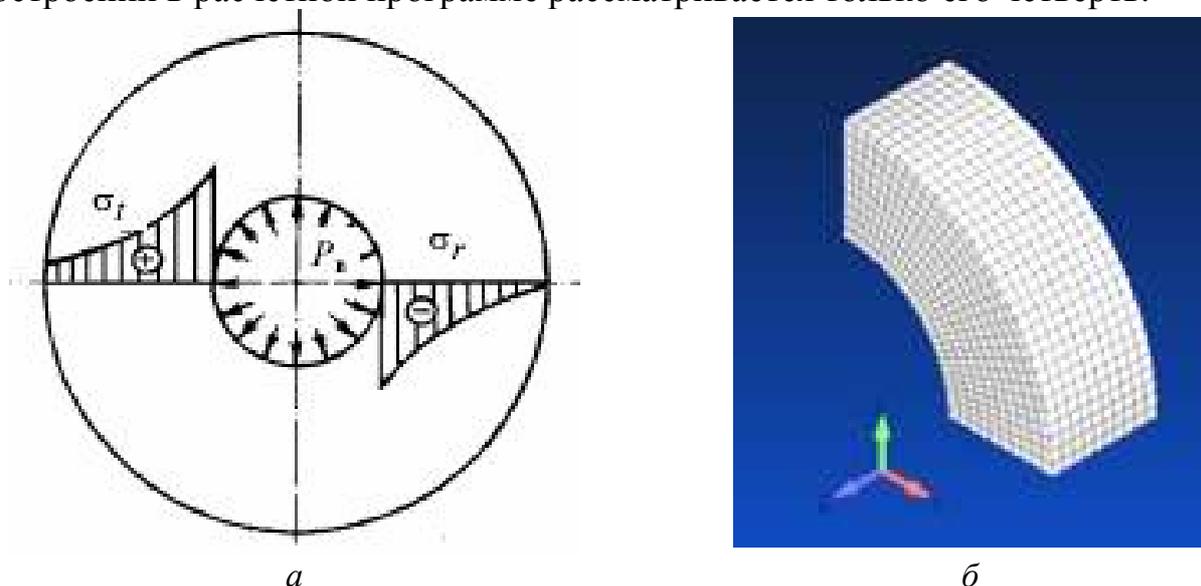


Рис. 1. Полый цилиндр, нагруженный внутренним давлением: а – общая схема; б – дискретная модель для решения по МКЭ

Формулы Ламе относятся к цилиндру, сечение которого представлено на рисунке 1. Соответствующие формулы Ламе имеют вид:

$$\sigma_r = -\frac{pr_e^2}{r_n^2 - r_e^2} \left( \frac{r_n^2}{r^2} - 1 \right); \quad \sigma_t = \frac{pr_e^2}{r_n^2 - r_e^2} \left( \frac{r_n^2}{r^2} + 1 \right), \quad (1)$$

где  $r$  – текущее значение радиуса (координаты  $r$ ) произвольной точки внутри стенки цилиндра,  $\sigma_r$ ,  $\sigma_t$  – радиальное и кольцевое нормальное напряжение в точках стенки цилиндра. В случае тонкостенных цилиндров, т.е. при малых значениях разности

$$(r_H/r_6 - 1)$$

величина  $\sigma_t$  приближённо может быть вычислена по несложной (так называемой котельной) формуле

$$\sigma_t = \frac{pr_6}{s}, \quad (2)$$

где  $s$  – толщина стенки цилиндра,  $s = r_H - r_6$ . Указанные соотношения приведены, например, в [1]. Одна из целей данной работы состоит в определении погрешности при использовании для вычисления величины  $\sigma_t$  приближённой формулы (2) вместо точного решения (1).

При выполнении всех этапов построения вычислительной модели полого цилиндра (рис. 1, б) на основе МКЭ [3, 4] и выполнения численного статического расчёта позволяет получить осесимметричную картину распределения искомых характеристик решения рассматриваемой задачи в цилиндрической системе координат (рис. 2).

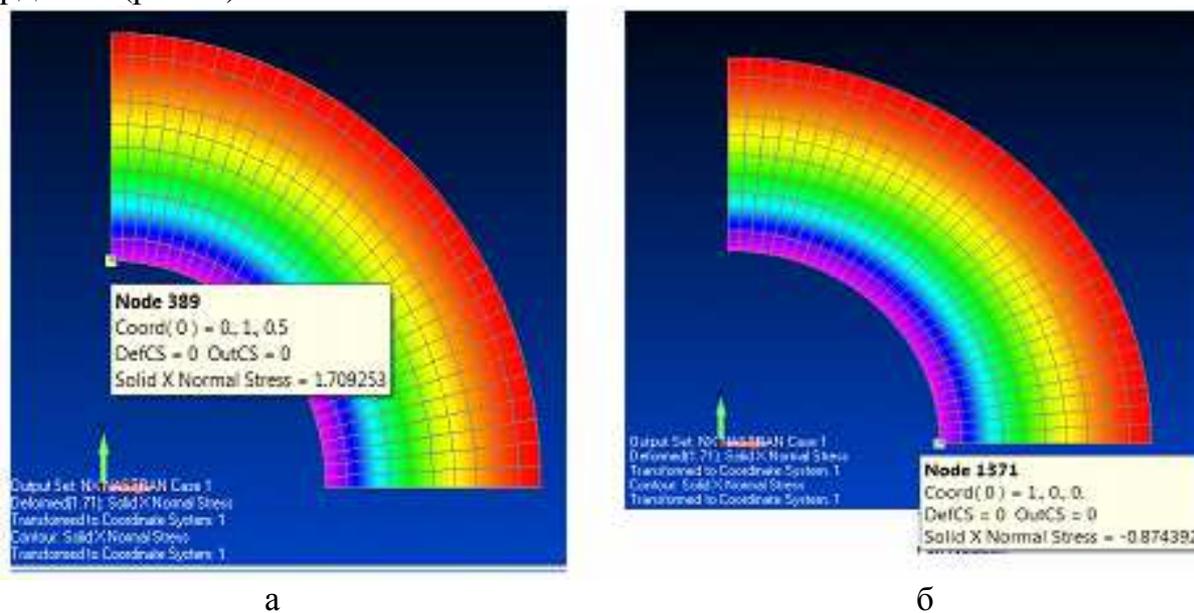


Рис. 2. НДС в полом цилиндре, нагруженный внутренним давлением:  
 а – вид четверти; б – вид вблизи кромки отверстия

В соответствии с формулами (1) видно, что точное значение кольцевых напряжений  $\sigma_t$  на внутренней поверхности цилиндра определяется равенством

$$\sigma_t = \frac{pr_6^2}{r_H^2 - r_6^2} \left( \frac{r_H^2}{r^2} + 1 \right) = \frac{1 \times 1^2}{2^2 - 1^2} \left( \frac{2^2}{1^2} + 1 \right) = \frac{5}{3} = 1,67 \text{ МПа}, \quad (3)$$

а для радиальных напряжений  $\sigma_r$  должно выполняться равенство  $\sigma_r = -1$  МПа. Результаты соответствующего численного анализа представлены на рисунке 2. Полученные результаты позволяют определить погрешность построенной дискретной модели при определении напряжений  $\sigma_r$ ,  $\sigma_t$ .

В рассматриваемой задаче Ламе относительная погрешность  $\varepsilon|_{\sigma_r}$  численного определения  $\sigma_r$  и аналогичная погрешность численного моделирования  $\sigma_t$  определяются равенствами

$$\varepsilon|_{\sigma_r} = \frac{|-1 - (0,87)|}{|-1|} = 13\% ; \varepsilon|_{\sigma_t} = \frac{|1,67 - (1,71)|}{1,67} = 2,4\%. \quad (4)$$

В вычислительном эксперименте установлено, что погрешность определения значений компонент напряжений  $\sigma_r$ ,  $\sigma_t$ , полученные на КЭ-разбивках с дополнительными узлами на ребрах конечных элементов (при удвоении количества узлов КЭ-разбивки), могут быть уменьшены: погрешность определения радиальных напряжений  $\sigma_r$  более, чем в 10 раз (с 13% до 1,2%) и погрешность определения кольцевых напряжений  $\sigma_t$  более, чем в 6 раз (с 2,4% до 0,36%).

### Список литературы

1. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
2. Цвик Л.Б., Зеньков Е.В. Физические основы теории упругости и метода конечных элементов: учебное пособие. – Иркутск: ИрГУПС, 2022. – 116 с.
3. Цвик Л.Б., Зеньков Е.В. Трехмерный инженерный анализ модельных напряженных состояний упругих тел: лабораторный практикум. – Иркутск: Изд-во ИРНИТУ, 2017. – 132 с.
4. Шимкович Д.Г. Femap & Nastran. Инженерный анализ методом конечных элементов. – М.: ДМК Пресс, 2008. – 704 с.

### Сведения об авторах:

*Зеньков Евгений Вячеславович* – к.т.н., доцент, доцент кафедры управления качеством и инженерной графики;

*Толмачева Ирина Александровна* – студентка.