

## ИЗУЧЕНИЕ ЯВЛЕНИЯ КОНЦЕНТРАЦИИ МЕХАНИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ ВБЛИЗИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОТВЕРСТИЙ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ РАСТЯГИВАЕМЫХ ПЛАСТИНАХ

*Зеньков Е.В., Толмачева И.А.*

*Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск*

**Ключевые слова:** теория упругости, вычислительный эксперимент, модельная задача, задача Колосова-Инглиса, напряжённо-деформированное состояние, метод конечных элементов.

**Аннотация.** В статье описывается решение модельной задачи теории упругости о распределении механических напряжений вблизи малого эллиптического отверстия на плоское однородное напряжённо-деформированное состояние прямоугольной растягиваемой пластины (задача Колосова-Инглиса), рассматриваемое в рамках освоения дисциплины теории упругости. Решение указанной задачи осуществляется с применением вычислительного моделирования методом конечных элементов. Полученные в ходе такого моделирования напряжённо-деформированное состояние позволяет повысить наглядность и понимание физических процессов в упруго-деформируемых телах с концентраторами напряжений. Выполнен сравнительный анализ результатов расчета и данных аналитического решения указанной задачи.

## STUDY OF THE PHENOMENON OF CONCENTRATION OF MECHANICAL STRESSES NEAR ELLIPTICAL HOLES IN RECTANGULAR TENSILE PLATES

*Zenkov E.V., Tolmacheva I.A.*

*Irkutsk State Transport University, Irkutsk*

**Keywords:** elasticity theory, computational experiment, model problem, Kolosov-Inglis problem, stress-strain state, finite element method.

**Abstract.** The article describes the solution of a model problem of elasticity theory on the distribution of mechanical stresses near a small elliptical hole on a flat homogeneous stress-strain state of a rectangular stretched plate (the Kolosov-Inglis problem), considered within the framework of mastering the discipline of elasticity theory. The solution of this problem is carried out using computational modeling by the finite element method. The stress-strain state obtained in the course of such modeling allows for increased visibility and understanding of physical processes in elastically deformable bodies with stress concentrators. A comparative analysis of the calculation results and the data of the analytical solution of this problem is performed.

Дисциплина «Теория упругости» является одной из базовых дисциплин, дающих представление о возникающих под действием внешних сил напряжениях и деформациях в упруго деформируемых телах. В рамках проведения лабораторных работ обучающимися выполняется комплекс задач, используя компьютерное моделирование физических процессов методом конечных элементов (МКЭ), по исследованию напряжённо-деформированного состояния (НДС) имеющих аналитическое решение задач теории упругости [1, 2]. Полученное в ходе такого моделирования напряжённо-деформированное состояние позволяет повысить наглядность и понимание физических процессов в

упруго-деформируемых телах, в частности, имеющих различной формы концентраторы напряжений.

Рассмотрим решение задачи теории упругости о распределении механических напряжений вблизи малого эллиптического отверстия напряжений вблизи кругового отверстия [1, 3]. В работе поставлена цель – изучение явления концентрации механических напряжений в деформируемых телах вблизи вытянутых (эллиптических) отверстий. Таким образом, план работы включает следующие этапы:

1) изучить положения теории упругости о распределении механических напряжений вблизи малого эллиптического отверстия на плоское однородное НДС прямоугольных растягиваемых пластин (изучить аналитическое решение задачи Колосова-Инглиса);

2) построить вычислительные дискретные модели деформирования прямоугольных пластин с эллиптическими отверстиями с соотношением полуосей эллипса 1:2, растягиваемых вдоль их оси симметрии напряжениями (вдоль малой полуоси эллиптического отверстия), равномерно распределёнными по внешним краям рассматриваемых пластин;

3) сформулировать выводы об уровне концентрации напряжений и особенностях численного решения задачи.

Рассмотрим решение такой задачи подробно. Рассматривается прямоугольная пластина (рис. 1, *а*), изготовленная из конструкционной стали (модуль продольной упругости  $E = 2,0E11$  Па, значение коэффициента Пуассона  $\nu = 0,3$ ) размером  $20\text{м} \times 20\text{м}$ , толщиной  $0,2$  м с эллиптическим отверстием с соотношением полуосей  $a = 1$  м (большая полуось эллипса  $a$  направлена вдоль оси  $x$ ) и  $b = 0,5$  м (малая полуось эллипса  $b$  направлена вдоль оси  $y$ ). Пластина нагружена по наружному краю заданными растягивающими равномерно распределёнными нормальными напряжениями  $\sigma_y = \sigma_\infty$  (рис. 1).

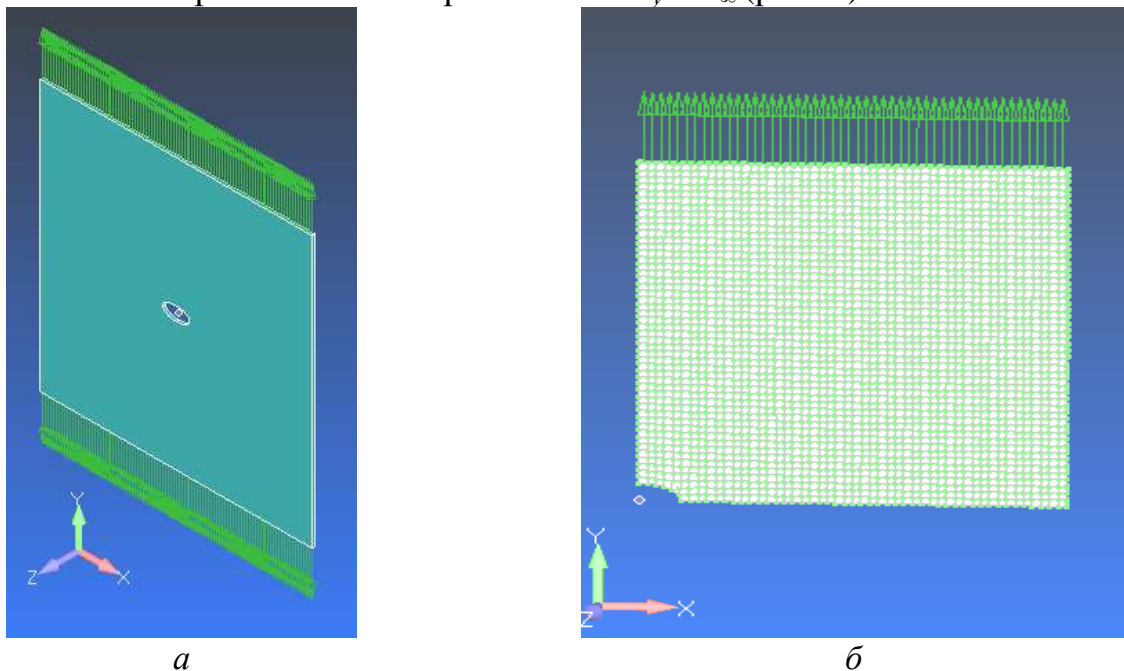


Рис. 1. Прямоугольная пластина с эллиптическим вырезом:  
*а* – общий вид; *б* – расчетная модель для решения по МКЭ

При создании в растягиваемой пластине эллиптического отверстия с заданными размерами в её НДС вблизи отверстия возникают существенные изменения. Соответствующие формулы установлены российским исследователем Колосовым (1909 г.) и английским исследователем Инглисом (1913). Полученные ими формулы определяют значения максимальных напряжений  $\sigma_y^{\max}$ , возникающих в точках наибольшей кривизны контура эллиптического отверстия [1], и имеют

$$k_{\sigma} = \frac{\sigma_y^{\max}}{\sigma_{\infty}} = 1 + 2 \frac{a}{b}, \quad (1)$$

где  $a$  и  $b$  – длины большой и малой полуоси эллипса соответственно. Величина  $k_{\sigma}$  в левой части равенства (1) представляет собой коэффициент концентрации нормальных напряжений в растягиваемой пластине с эллиптическим отверстием. В случае заданного эллиптического отверстия  $k_{\sigma} = 5$ . Указанные значения точного решения рассматриваемой задачи позволяют оценить погрешность численного определения величины  $k_{\sigma}$  с помощью МКЭ.

При выполнении всех этапов построения компьютерной модели пластины (рис. 1, б) на основе МКЭ [3, 4] и выполнения численного статического расчёта получено распределение нормальных напряжений  $\sigma_y$  в указанной пластине (рис. 2, а).

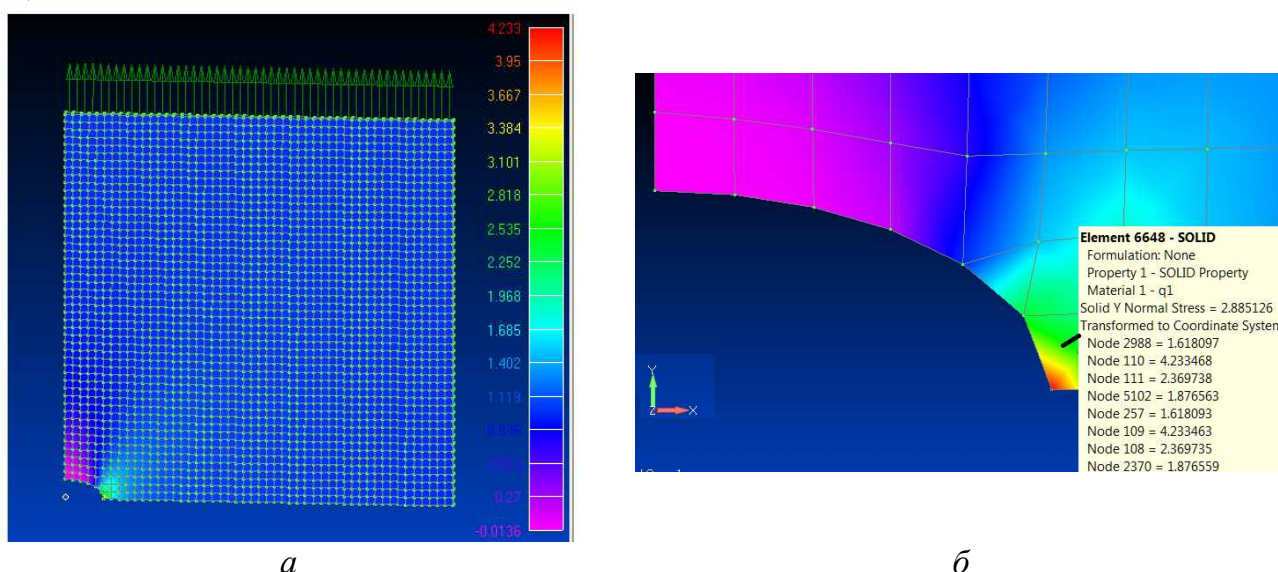


Рис. 2. НДС в растягиваемой пластине с эллиптическим отверстием:  
 а – вид четверти; б – вид вблизи кромки отверстия

При удалении от малого отверстия НДС пластины приближается к однородному и на расстоянии порядка нескольких полуосей отверстия от центра пластины увеличение уровня напряжений становится несущественным по сравнению со случаем равномерного растяжения прямоугольной пластины без отверстия. Это обстоятельство характерно для различных малых отверстий, выступов, выточек, вырезов, галтельных переходов, скачкообразных изменений толщин несущих элементов конструкции или сооружения – они являются концентраторами напряжений.

Вблизи кромки отверстия в зоне максимальной кривизны его контура (на конце большой полуоси эллипса) наблюдается максимальная концентрация напряжений  $\sigma_y$ , характеризуемая таблицей узловых значений напряжений, приведённой на рисунке 2, б.

Детальный поузловой анализ распределения нормальных напряжений  $\sigma_y$  возле кромки отверстия позволяет выявить уровень максимальных напряжений, определённый численно с помощью МКЭ. Представленный результат показывает, что вместо точного расчётного значения  $k_\sigma = 5$  применение построенной дискретной модели даёт значение 4,23 (рис. 2, б), что составляет величину меньшую, чем точное расчётное значение на 15%.

#### Список литературы

1. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
2. Цвик Л.Б., Зеньков Е.В. Физические основы теории упругости и метода конечных элементов: учебное пособие. – Иркутск: ИрГУПС, 2022. – 116 с.
3. Цвик Л.Б., Зеньков Е.В. Трёхмерный инженерный анализ модельных напряженных состояний упругих тел: лабораторный практикум. – Иркутск: Изд-во ИРНИТУ, 2017. – 132 с.
4. Шимкович Д.Г. Femap & Nastran. Инженерный анализ методом конечных элементов. – М.: ДМК Пресс, 2008. – 704 с.

#### Сведения об авторах:

*Зеньков Евгений Вячеславович* – к.т.н., доцент, доцент кафедры управления качеством и инженерной графики;

*Толмачева Ирина Александровна* – студентка.