УДК 534.015, 519.71, 629.4.015, 62-752 https://doi.org/10.26160/2542-0127-2024-13-14-22

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕЖИМОВ ДИНАМИЧЕСКОГО ГАШЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ КАК ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ТЕХНИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА

Елисеев А.В., Миронов А.С.

Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск

Ключевые слова: механическая колебательная система, структурные математические модели, динамическое гашение колебаний, передаточная функция, минимизация амплитуд колебаний, оптимизация динамического состояния.

Аннотация. Развивается научно-методологический подход к задачам оценки, формирования и коррекции динамических состояний технических объектов, находящихся в условиях вибрационных нагружений. В рамках методологии структурного математического моделирования рассматриваются вопросы эквивалентности задач определения режимов динамического гашения колебаний в механических колебательных системах с двумя степенями свободы в условиях силовых возмущений и задач минимизации амплитуд колебаний с учетом выполнения совокупности необходимых требований. Установлено, что задача определения режима динамического гашения колебаний может рассматриваться как задача оптимизации динамического состояния технического объекта на основе энергетического критерия с учетом удовлетворения совокупности требований к особенностям движения системы. Приведены результаты аналитических выкладок и численных экспериментов.

DETERMINATION OF THE MODES OF DYNAMIC DAMPING OF VIBRATIONS OF A MECHANICAL SYSTEM AS A TASK OF OPTIMIZING THE DYNAMIC STATE OF A TECHNICAL OBJECT

Eliseev A.V., Mironov A.S.

Irkutsk State Transport University, Irkutsk

Keywords: mechanical oscillatory system, structural mathematical models, dynamic vibration damping, transfer function, minimization of oscillation amplitudes.

Abstract. A scientific and methodological approach to the problem of assessment, formation and correction of dynamic states of technical objects under vibration loads is being developed. Within the framework of the methodology of structural mathematical modeling, the issues of equivalence of the problem of determining the modes of dynamic damping of vibrations in a mechanical oscillatory system with two degrees of freedom under conditions of force disturbances and the problem of minimizing the amplitudes of vibrations, taking into account the fulfillment of a set of necessary requirements, are considered. It is established that the task of determining the mode of dynamic damping of vibrations can be considered as a task of optimizing the dynamic state of a technical object based on an energy criterion, taking into account the satisfaction of a set of requirements for the characteristics of motion. The results of analytical calculations and numerical experiments are presented.

Введение. В настоящее время проблемы динамики машин обращают внимание на задачи оценки, формирования и коррекции динамических состояний технических объектов, находящихся в условиях вибрационных нагружений [1, 2].

Характерным примером технического объекта, работающего в условиях вибрационного нагружения, может служить испытательный стенд для проведения циклических испытаний лонжеронов лопастей вертолетов [3]. Работа вибрационного стенда для испытаний фрагмента лопасти направлена на возбуждение колебаний определенной формы с заданными частотой и амплитудой [4].

В общем случае расчетная схема вибрационного стенда представляет собой гибридную механическую колебательную систему, образованную сосредоточенными и распределенными массами, связанными между собой и опорными поверхностями с помощью вязкоупругих элементов [5, 6]. В рамках разработки структурного подхода к анализу существенных свойств динамических взаимодействий элементов виброиспытательного оборудования в качестве базовых расчетных схем могут быть использованы механические колебательные системы с сосредоточенными параметрами, позволяющие разрабатывать математические модели для оценивания, формирования и корректирования динамических состояний испытательных образцов в условиях вибрационных нагружений [7]. Особое развитие получили структурные подходы в решении прикладных задач теории колебаний, включая задачи вибрационной защиты на основе расчетных схем в виде механических колебательных систем с двумя степенями свободы [8, 9].

В работе [10] показан метод построения модели, основаный на том, что режим работы вибрационного стенда представляет режим динамического гашения колебаний массоинерционного элемента, к которому прикладывается внешнее силовое возмущений, а массоинерционный элемент, отображающий испытательный образец, выступает в роли вибрационного гасителя колебаний.

К динамических характеристиками вибрационного стенда предъявляются требования в виде условий на максимальную амплитуду колебаний точек образца лопасти. В рамках расчетной схемы в виде механической колебательной системы, отображающей рабочий процесс виброиспытательного стенда, одна из масс отображает вибрационный вибровозбудитель, к которому прикладывается силовое возмущение, приводящее к колебанию испытательного образца, а вторая масса отображает движение точки образца, которая должна колебаться с определенной фиксированной амплитудой.

Критическим режимом колебаний механической системы является режим динамического гашения колебаний, когда масса является объектом защиты, амплитуда колебаний которого должна быть равна нулю. Вторая масса, отображающая движение точки образца, выполняет роль динамического гасителя колебаний. Варьируя частоту внешнего возмущения, можно найти частоту динамического гашения колебаний объекта защиты. Варьируя амплитуду внешнего возмущения, можно обеспечить необходимую амплитуду колебаний вибрационного гасителя. Колебание массы вибрационного гасителя интерпретируется как форма колебаний испытательного образца.

Для развития комплексных программ динамических испытаний образцов интерес представляет возможность реализации разнообразных форм, удовлетворяющих совокупности требований.

В простейшем случае условия на форму колебаний задаются с помощью совокупности требований к распределению амплитуд колебаний точек образца, а также с помощью минимизации амплитуд колебаний массоинерционного элемента, выполняющего роль вибровозбудителя.

По мере увеличения количества степеней свободы механической колебательной системы могут быть сформулированы вариационные задачи, носящие обобщенный характер и направленные на реализацию движений специальной формы.

Вместе с тем, вариационные подходы [11-15] не достаточно адаптированы для решения задач оценки, формирования и коррекции динамических состояний механических колебательных систем, находящихся в условиях вибрационных нагружений.

Предлагаемая статья посвящена вопросам развития методов построения специальных форм движения механических колебательных систем с помощью вариационных методов.

I. Основные положения. Рассматривается механическая колебательная система, образованная двумя массами m_1, m_2, соединенными между собой и с опорными поверхностям упругими элементами k_1, k_2, k_3. К массоинерционному элементу m_1 приложена внешняя гармоническая сила Q_1 (рис. 1). Предполагается, что массы m_1, m_2 совершают малые вынужденные установившиеся гармонические колебания относительно положения статического равновесия. Масса m_2 выполняет роль вибрационного гасителя колебаний. Одним из настроечных параметров является амплитуда колебаний динамического гасителя. В качестве совокупности требований к динамическому гасителю колебаний выступают условия достижения фиксированных амплитуд; дополнительными условиями служат требования, заключающиеся в том, что масса, которая отображает вибровозбудитель и находится под воздействием внешней возмущающей силы, имеет минимальной возможные амплитуды.

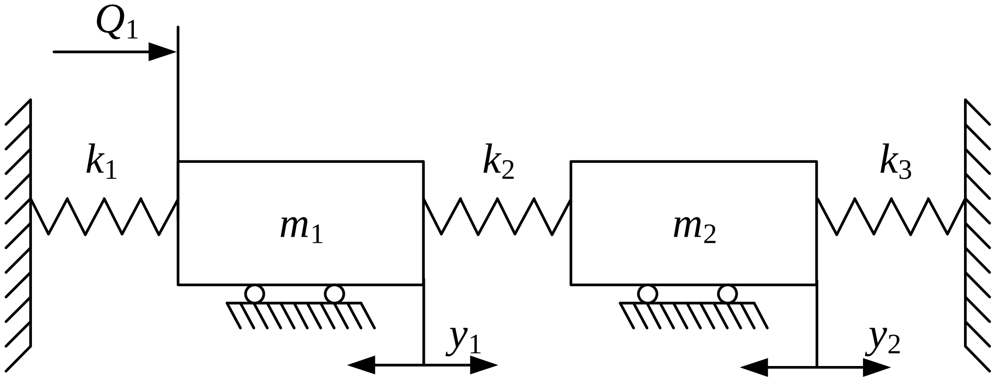

Рис. 1. Расчётная схема в виде механической колебательной системы с сосредоточенными параметрами

Задача заключается в установлении соответствия между режимом динамического гашения колебаний механической системы и режимом колебаний, обладающим экстремальными свойствами.

II. Математическая модель. Для составления математической модели воспользуемся формализмом уравнений Лагранжа 2-ого рода на основе выражений для кинетической и потенциальной энергий:

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2{}^2, \tag{1}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 y_1{}^2 + \frac{1}{2} k_2 (y_2 - y_1)^2 + \frac{1}{2} k_3 y_2{}^2. \tag{2}$$

Система уравнений Лагранжа 2-ого рода принимает вид:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 + (k_1 + k_2) y_1 - k_2 y_2 = Q_1; \\ -k_2 y_1 + m_2 \ddot{y}_2 + (k_2 + k_3) y_2 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Действие интегрального преобразования Лапласа на систему дифференциальный уравнений с учётом нулевых начальных условий приводит к системе алгебраических уравнений относительно изображений:

$$\begin{pmatrix} m_1 p^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & m_2 p^2 + k_2 + k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $p = j\omega$ – комплексная переменная, $j^2 = -1$, знак «-» над символом означает интегральное преобразование Лапласа [16].

С помощью известных методов система уравнений (4) может быть представлена в виде структурной схемы эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления (рис.2) [17, 18].

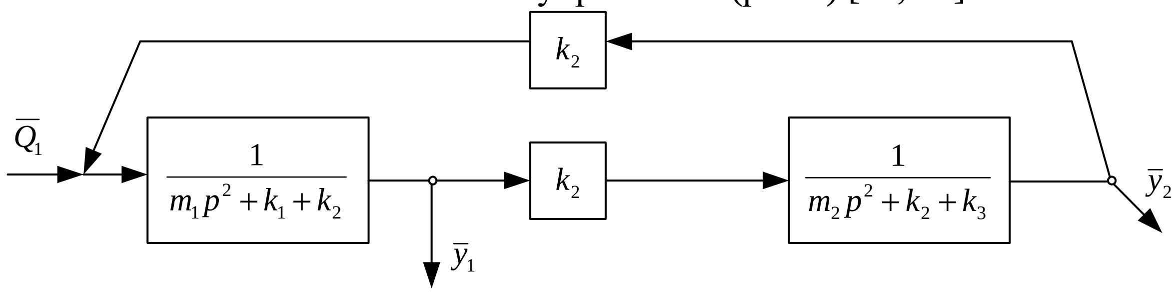

Рис. 2. Структурная схема механической колебательной системы на рисунке 1

На основе структурной схемы могут быть построены передаточные функции, отображающая податливость системы:

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1} = \frac{m_2 p^2 + k_2 + k_3}{A(p)}, \tag{5}$$

$$W_2(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_1} = \frac{k_2}{A(p)}, \tag{6}$$

где $A(p) = (m_2 p^2 + k_2 + k_3)(m_1 p^2 + k_1 + k_2) - k_2^2$ – характеристический многочлен.

Амплитудно-частотная характеристика $A_1(\omega)$ передаточной функции W_1(p) отображает податливость координаты y_1 по отношению к внешнему возмущению Q_1, приложенному к массе m_1, и обращается в ноль на парциальной частоте:

$$\omega_{02}^2 = \frac{k_2 + k_3}{m_2}. \tag{7}$$

Парциальная частота ω_{02} выполняет роль частоты динамического гашения колебаний обобщенной координаты y_1. На частоте динамического гашения колебаний координаты y_1 податливость y_2 под действием внешнего возмущения принимает конечное значение:

$$A_2(\omega)\Big|_{\omega=\omega_{02}} = W_2(p)\Big|_{p=j\omega_{02}} = -\frac{1}{k_2}. \tag{8}$$

На парциальной частоте ω_{02} реализуются режим динамическое гашение колебаний координаты y_1. Амплитуда колебаний координаты y_2 линейно зависит от амплитуды внешнего силового возмущения Q_1. Варьируя амплитуду колебаний внешнего возмущения Q_1, можно добиться необходимой амплитуды колебаний y_2 массы m_2.

Частота динамического гашения колебаний определяется как корень многочлена, образующего числитель амплитудно-частотной характеристики передаточной функции, в физическом плане отображающей динамическую податливость системы. Необходимо отметить, что собственные и парциальные частоты системы связаны с особенностями энергетических функций [19].

Вместе с тем, для определения режимов динамического гашения колебаний может быть использована вариационная постановка задачи.

III. Определение частот динамического гашения колебаний на основе вариационного подхода. Предполагается, что $p = j\omega$. Системе уравнений в изображениях (4) сопоставляется алгебраическая система в амплитудах, в которой вместо изображений рассматриваются вещественные амплитуды установившихся колебаний:

$$K\vec{y} = \vec{Q}, \tag{9}$$

где $\vec{y} = \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \end{pmatrix}$ – вектор амплитуд колебаний, $\vec{Q} = \begin{pmatrix} \hat{q}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ – вектор амплитуд силовых возмущений, $K = \begin{pmatrix} -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + k_2 + k_3 \end{pmatrix}$ – матрица динамических жесткостей, знак «ˆ» над символом означает вещественную амплитуду. Система уравнений (4) позволяет по известной амплитуде внешнего возмущения определять амплитуды установившихся колебаний обобщенных координат y_1, y_2.

Для фиксированной частоты внешнего возмущения ставится задача нахождения амплитуды внешнего возмущения, которая бы обеспечивала необходимую амплитуду y_{02} колебаний координаты y_2 с учетом взвешенного с помощью весового коэффициента α квадрата амплитуды колебаний координаты y_1.

Из всех возможных частот необходимо найти такую частоту, которая бы минимизировала отклонение амплитуды координаты y_2 от фиксированного значения y_{02} с учетом взвешенного квадрата амплитуды y_1.

Для решения задач в вариационной постановке может быть использован энергетический функционал, представляющий собой весовую комбинацию амплитуд колебаний координаты y_1^2 и квадрата отклонения амплитуды y_2 от фиксированного значения y_{02}:

$$\Phi(\hat{q}_1) = \alpha\hat{y}_1^2 + (\hat{y}_2 - y_{02})^2, \tag{10}$$

где y_1, y_2 является решением систему уравнений (9):

$$K\vec{y} = \vec{Q}. \tag{11}$$

На основе системы уравнений (9) могут быть найдены величины амплитуд:

$$\hat{y}_1 = \frac{\left(-m_2\omega^2 + k_2 + k_3\right)}{A(\omega)}\hat{q}_1, \tag{12}$$

$$\hat{y}_2 = \frac{-k_2}{A(\omega)}\hat{q}_1. \tag{13}$$

Для произвольной частоты ω и коэффициента α экстремальная амплитуда q_1^*, доставляющая минимум энергетическому функционалу (10), может быть найдена из условий:

$$\Phi'(\hat{q}_1^*) = 0 \tag{14}$$

или

$$\Phi'(\hat{q}_1^*) = 2\alpha\hat{y}_1(\hat{y}_1)'_{q_1} + 2(\hat{y}_2 - \hat{y}_1)(\hat{y}_2)'_{q_1} = 0. \tag{15}$$

По мере роста числа степеней свободы степень многочлена увеличивается, что может составлять сложности для определения частот режимов динамического гашения колебаний.

На основе условий (14), (15) может быть найдена величина $\hat{q}_1^*$ в зависимости от α:

$$\hat{q}_1^*(\alpha) = \frac{\hat{W}_2 y_{02}}{\alpha\hat{W}_1^2 + \hat{W}_2^2}, \tag{16}$$

где $\hat{W}_1 = \frac{\hat{y}_1}{\hat{q}_1}(\omega), \hat{W}_2 = \frac{\hat{y}_2}{\hat{q}_1}(\omega)$ – вещественные функции.

Соответствующие координаты $\hat{y}_1^*$, $\hat{y}_2^*$ принимают вид:

$$\hat{y}_1^* = \hat{W}_1\hat{q}_1^* = \frac{\hat{W}_1\hat{W}_2 y_{02}}{\alpha\hat{W}_1^2 + \hat{W}_2^2}, \tag{17}$$

$$\hat{y}_2^* = \hat{W}_2\hat{q}_1^* = \frac{\hat{W}_2^2 y_{02}}{\alpha\hat{W}_1^2 + \hat{W}_2^2}. \tag{18}$$

Необходимо отметить, что предельное значение весового коэффициента $\alpha \to 0$ определяет предельные внешнего возмущения:

$$\lim_{\alpha\to 0}\hat{q}_1(\alpha) = \frac{y_{02}}{\hat{W}_2}. \tag{19}$$

В свою очередь по мере стремления $\alpha \to 0$ можно указать предельные значения координат $\hat{y}_1^*$, $\hat{y}_2^*$:

$$\lim_{\alpha\to 0}\hat{y}_1^* = \frac{\hat{W}_1}{\hat{W}_2}y_{02}, \tag{20}$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\hat{y}_2^* = y_{02}. \tag{21}$$

Важно отметить, что амплитуда колебаний координаты $\hat{y}_2$ приближается к требуемому значению y_{02}. Выбирая достаточно малые значения весового коэффициента α можно добиться значения амплитуды y_2 сколь угодно близкого к требуемому значению y_{02}.

Для определения частоты ω, которая бы минимизировала взвешенную с помощью коэффициента α амплитуду y_1 и близости координаты y_2 к требуемому значению y_{02} необходимо минимизировать энергетический функционал:

$$\Phi(\hat{q}_1)=\left(\alpha\left(\frac{1}{\alpha\frac{\hat{W}_1}{\hat{W}_2}+\frac{\hat{W}_2}{\hat{W}_1}}\right)^2+\left(\frac{\alpha}{\alpha+\left(\frac{\hat{W}_2}{\hat{W}_1}\right)^2}\right)^2\right)y_{02}^2. \quad (22)$$

Для различных значений весового коэффициента α могут быть построены конкретные реализации энергетических функционалов (22) (рис.3).

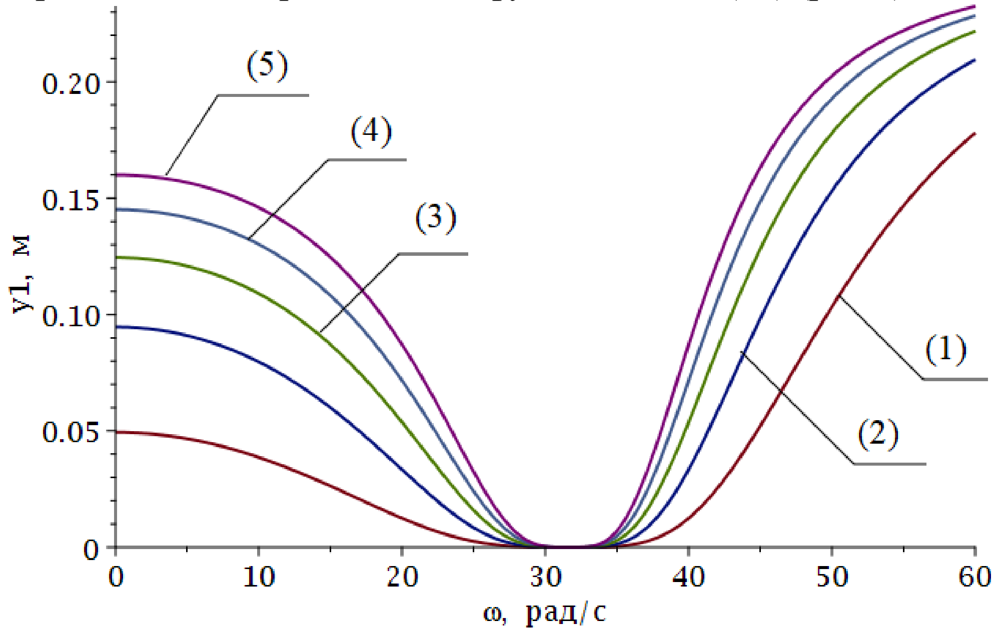

Рис. 3. Определение частоты динамического гашения.
$m_1 = 10$ кг, $m_2 = 20$ кг, $k_1 = 10^4$ Н/м, $k_2 = 10^4$ Н/м, $k_3 = 10^4$ Н/м;
1 – α = 0,2; 2 – α = 0,4; 3 – α = 0,6; 4 – α = 0,8; 5 – α = 1

Для различных весовых коэффициентов α энергетический функционал, рассматриваемый в зависимости от частоты внешних возмущений, достигает минимум в определенной частоте ω^*, совпадающей с частотой динамического гашения колебаний $\omega_{02}\approx 31.6$ рад/с.

Таким образом, частота динамического гашения может быть найдена как решение вариационной задачи, основанной на минимизации специального энергетического функционала. Данный вариационный подход к решению модельной задачи может быть обобщен на системы с несколькими степенями свободы с возможностью учета совокупности требований к форме колебаний вибрационного гасителя.

Особенности модели заключаются в выборе массоинерционного элемента, который рассматривается как объект защиты, находящийся под воздействием внешних возмущений, и в определении структурного образования, рассматриваемого в роли вибрационного гасителя, движение которого должно соответствовать определенным требованиям, отображающим специфику технологических процессов[20, 21].

Заключение. Разработан подход, основанный на вариационных принципах, показывающий, что частоты, характерные свойству объекта, в частности, частоты динамического гашения, могут быть найдены как решения вариационной задачи минимизации энергетического функционала, отображающего систему требований к динамическим состояниям технического объекта. Подход может быть обобщен на системы с несколькими степенями свободы. Приложения подхода могут быть связаны с разработкой комплексных программ циклических вибрационных испытаний, реализующих сложны формы колебаний.

Возможны различные интерпретации рассматриваемой обобщенной задачи. В частности, в рамках теории виброзащитных систем в системе выделяется объект защиты, амплитуда колебаний которого должна быть минимизирована, и структурное образование, являющееся вибрационным гасителем колебаний.

Наравне с системой «объект защиты – вибрационный гаситель» может быть рассмотрена система «вибрационный возбудитель – объект вибрационного нагружения», которая используется в задачах моделирования работы вибрационных стендов динамического испытания лонжеронов лопастей вертолетов. В упрощенной схеме вибрационного стенда определяется массоинерционный элемент, находящийся под воздействием периодической силы, который выполняет роль вибрационного возбудителя, действие которого направлено на возбуждение колебаний определенной формы испытательного образца, амплитуды которой должны удовлетворять совокупности условий.

Список литературы

1. Махутов Н.А. Безопасность и риски: системные исследования и разработки. – Новосибирск: Наука, 2017. – 724 с.
2. Clarence W. de Silva. Vibration. Fundamentals and Practice. – Boca Raton, London, New York, Washington. – D.C.: CRC Press, 2000. – 957 p.
3. Испытательная техника. В 2-х томах. Справочник. Том 1 / Под ред. В.В. Клюева. – М.: Машиностроение, 1982. – 528 с.
4. Патент №2052787 РФ. Стенд для динамических испытаний конструкций балочного типа воздушного винта летательного аппарата / П.С. Шелковников. – Заявка № 5060683/28 от 29.06.1992; опубл. 20.01.1996.
5. Шамшура С.А. Математическая модель оборудования циклических испытаний лонжеронов лопастей вертолетов // Вестник Ростовского государственного университета путей сообщения. – 2008. – № 3 (31). – С. 12-20.
6. Бохоева Л.А., Рогов В.Е., Курохтин В.Ю., Перевалов А.В., Чермошенцева А.С. Определение ресурсных характеристик изделий авиационной техники на основе стендовых испытаний с использованием компьютерных технологий на примере лопасти винта вертолета // Системы. Методы. Технологии. – 2015. – № 4 (28). – С. 36-42.
7. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П., Засядко А.А. Динамический синтез в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов. – Иркутск: ИГУ, 2008. – 523 с.
8. Елисеев С.В., Хоменко А.П. Динамическое гашение колебаний: концепция обратной связи и структурные методы математического моделирования. – Новосибирск: Наука, 2014. – 357 с.
9. Karnovsky I.A., Lebed E. Theory of Vibration Protection. – Springer International Publishing, Switzerland, 2016. – 708 p.
10. Елисеев С.В., Кузнецов Н.К., Каимов Е.В., Нгуен Д.Х. Рабочий орган вибрационных машин как динамический гаситель колебаний // Вестник Иркутского государственного технического университета. – 2016. – № 4 (111). – С. 24-39.

11. Алберг Дж., Нилсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и её приложения. – М.: Мир, 1972. – 320 с.
12. Василенко В.А. Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. – Новосибирск: Наука, 1983. – 216 с.
13. Bezhaev A.Yu. Vasilenko V.A. Variational Theory of Splines. – Kluwer: Academic / Plenum Publichers, 2001.
14. Роженко А.И. Теория и алгоритмы вариационной сплайн-аппроксимации. – Новосибирск: Изд. ИВМиМГ СО РАН, 205. – 244 с.
15. Василенко В.А., Елисеев А.В. Абстрактные сплайны с натяжением как функции параметров энергетического оператора // Сибирский журнал вычислительной математики/ – 1998. – Т. 1, №4. – С. 301-311.
16. Лурье А.И. Операционное исчисление и применение в технических приложениях. – М.: Наука, 1959. – 368 с.
17. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects // Series: Studies in Systems, Decision and Control, Springer International Publishing, Cham, 2020, vol. 252, 521 p.
18. Eliseev A.V. Structural Mathematical Modeling Applications in Technological Machines and Transportation Vehicles. – Hershey, PA: IGI Global, 2023. – 288 p. – doi.org/10.4018/978-1-6684-7237-8.
19. Елисеев А.В. Частотная функция и функция демпфирования в оценке динамических процессов в механических колебательных системах с симметрией // Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don). – 2020. – Т. 20, № 4. – С. 360-369.
20. Елисеев А.В., Выонг К.Ч. Некоторые возможности управления одномерным вибрационным полем технологической машины // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2016. – № 1 (49). – С. 33-41.
21. Елисеев А.В., Мамаев Л.А., Ситов И.С. Некоторые подходы к обоснованию схемы инерционного возбуждения в технологических вибрационных машинах // Системы. Методы. Технологии. – 2015. – № 4 (28). – С. 15-24.

Сведения об авторах:
Елисеев Андрей Владимирович – к.т.н., доцент кафедры математики;
Миронов Артем Сергеевич – соискатель.